ANÁLISIS MATEMÁTICO

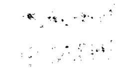
Curso de introducción

BIBLIOTECA DE MATEMÁTICA SUPERIOR
bajo la dirección del
Doctor Emilio Lluis Riera

Traducción: **Federico Velasco Coba**
Director del Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Veracruzana

Revisión técnica: **Emilio Lluis Riera**
Jefe del Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma de México

Supervisión editorial: **Federico Galván Anaya**
Catedrático de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

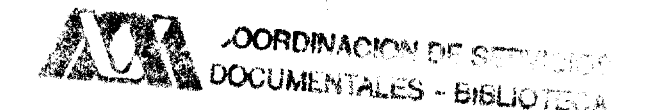


BIBLIOTECA DE MATEMÁTICA SUPERIOR

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Curso de introducción

BIBLIOTECA DE MATEMÁTICA SUPERIOR



Volumen 1

Norman B. Haaser

Joseph P. La Salle

Joseph A. Sullivan



Catalogación en la fuente

Haaser, Norman B.
Análisis matemático 1 : Curso introductorio. --
2a ed. -- México : Trillas, 1990 (reimp. 1992).
v. 1 (808 p.) ; 23 cm. -- (Biblioteca de
matemática superior)
Traducción de: Introduction to analysis
Incluye índices
ISBN 968-24-3837-3

1. Análisis matemático. I. LaSalle, Joseph P.
II. Sullivan, Joseph A. III. t. IV. Ser.

LC- QA37'H3.3 D- 510'H736a 206

Título de esta obra en inglés:
Introduction to Analysis

Versión autorizada en español
de la primera edición
Publicada en inglés por
© Blaisdell Publishing Company
Division of Ginn and Company
Waltham, Massachusetts, E. U. A.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición en español, 1970 (ISBN 968-24-0132-1)
Reimpresiones, marzo 1970, febrero y
noviembre 1971, abril, mayo y noviembre 1972,
1973, enero, mayo y julio 1974, 1975, 1976,
enero y julio 1977, 1978, 1979, 1982, 1984, 1986,
1987 y 1988
Segunda edición en español, 1990 (ISBN 968-24-3837-3)

Primera reimpresión, enero 1992*

Impreso en México

Printed in Mexico

Esta obra se terminó de imprimir,
el día 12 de enero de 1992,
en los talleres de Impresora Cantori, S. A. de C. V.,
Centeno núm. 590, Col. Granjas México,
C.P. 08400, México, D. F.,
se encuadernó en Rotodiseño y Color, S. A. de C. V.,
San Felipe núm. 26, Col. Xoco,
C.P. 03340, México, D. F.,
se tiraron
2 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

Prólogo

El propósito de este libro es presentar el análisis elemental como matemática y, a la vez, como un instrumento de la ciencia, y hacer esta presentación en el espíritu y a la luz de las matemáticas contemporáneas. Reconocemos que el análisis es una materia rigurosa que es aplicable a múltiples ramas de la ciencia y especialmente a la ingeniería, y que, hoy en día, la única forma admisible de estudiarlo es la que ponga énfasis tanto en la comprensión como en las ideas. La sola adquisición de ciertas habilidades de operación, aunque necesarias, no preparan a nadie en el empleo efectivo de las matemáticas, por lo menos al nivel profesional del científico y particularmente del ingeniero. Por otra parte, no se puede dejar pasar inadvertido que este tipo de presentación es el único mediante el que puede conseguirse que las matemáticas contribuyan plenamente a la educación liberal de nuestros estudiantes.

El libro es el fruto de unos ocho años de experimentación activa en la revisión de nuestro programa de matemáticas para pregraduados en ciencias e ingeniería y refleja cuatro años de experiencia en la exposición de una edición preliminar multigrafiada a todos nuestros estudiantes de ciencias e ingeniería y a algunos estudiantes de artes liberales.

Comenzamos con los axiomas del sistema de los números reales. Todo lo que sigue —el álgebra, la geometría, la trigonometría, el cálculo— está basado en estos axiomas. Usamos los vectores en el estudio de la geometría analítica plana. Presentamos el concepto de función en forma general, y las álgebras de funciones valuadas en el campo real y las transformaciones rígidas se estudian como casos particulares. Después de una discusión de la longitud de arco, considera una transformación de la recta real sobre la circunferencia, y se definen y estudian las funciones trigonométricas. Damos también una introducción cuidadosa al cálculo diferencial e integral. En el cálculo, como en lo que le precede, ponemos particular énfasis en la comprensión y en las ideas fundamentales. Las definiciones y los teoremas se formulan con toda precisión y, con pocas excepciones, las pruebas son completas. Para ilustrar las ideas y sus aplicaciones, para verificar el grado de comprensión y para desarrollar habilidad manipulativa, aparecen en el texto numerosos ejemplos y ejercicios.

Al volumen I se le ha dado un carácter fundamental. Queremos decir con esto que hemos planeado el volumen I de tal modo que la extensión a dimensiones más elevadas, tanto en geometría como en cálculo, en el volumen II, no aparezca como una materia completamente nueva, sino como una generalización sencilla y natural de la geometría plana y del cálculo de funciones reales de una variable real. Así, en realidad, el segundo paso en la educación del estudiante es no solamente una extensión sino que también es una revisión y recapitulación de lo que antes ha visto. Esto da al estudiante una oportunidad adicional para comprender y apreciar ideas simultáneamente con su progreso en el estudio de nuevos conceptos. Al dar al estudian-

te una base sólida en análisis, esperamos que un gran número de ellos quede preparado para continuar su educación matemática en algunas de las ramas especializadas o básicas de la matemática avanzada y, al mismo tiempo, dar a todos ellos el entrenamiento matemático que es prerrequisito para sus cursos en ciencias básicas e ingeniería.

Para muchos estudiantes es muy alto el escalón entre las matemáticas a nivel secundario y este curso. Las ideas y el pensamiento abstracto no pueden evitarse. El estudiante no siempre está preparado para el manejo de ideas generales ni para un desarrollo metódico de sistemas y métodos matemáticos. A menudo no conoce la matemática como ciencia deductiva. Encontramos necesario emplear tiempo en una exposición amplia de las ideas fundamentales y en aquel tipo de motivación y y explicación que pueden mejor exponerse en el salón de clases. El estudiante tiene dificultad en aplicar los resultados generales al estudio de casos individuales y a la solución de problemas concretos, y es por ello que necesita la experiencia de la resolución de problemas por sí mismo. Damos problemas al final de cada sección y al final de cada capítulo. El grado de dificultad de estos problemas varía. Muchos son de rutina y algunos constituyen un desafío a los mejores estudiantes.

En el volumen I hay materia más que suficiente para dos cursos semestrales de cinco horas semanales. Lo hemos utilizado para los primeros dos semestres y medio de matemáticas para ingeniería y ciencias (un total de 12 horas semestre). Aunque comuniquemos al alumno los resultados principítulo 5; sección 6 del capítulo 7; secciones 5 y 6 del capítulo 9; reccio-
capítulo 5; sección 6 del capítulo 7; secciones 5 y 6 del capítulo 9; recciones del libro: secciones 6, 7 y 9 del capítulo 4; secciones 9, 10 y 11 del capítulo 5; sección 6 del capítulo 7; secciones 5 y 6 del capítulo 9; secciones 5 y 6 del capítulo 11; sección 5 del capítulo 12; sección 9 del capítulo 13.

Estamos profundamente agradecidos a los profesores Earl Crisler, René DeVogelaere, Lester Lange, Richard Otter y Robert Weinstock por sus muchos y valiosos comentarios y sugerencias. Apreciamos en lo que vale la oportunidad dada por la Universidad de Notre Dame al permitirnos experimentar, lo que no habría sido posible sin la aprobación y el aliento del profesor Arnold Ross del Departamento de Matemáticas y el decano Karl Schoenherr de la Escuela de Ingeniería. Nuestras gracias especiales a la señora Beatrice Haaser por su cuidado y paciencia al mecanografiar las ediciones preliminares y el manuscrito, y a la señora Peggy Ryan que colaboró en esta última tarea.

NORMAN B. HAASER
JOSEPH P. LASALLE
JOSEPH A. SULLIVAN

Índice de contenido

PRÓLOGO 5
PRÓLOGO AL ESTUDIANTE 11
ÍNDICE DE SÍMBOLOS 13

LOS NÚMEROS REALES **Cap. 1** 15
1. Introducción 15
2. Conjuntos 17
3. La recta de los números 21
4. Los números reales 24
5. Algo de álgebra 29
6. Desigualdades 34
7. Intervalos 39
8. Valor absoluto 40
9. Representación geométrica de los números reales 46
10. **Resumen** 48

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA **Cap. 2** 51
1. Introducción 51
2. Coordenadas (cartesianas) rectangulares 52
3. Álgebra vectorial bidimensional 55
4. Representación geométrica de vectores 60
5. Paralelismo de vectores 67
6. Ortogonalidad de vectores 70
7. El producto escalar 73
8. Proyección ortogonal. Componentes 79
9. El plano (analítico) euclidiano 88
10. Paralelismo de rectas 95
11. Ortogonalidad de rectas. Ecuación de una recta 100
12. Intersección de rectas. Ecuaciones lineales simultáneas 107
13. Pendiente 116
14. **Resumen** 119

FUNCIONES **Cap. 3** 123
1. Introducción 123
2. Funciones 124
3. La gráfica de una función 128
4. Funciones especiales 131
5. Adición y multiplicación de funciones 134
6. Composición de funciones 141
7. Álgebra de funciones 152
8. **Resumen** 156

TRANSFORMACIONES RÍGIDAS **Cap. 4** 159
1. Introducción 159
2. Transformaciones 160
3. Transformaciones rígidas 164
4. Composición de transformaciones 179
5. Traslación y rotación de ejes 182
6. Grupos de transformaciones 186
7. Transformaciones ortogonales 190
8. Aplicaciones a la geometría 198
9. Sistemas de coordenadas (cartesianas) rectangulares 203
10. **Resumen** 209

GRÁFICAS DE ECUACIONES **Cap. 5** 215
1. Introducción 215
2. Representación paramétrica 216
3. Funciones de dos variables reales y gráficas de ecuaciones 220
4. Intercepciones, extensión y simetría de gráficas 222
5. La circunferencia 229
6. La parábola 232
7. La elipse 236
8. La hipérbola 243
9. Reducción de una forma cuadrática a la forma diagonal 249
10. La ecuación cuadrática general 254
11. Propiedad común de las secciones cónicas 259
12. **Resumen** 261

TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA **Cap. 6** 265
1. Introducción 265
2. Longitud de arcos de circunferencia 266
3. Las funciones circulares 269
4. Gráficas de las funciones trigonométricas 279
5. Ángulo 283
6. Fórmulas de reducción 293
7. Ángulo de intersección de rectas 296
8. Solución de triángulos 299
9. Coordenadas polares 305
10. **Resumen** 312

INDUCCIÓN MATEMÁTICA **Cap. 7** 315
1. Introducción 315
2. El principio de inducción matemática 316
3. Sumas 319
4. Propiedades de $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 323
5. El teorema del binomio 327
6. El segundo principio de inducción matemática 331

LÍMITES Y DERIVADAS **Cap. 8** 333
1. Introducción 333
2. Tangentes 334

3. Límites 338
4. Algunos límites trigonométricos 356
5. Teoremas sobre límites 358
6. Continuidad 365
7. Velocidad 372
8. La derivada 375
9. Teoremas sobre derivadas 382
10. La derivada de la composición de funciones 388
11. La derivada segunda 394
12. Diferenciales 395
13. Razón de cambio 401
14. Ecuaciones diferenciales 405
15. Límites infinitos 409
16. Resumen 416

EL AXIOMA DEL SUPREMO **Cap. 9** 421
1. Introducción 421
2. Cotas de conjunto 422
3. El axioma del supremo 425
4. El teorema del valor intermedio 430
5. El teorema de Heine-Borel 436
6. Continuidad uniforme 438
7. Algunos teoremas sobre funciones continuas 443
8. Resumen 446

APLICACIONES DE LA DERIVADA **Cap. 10** 449
1. Introducción 449
2. Máximos y mínimos 450
3. El teorema del valor medio 454
4. Aplicaciones del teorema del valor medio 457
5. Máximos y mínimos relativos 460
6. Cómo dibujar la gráfica de una función 468
7. Concavidad de una gráfica 474
8. Resumen 481

SOLUCIÓN DE ECUACIONES **Cap. 11** 483
1. Introducción 483
2. Los números complejos 487
3. Números complejos —La forma polar 494
4. Solución de ecuaciones polinomiales 501
5. División sintética 508
6. Raíces reales de ecuaciones polinomiales 510
7. Ecuaciones trigonométricas 513
8. Solución de ecuaciones mediante aproximaciones sucesivas 516
9. Resumen 522

LA INTEGRAL DEFINIDA **Cap. 12** 525
1. Introducción 525
2. Área de las figuras planas 526
3. La integral definida 532
4. Definición de área 543

5. La existencia de funciones integrales 545
6. Propiedades básicas de la integral 549
7. Los teoremas fundamentales del cálculo 558
8. El primer teorema del valor medio para las integrables 569
9. Integrales impropias 573
10. Resumen 578

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA **Cap. 13** 583
1. Introducción 583
2. Área 584
3. Coordenadas polares y área 591
4. Trabajo 594
5. Ecuaciones diferenciales 598
6. La integral indefinida 603
7. Métodos de integración 611
8. Volumen de sólidos de revolución 621
9. Las integrales como límites de sumas 625
10. La longitud de curvas 636
11. Resumen 648

FUNCIONES ELEMENTALES **Cap. 14** 653
1. Introducción. Clasificación de funciones 653
2. Funciones inversas 654
3. Funciones algebraicas 661
4. La función logarítmica 664
5. La función exponencial 670
6. La función potencial general 674
7. Logaritmos y exponenciales de otras bases 677
8. Funciones trigonométricas 682
9. Funciones trigonométricas inversas 689
10. Diferenciación logarítmica 699
11. Funciones hiperbólicas 701
12. El teorema de Taylor. La aproximación de las funciones polinomiales 703
13. Resumen 712

MÉTODO DE INTEGRACIÓN **Cap. 15** 719
1. Introducción 719
2. Integración por partes 720
3. Fracciones parciales 726
4. Integración de funciones racionales 732
5. Integración por sustitución 739
6. Tablas de integrales 745
7. Integración numérica 748
8. La fórmula de Taylor y la integración numérica 760
9. Resumen 767

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS 770
ÍNDICE ANALÍTICO 803

Prólogo al estudiante

"Debemos admitir algunos axiomas; si admitimos unos pocos más que los estrictamente necesarios, el daño no es grande. Lo esencial es aprender a razonar con los axiomas una vez admitidos. En un teatro, la audiencia acepta voluntariamente todos los postulados que al comienzo se le imponen, pero una vez levantado el telón es inexorable en lo que a lógica respecta. Pues bien, lo mismo ocurre en matemáticas."

H. POINCARÉ.

La historia conocida del desarrollo de las matemáticas, cubre un periodo de casi siete mil años. El álgebra, la geometría y la trigonometría son de antiguo origen, y las contribuciones griegas a la geometría son conocidas por toda persona instruida. Los griegos veían las matemáticas como una ciencia deductiva. Comenzaban con definiciones y axiomas claramente formulados y por razonamiento lógico y prueba precisa elaboraron una teoría de la geometría que demostró, para todos los tiempos, el poder del pensamiento abstracto y condujo al hombre al descubrimiento de que a través de las matemáticas puede entender la naturaleza. Después de los griegos, y a causa de algunos de ellos, el progreso fue lento. El siguiente gran periodo de las matemáticas llega casi dos mil años más tarde, en el siglo XVII, y con él vienen la matemática moderna y la ciencia moderna. Fue esta la época de las grandes academias. Los matemáticos eran físicos, los físicos eran filósofos y los filósofos eran matemáticos. La geometría analítica comienza con Fermat en 1629 y Descartes en 1637. En particular, fue Descartes el primero en aplicar sistemáticamente el álgebra al estudio de la geometría. Cincuenta años más tarde, Newton y Leibniz fundan el cálculo diferencial e integral. Los dos problemas centrales del cálculo son el *problema de las tangentes* y el *problema de la cuadratura.* El *problema de las tangentes* es el de encontrar las rectas tangentes a una curva y éste es el problema geométrico fundamental del cálculo diferencial. El *problema de la cuadratura* es el de determinar el área limitada por curvas y es el problema geométrico fundamental del cálculo integral. A Newton y a Leibniz se les llama los fundadores del cálculo porque fueron los primeros en ver claramente la íntima relación entre estos dos problemas. A sus relaciones se les llama *teoremas fundamentales del cálculo.* Éste fue el comienzo del análisis, y dio un ímpetu a la matemática y a la ciencia, que aún perdura en el presente.

Comienza ahora, el lector, sus estudios de análisis y esperamos que tenga alguna familiaridad con los números, que haya adquirido, al menos, la destreza para las operaciones del álgebra de secundaria y, que sepa algo sobre la interpretación gráfica de los conceptos geométricos. Aunque no necesario,

también sería de ayuda haber estudiado trigonometría geométrica, y nos agradaría pensar, pero no lo presuponemos, que hubiese tenido un verdadero curso de geometría euclidiana plana. Pero, más importante que todo lo demás, suponemos que tiene deseo de aprender, voluntad de estudiar y alguna aptitud para las matemáticas.

En análisis, comenzamos con el sistema de los números reales y en el capítulo 1 enumeramos los axiomas del sistema de los números reales. Son éstas las propiedades que caracterizan completamente a los números reales y es éste nuestro punto de partida. Aceptamos estos axiomas (pueden también llamarse postulados), y todo lo demás que hacemos en análisis se basa en ellos. No habrá ningún otro concepto indefinido. Todos los demás conceptos se definirán en términos de los números reales o en términos de conceptos previamente definidos. Discutimos muchas definiciones intuitivamente, pero la formulación precisa de las definiciones importantes está siempre precedida por la palabra **Definición** (véase, por ejemplo, la pág. 17). Los resultados preliminares que conducen a resultados de mayor importancia o generalidad se llaman *lemas*, y los resultados más importantes, *teoremas*. Las consecuencias directas de los teoremas que son casos especiales importantes de los teoremas se llaman *corolarios*.

El lector encontrará que es necesario estudiar regular e inteligentemente y desarrollar hábitos de estudio adecuados. Ayuda mucho estudiar las matemáticas con lápiz y papel en mano y desarrollar los detalles de los argumentos y los cálculos por sí mismo. Un buen primer paso en la comprensión de la definición de un nuevo término o un nuevo teorema es el de memorizar la definición o el teorema. Deberá intentar después ilustrar casos particulares de la definición o el teorema. Si no puede hacer esto, estúdiense los ejemplos que en el texto aparecen. Recuérdese que no puede entenderse lo que se dice si no se entiende el significado atribuido a las palabras o símbolos que se usan. Para conveniencia del lector damos en la página 13 una lista de símbolos, y el número de página le indica dónde se utilizó y explicó el símbolo por primera vez. Después de un estudio cuidadoso del material, estará listo para enfrentarse con los problemas. Los problemas constituyen una prueba parcial del dominio del tema y deben ayudarle en la comprensión y apreciación de las ideas. Algunos de los problemas son completamente de rutina. Otros tienen como finalidad ilustrar ideas y estimular la imaginación y algunos son anticipaciones de cosas por venir. Las contestaciones a algunos de los problemas aparecen en la parte final del libro, pero sólo deben consultarse después de que cierta comprobación de la respuesta ha dado alguna seguridad de que es correcta.

Índice de símbolos

		Página
$\in$	es un elemento de	17
$\notin$	no es un elemento de	17
$\{\cdots\}$	conjunto	17
$\subset$	es un subconjunto de	17
$\cap$	intersección	18
$\cup$	unión	18
$\varnothing$	conjunto nulo	18
R	sistema de los números reales	25
$<$	menor que	25
$>$	mayor que	34
$\geqslant$	mayor o igual que	34
$\leqslant$	menor o igual que	34
$\Rightarrow$	implica	32
$\Leftrightarrow$	si y sólo si	32
$\langle a, b\rangle$	intervalo abierto	39
$[a, b]$	intervalo cerrado	39
∞	infinito	39 410
$\|a\|$	valor absoluto de a	40
$\|\mathbf{a}\|$	longitud de **a**	70
$\| \ \|$	función valor absoluto	131
V_2	espacio vectorial bidimensional	57
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	producto escalar	74
$\mathbf{a}^{\perp}$	**a** perpendicular	77
$\mathbf{Proy_b\ a}$	proyección de **a** sobre **b**	81
$\mathrm{Comp_b}\ \mathbf{a}$	componente de **a** en la dirección de **b**	81
R^2	plano euclidiano	90
$\mathcal{D}_f$	dominio de una función f	125

		Página
I	función idéntica	131
$[x]$	máximo entero no mayor que x	132
$f \circ g$	f composición g	141
f^*	inverso de f	147
$\mathbf{i}$	el vector (1, 0)	167
$\mathbf{j}$	el vector (0, 1)	167
$\angle\,\mathbf{ab}$	ángulo de **a** a **b**	286
f'	derivada de f	375
Df	derivada de f	377
$D_xf(x)$	derivada de f en x	377
$\Delta f(x; h)$	incremento en f	395
$df(x; h)$	diferencial de f	396
$\dfrac{df}{dx}$	derivada de f	399
$\sup\ \mathcal{S}$	supremo de $\mathcal{S}$	423
$\inf\ \mathcal{S}$	ínfimo de $\mathcal{S}$	422
C	sistema de los números complejos	487
$i = (0, 1)$	unidad compleja	491
$\underline{\int}_a^b f$	integral inferior	535
$\overline{\int}_a^b f$	integral superior	535
$\int_a^b f$	integral definida	537
$\int f$	integral indefinida	604

ALFABETO DE LETRAS MANUSCRITAS

𝒜	ℰ	ℐ	ℳ	𝒬
ℬ	ℱ	𝒥	𝒩	ℛ
𝒞	𝒢	𝒦	𝒪	𝒮
𝒟	ℋ	ℒ	𝒫	𝒯
		𝒰		𝒳
		𝒱		𝒴
		𝒲		𝒵

ALFABETO GRIEGO

Letras	Nombres	Letras	Nombres
Α α	Alfa	Ν ν	Nu
Β β	Beta	Ξ ξ	Xi
Γ γ	Gamma	Ο ο	Omicron
Δ δ	Delta	Π π	Pi
Ε ε	Epsilon	Ρ ρ	Rho
Ζ ζ	Zeta	Σ σ ς	Sigma
Η η	Eta	Τ τ	Tau
Θ θ	Theta	Υ υ	Ipsilon
Ι ι	Iota	Φ φ	Phi
Κ κ	Kappa	Χ χ	Ji
Λ λ	Lambda	Ψ ψ	Psi
Μ μ	Mu	Ω ω	Omega

Capítulo

A ∪ (B ∩ C) 1

Los números reales

1. INTRODUCCIÓN

El sistema de los números reales de que ahora disponemos, es el resultado de una enorme cantidad de reflexión por parte del hombre. Los enteros positivos, es decir, 1, 2, 3, ... , pueden encontrarse desde el comienzo de nuestra civilización. Enteros tan grandes como 100 000 se usaban en Egipto en fecha tan temprana como es 3 000 antes de Cristo.

Los antiguos egipcios y babilonios desarrollaron una aritmética en la que las operaciones de adición y multiplicación de enteros positivos podían efectuarse. Aunque la división no se desarrolló por completo en estos antiguos pueblos usaron ciertas fracciones. Tenemos, pues, que los números racionales aparecieron también en una temprana etapa de nuestra civilización. (Un número racional es un cociente de dos enteros.)

Fueron los babilonios los que más éxito tuvieron en el desarrollo de la aritmética y el álgebra porque tenían una notación para los números muy superior a la de los egipcios. Esta notación era, en principio, análoga a nuestro sistema decimal, excepto por el hecho de que su base era 60 en lugar de 10. Una buena notación es un prerrequisito necesario para el desarrollo de las matemáticas. (¡Inténtese efectuar una multiplicación con números romanos!)

Nuestro sistema decimal con los numerales llamados arábigos fue inventado por los hindúes e introducido en la Europa occidental en el siglo doce a través de las traducciones de textos árabes. Sin embargo, la aceptación generalizada de esta notación tardó mucho en llegar. La aceptación del cero fue, para algunos, especialmente difícil. La espera fue aún mayor para la aceptación de los números negativos. Incluso hasta finales del siglo dieciséis se descartaban las raíces negativas de las ecuaciones.

La aritmética y el álgebra se desarrollaron bajo el estímulo de problemas prácticos y fueron, por ello, compendios de reglas de "cómo operar". En contradicción, la geometría la desarrollaron los griegos solamente para su satisfacción intelectual y es un modelo de sistema lógico.

Sin embargo, con el desarrollo del cálculo, los números reales, especialmente los irracionales —números tales como $\sqrt{2}$, π, $\sqrt[3]{5}$— tuvieron que sustentarse sobre un firme fundamento lógico. Esto se logró en la última parte del siglo diecinueve.

Disponemos ahora de un sistema de axiomas que describe completamente los números reales; partiendo de estos axiomas podemos derivar todas las propiedades de los números reales. Este es el método usado en la geometría euclidiana: se acepta un cierto número de proposiciones —a las que se llama axiomas, postulados o hipótesis— y basándose en esos axiomas se prueban todos los teoremas de la geometría.

Daremos un sistema de axiomas para los números reales y ésta es nuestra base para el análisis. Todo el resto de lo que haremos tendrá estos axiomas como fundamento. Aunque todas las propiedades de los números reales pueden deducirse de estos axiomas, no derivaremos todas y cada una de las propiedades que podamos tener ocasión de usar. En lugar de ello nos confiaremos a la destreza que el estudiante ha adquirido a través de sus estudios de enseñanza media. El estudiante debe comprender, desde luego, que todo paso algebraico correcto que él aprendió es derivable de nuestros axiomas.

Sin embargo, en este capítulo establecemos algunas de las propiedades algebraicas más importantes de los números reales, y, si el estudiante domina estas pruebas, entonces debe ser capaz de probar todas las reglas que se utilizan en las operaciones algebraicas.

Aparte de demostrar el modo en que las reglas, para operar con números, pueden derivarse de los axiomas, este capítulo debe servir para introducir al estudiante a las matemáticas como ciencia deductiva, que es lo que las

matemáticas son. Debe servir también como una introducción a la naturaleza de la prueba y a los métodos para la construcción de pruebas.

2. CONJUNTOS

Como estaremos constantemente usando conjuntos, en particular conjuntos de números, daremos una breve discusión de esta noción antes de comenzar a considerar los números reales. Por un "conjunto" entendemos una colección de objetos. Los objetos individuales se llaman "elementos" del conjunto.

Si un conjunto tiene un número finito de elementos, entonces se llama conjunto finito; en caso contrario se llama conjunto infinito. El conjunto de enteros desde 1 hasta 10 es un conjunto finito; tiene diez elementos. Un ejemplo de conjunto infinito lo tenemos en el conjunto de todos los enteros positivos.

Denotaremos usualmente a los conjuntos con letras manuscritas (mayúsculas) y a sus elementos con letras cursivas minúsculas. Denotaremos el hecho de que b sea un elemento del conjunto $\mathcal{B}$ por $b \in \mathcal{B}$. La expresión "$b \in \mathcal{B}$" se lee "b es un elemento de $\mathcal{B}$", "b pertenece a $\mathcal{B}$", o "b está en $\mathcal{B}$". Un conjunto $\mathcal{B}$ se dice que está definido si, para cualquier elemento c, puede determinarse si $c \in \mathcal{B}$ o $c \notin \mathcal{B}$ (léase "c no es un elemento de $\mathcal{B}$").

Un conjunto finito puede ser mostrado escribiendo sus elementos entre llaves, como: $\{a, b, c\}$. Algunas veces podemos mostrar un conjunto infinito en forma análoga, como en el caso de los enteros positivos: $\{1, 2, 3, \cdots\}$. Los tres puntos quieren decir *etcétera.* Esta notación puede usarse solamente cuando es claro lo que la palabra etcétera denota. Usualmente, un conjunto infinito se describirá por alguna propiedad que posee cada uno de sus elementos y que no posee objeto alguno que no esté en el conjunto. Así, podemos hablar del conjunto de todos los enteros pares; la propiedad que cada objeto del conjunto debe poseer es la de ser un entero par, y todo entero par es un elemento del conjunto. Como una ilustración del peligro de desplegar unos pocos elementos de un conjunto e indicar el resto de los elementos por tres puntos, consideremos el conjunto de todos los números de la forma $n+(n-1)(n-2)(n-3)$, donde n es un entero positivo. El conjunto comienza con los números 1, 2 y 3, pero el siguiente elemento es el 10.

2.1 Definición. *Un conjunto $\mathcal{A}$ es un* ***subconjunto*** *de un conjunto $\mathcal{B}$, lo que se denota por $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, si todo elemento de $\mathcal{A}$ es también un elemento de $\mathcal{B}$.*

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ se lee a menudo "$\mathcal{A}$ está contenido en $\mathcal{B}$".

Por ejemplo, el conjunto de los enteros pares es un subconjunto del conjunto de todos los enteros. La definición de subconjunto implica que

un conjunto es un subconjunto de sí mismo. Por tanto, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ es siempre cierto.

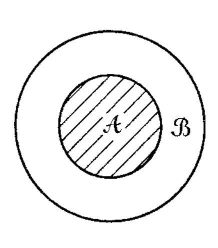


FIGURA 1

Los diagramas pueden ayudar a visualizar las relaciones entre conjuntos. Por ejemplo, la figura 1 —en la que $\mathcal{B}$ es todo el interior del círculo grande— ilustra la relación $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Dos conjuntos son iguales si y sólo si son idénticos, es decir, si y sólo si ambos están compuestos de, exactamente, los mismos elementos. Así $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ si y sólo si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Además de estas relaciones entre conjuntos hay dos operaciones sobre conjuntos que tendremos ocasión de usar.

2.2 Definición. *La **intersección** de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, escrita $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, es el conjunto de elementos que están en ambos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.* [Figura 2 (a).]

Es decir, $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ si y sólo si $x \in \mathcal{A}$ y $x \in \mathcal{B}$.

2.3 Definición. *La **unión** de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, escrita $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, es el conjunto de elementos que están en $\mathcal{A}$ o en $\mathcal{B}$.* [Figura 2 (b).]

Es decir, $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ si y sólo si $x \in \mathcal{A}$ o $x \in \mathcal{B}$.

Nota. La letra "o" tal como se usa en matemáticas tiene el significado de "y/o" en el lenguaje familiar. Así, "$x \in \mathcal{A}$ o $x \in \mathcal{B}$" significa que x está en $\mathcal{A}$ o en $\mathcal{B}$, o en ambos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

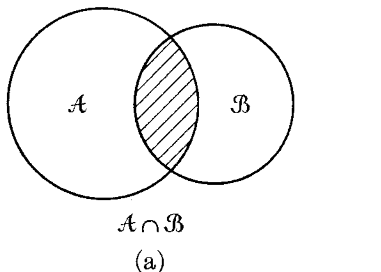


FIGURA 2

Por ejemplo, si $\mathcal{A} = \{a, b\}$ y $\mathcal{B} = \{a, c, d\}$, entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{a\}$ y $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{a, b, c, d\}$.

Para que la intersección de dos conjuntos siempre sea un conjunto, definimos el llamado **conjunto nulo** o conjunto vacío. Es éste un conjunto sin ningún elemento y se denotará por $\varnothing$. Así, si $\mathcal{C}$ es el conjunto de enteros pares y $\mathcal{D}$ es el conjunto de enteros impares, entonces $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ y $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ es el conjunto de todos los enteros.

Aunque los conjuntos de que trataremos en este capítulo serán conjuntos de números, debe tenerse en mente que un conjunto es toda colección de objetos cualquiera que sea la naturaleza de éstos. Damos a continuación algunos ejemplos en los que presentamos conjuntos que no son conjuntos de números. Damos también una aplicación sencilla de los conjuntos a la lógica.

2.4 Ejemplo. Sean los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, y $\mathcal{C}$ definidos como sigue:

$\mathcal{A}$ es el conjunto de todas las personas que tienen los ojos castaños.

$\mathcal{B}$ es el conjunto de todas las personas que tienen el pelo gris.

$\mathcal{C}$ es el conjunto de todas las personas que miden más de 1.80 metros de estatura.

Descríbanse los conjuntos $\mathcal{A}\cap\mathcal{C}$, $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$, $(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})\cup\mathcal{C}$, $(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})\cap\mathcal{C}$.

SOLUCIÓN. $\mathcal{A}\cap\mathcal{C}$ es el conjunto de todas las personas que tienen los ojos castaños que miden más de 1.80 metros de estatura.

$\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ es el conjunto de todas las personas que tienen los ojos castaños o el pelo gris.

$(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})\cup\mathcal{C}$ es el conjunto de todas las personas que tienen los ojos castaños y el pelo gris o miden más de 1.80 metros de estatura.

$(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})\cap\mathcal{C}$ es el conjunto de todas las personas que tienen los ojos castaños y el pelo gris, que miden más de 1.80 metros de estatura.

2.5 Ejemplo. Definamos los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, y $\mathcal{D}$ como sigue:

$\mathcal{A}$ es el conjunto de las muchachas hermosas.

$\mathcal{B}$ es el conjunto de las actrices de cine.

$\mathcal{C}$ es el conjunto de todas las muchachas que usan jabón Dux.

$\mathcal{D}$ es el conjunto de todas las muchachas.

a) Exprésese cada una de las siguientes proposiciones en lenguaje de conjuntos:

1. Todas las actrices de cine son bellas.
2. Todas las actrices de cine usan jabón Dux.
3. Todas las muchachas que usan jabón Dux son bellas.
4. Todas las muchachas que usan jabón Dux son actrices de cine.

b) 1 y 2, ¿implican 3?

c) 1, 2, y 3, ¿implican 4?

d) 1 y 4, ¿implican 3?

SOLUCIÓN

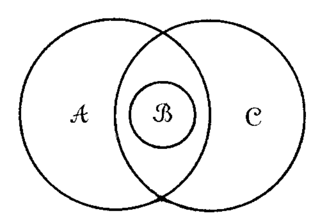
a) 1. $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$

2. $\mathcal{B}\subset\mathcal{C}$

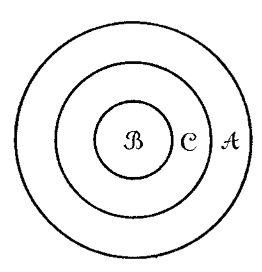
3. $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$

4. $\mathcal{C}\subset\mathcal{B}$

b) 1 y 2 no implican 3. 1 y 2 no excluyen la posibilidad de que haya un elemento en $\mathcal{C}$ que no esté en $\mathcal{A}$ (una muchacha que use jabón Dux, pero que no sea bella). Podemos ilustrar esto gráficamente como sigue

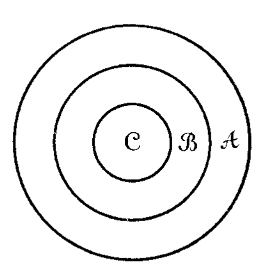


c) 1, 2, y 3 no implican 4. Damos a continuación una ilustración gráfica.



Esta ilustración nos indica que puede haber muchachas bellas que no usen jabón Dux y que no sean actrices de cine.

d) 1 y 4 implican 3. Cualquier elemento de $\mathcal{C}$ pertenece a $\mathcal{B}$ por 4, de donde por 1 pertenece a $\mathcal{A}$.



Problemas

1. Si $\mathcal{A} = \{1, 3, 5, 6\}$ y $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$, encontrar $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. ¿Es $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ un subconjunto de $\mathcal{B}$?

2. Si $\mathcal{A} = \{1, 3, 5, 6\}$ y $\mathcal{B}$ es el conjunto de todos los enteros impares, encontrar $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. ¿Es $\mathcal{A}$ un subconjunto de $\mathcal{B}$?

3. Si $\mathcal{A}$ es el conjunto de todos los enteros positivos pares y $\mathcal{B}$ es el conjunto de todos los enteros pares, encontrar $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. ¿Es $\mathcal{A}$ un subconjunto de $\mathcal{B}$?

4. Si $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{B} = \{b, c, d, e, f\}$ y $\mathcal{C} = \{e, f, g\}$, encuéntrense:

a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *b*) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$

c) $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ *d*) $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$

e) $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$ *f*) $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$

g) $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$ *h*) $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$

i) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}$ *j*) $\mathcal{B} \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{A})$

5. Si $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$, $\mathcal{B} = \{a, c, d, e\}$, $\mathcal{C} = \{b, e\}$ y $\mathcal{D} = \{d\}$, encuéntrense:

a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ *b*) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$

c) $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ *d*) $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$

e) $\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$ *f*) $\mathcal{A} \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{D})$

g) $(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \cap \mathcal{A}$ *h*) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}$

6. Ilústrense gráficamente y pruébense las siguientes proposiciones, para conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ cualesquiera:

a) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$

b) $\mathcal{B} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$

c) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$

d) Si $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$

e) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$

7. Definamos los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ como sigue:

$\mathcal{A}$ es el conjunto de todas las personas que pueden resolver el problema 2.

$\mathcal{B}$ es el conjunto de todas las personas que pueden leer inglés.

$\mathcal{C}$ es el conjunto de todos los estudiantes universitarios.

$\mathcal{D}$ es el conjunto de todas las personas.

a) Descríbanse los conjuntos $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$, $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$.

b) Exprésense cada una de las siguientes proposiciones en el lenguaje de conjuntos.

1. Cualquiera que puede resolver el problema 2 puede leer inglés.
2. Todos los estudiantes universitarios pueden leer inglés.
3. Todos los estudiantes universitarios pueden resolver el problema 2.
4. Todas las gentes que pueden hacer el problema 2 son estudiantes universitarios.

c) 1 y 2, ¿implican 3? Ilústrese gráficamente.

d) 1 y 3, ¿implican 2? Ilústrese gráficamente.

e) 1, 2 y 3, ¿implican 4? Ilústrese gráficamente.

3. LA RECTA DE LOS NÚMEROS

En el estudio de cualquiera de los tópicos de las matemáticas, es de gran ayuda poder dibujar ilustraciones que tengan alguna relación significativa con el tópico en cuestión. Estas ilustraciones no son parte esencial de la teoría matemática sino que han de considerarse como meras ayudas visuales.

Por ejemplo, las anteriores ilustraciones nos fueron útiles para visualizar las relaciones entre conjuntos en la sección anterior.

Los números reales pueden representarse como puntos sobre una recta. Discutiremos esta correspondencia entre números y puntos sobre una recta antes de dar una definición formal de los números reales.

Asociamos primero puntos de una recta con los números racionales como sigue: Consideremos la medida de distancias a lo largo de una recta horizontal (figura 3). Tómese **O** como el punto desde el que han de medirse las distancias. Con **O** asociamos el número 0. Las medidas de la derecha se consideran positivas y las de la izquierda negativas. Con una unidad de longitud fija situamos al punto **U** a una unidad de distancia a la derecha de **O**, **B** dos unidades a la derecha, **A** una unidad a la izquierda, **C** dos unidades a la izquierda y así sucesivamente. Asociamos de esta manera un punto de la recta con cada entero (figura 3). Luego, con la unidad de longitud dividida en n partes iguales, como en una cinta métrica, podemos, al menos teóricamente, asociar mediante una medida un punto con cada uno de los números racionales m/n. (La geometría nos facilita una construcción para dividir un segmento en cualquier proporción.)

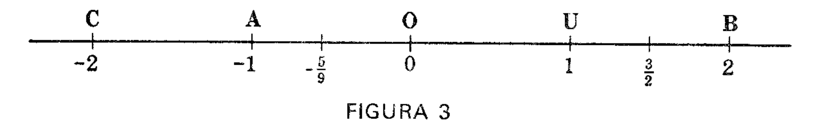


FIGURA 3

Se nos presenta ahora el problema: ¿Asignará este proceso de medición restringido a los números racionales un número a cada punto de la recta? Los griegos sabían que la respuesta es "no". A aquellos segmentos rectilíneos determinados por el origen **O** y los puntos a los que no podía asignarse ningún número racional, les llamaron "inconmensurables" con la unidad seleccionada o, literalmente, segmentos rectilíneos que no podían medirse por este proceso. Un ejemplo de un segmento inconmensurable es **OQ** que se muestra en la figura 4. **OQ** es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados tienen por longitud la unidad. El número que debería corresponder a **Q** es el número cuyo cuadrado es 2.

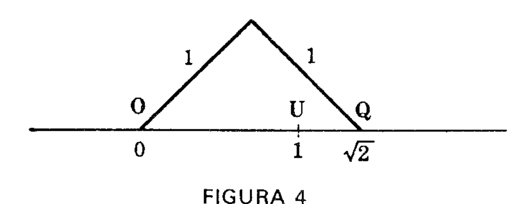


FIGURA 4

Una interesante anécdota dice que los seguidores de Pitágoras —quienes, de acuerdo con Aristóteles, creían que los números eran los elementos, básicos en el conjunto de la naturaleza— descubrieron que la hipotenusa

de un triángulo rectángulo isósceles con catetos iguales a la unidad de longitud, no podía ser medida por un número racional. Creían que esto era un defecto en el trabajo de Dios, aun sin mencionar la posibilidad de que quizá fuese un defecto en su teoría. Continúa la anécdota diciendo que todos juraron guardar en secreto su descubrimiento.

Ahora demostraremos que ningún número racional tiene un cuadrado igual a 2. La prueba dada se debe a Euclides. El método de prueba es el de suponer que algún número racional p/q tiene un cuadrado igual a 2. Esto llevará a una contradicción que demostrará que nuestra hipótesis no puede verificarse y que, por tanto, la proposición que deseamos probar debe ser cierta. Supongamos que p/q es un número racional tal que $(p/q)^2 = 2$. Supongamos, además, que p y q no tienen ningún factor común. Esto no es restricción alguna sobre el número, ya que todo número racional puede escribirse en la forma p/q con p y q sin ningún factor común. Pero $p^2 = 2q^2$ implica que p^2 es par, de donde el mismo p debe ser par (véase el problema 3 siguiente). Luego existe algún entero p_1 tal que $p = 2p_1$. Entonces, $p^2 = 2q^2$ se hace $4p_1{}^2 = 2q^2$ o $2p_1{}^2 = q^2$. Lo que demuestra que q^2 es par, puesto que q es par. Luego, p y q deben tener 2 como factor común, lo que contradice la hipótesis. Por tanto, podemos concluir que ningún número racional tiene un cuadrado igual a 2.

Hemos demostrado que sobre la recta existe un punto con el que no está asociado ningún número racional. Realmente, la situación es mucho peor. Entre cualquier par de puntos sobre la recta hay una infinidad de tales puntos inconmensurables.

El problema de ampliar el sistema de los números más allá de los racionales de modo que cada punto de la recta pudiera asociarse a un número, probó ser muy difícil. No se resolvió satisfactoriamente hasta el trabajo del matemático alemán Richard Dedekind en 1872. El sistema de números reales desarrollado por Dedekind tiene la propiedad de que todo punto sobre la recta puede asociarse con un número real. Una recta con un número asociado con cada punto se llama **recta numérica** o recta coordenada. El número asociado con un punto sobre la recta se llama la **coordenada** del punto.

Porque existe esta correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta es por lo que a menudo identificaremos al número real con el punto a él asociado. Es también por ello por lo que con frecuencia llamaremos punto a un número real.

El problema de localizar en una recta el punto correspondiente a un número irracional (es decir, un número real que no es un número racional) es de carácter diferente al problema correspondiente para un número racional. En el caso de un número racional hay una construcción geométrica que nos permite localizar el punto. Sin embargo, en general, no hay construcción geométrica alguna que nos permita localizar un número irracional. El punto correspondiente a un número irracional se localiza

aproximadamente con referencia a puntos correspondientes a números racionales.

La notación decimal para un número real nos proporciona una forma adecuada para indicar la correspondencia entre puntos sobre la recta y números reales. Ilustraremos esta correspondencia con un ejemplo. Consideremos el número

$$b = 0.231594 \cdots = \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{4}{10^6} + \cdots$$

Tomemos el intervalo unidad y dividámoslo en diez partes iguales (figura 5).

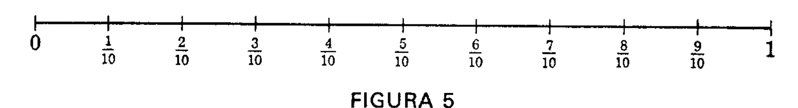


FIGURA 5

Entonces b está entre 2/10 y 3/10. Dividamos el intervalo entre 2/10 y 3/10 en diez partes iguales. Los nuevos puntos de la subdivisión se corresponden con los números $2/10$, $2/10+1/10^2$, $2/10+2/10^2$, ..., $2/10+9/10^2$, $3/10$. b se encuentra en el intervalo con puntos extremos $2/10+3/10^2$ y $2/10+4/10^2$. De esta manera podemos localizar el punto b sobre la recta con cualquier grado de precisión considerando más y más dígitos en el desarrollo decimal del número.

Problemas

1. Sobre una recta numérica o coordenada, localícense los puntos correspondientes a los números $\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{2}$, $\frac{7}{4}$.

2. Localícense sobre una recta coordenada los puntos correspondientes a 0.41 y 0.76.

3. Demuéstrese que si p es un entero y p^2 es par, entonces p es par. *Sugerencia:* Si p es par, entonces $p = 2n$ para algún entero n, y si p es impar, entonces $p = 2n + 1$ para algún entero n.

***4.** Pruébese que ningún número racional tiene un cuadrado igual a 3.

***5.** Pruébese que ningún número racional tiene un cubo igual a 2.

6. Pruébese que un entero positivo n no puede tener una raíz cuadrada racional a menos que n sea un cuadrado perfecto.

4. LOS NÚMEROS REALES

El sistema de los números reales puede definirse suponiendo que se tienen los números racionales y definiendo luego un número real en términos de números racionales. Este es el método usado por Dedekind. Por otra parte, se puede definir el sistema de números reales por un conjunto de axiomas y luego demostrar que los números racionales pueden considerarse

como subconjunto de los números reales. Este último es el método que nosotros usamos.

El método axiomático de introducción del sistema de los números reales, nos proporciona una base breve y adecuada para nuestros estudios de análisis. Que los números reales tal y como los hemos conocido en nuestras experiencias previas satisfacen los axiomas, se hará aparente a medida que prosigamos nuestro estudio. Además, de acuerdo a como hemos definido una recta en el capítulo 2 será evidente que existe una correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta.

El sistema de los **números reales** es un conjunto R y dos operaciones, adición y multiplicación, y una relación de orden, denotada por "$<$" y leída "es menor que", que satisface los siguientes axiomas:

A_1 Para todo a y b en R, $a+b \in$ R. (Estabilidad o "cerradura".)
A_2 Para todo a y b en R, $a+b=b+a$. (Ley conmutativa.)
A_3 Para todo a, b y c en R, $(a+b)+c=a+(b+c)$. (Ley asociativa.)
A_4 Hay un elemento y sólo un elemento, al que denotamos por "0", tal que para todo a en R, $a+0=a=0+a$. (La existencia y unicidad del elemento neutro aditivo.)
A_5 Para cada a en R, hay un y sólo un elemento, al que denotamos por "$-a$", tal que $a+(-a)=0=-a+a$. (La existencia y unicidad del inverso aditivo.)
M_1 Para todo a y b en R, $ab \in$ R. (Estabilidad.)
M_2 Para todo a y b en R, $ab=ba$. (Ley conmutativa.)
M_3 Para todo a, b y c en R, $(ab)c=a(bc)$. (Ley asociativa.)
M_4 Hay un y sólo un elemento, al que denotamos por "1", diferente de 0, tal que para todo a en R, $a\cdot 1=a=1\cdot a$. (La existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo.)
M_5 Para cada a en R, diferente de 0, hay un y sólo un elemento, al que denotamos por a^{-1}, tal que $a\cdot a^{-1}=1=a^{-1}\cdot a$. (La existencia y unicidad del inverso multiplicativo)
D Para todo a, b y c en R, $a(b+c)=ab+ac$ y $(b+c)a=ba+ca$. (Ley distributiva.)
O_1 Para cualesquiera dos elementos a y b en R una y solamente una de las siguientes relaciones se verifica: $a<b$, $a=b$, $b<a$. (Ley de tricotomía.)
O_2 Si $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$. (Ley transitiva.)
O_3 Si $a<b$, entonces, para todo c en R, $a+c<b+c$.
O_4 Si $a<b$ y $0<c$, entonces $ac<bc$.
L El axioma del supremo. (Que se enunciará posteriormente, pág. 425.)

El sistema de los números reales R es más que tan solo un conjunto de elementos. Es un conjunto en el que hay dos operaciones y una relación que satisfacen los axiomas dados. Una operación es completamente diferente de una relación. La operación de adición asocia con cualesquiera dos

elementos a y b de R un elemento único de R al que llamamos $a+b$. Análogamente, la operación de multiplicación asocia con cualesquiera dos elementos a y b de R un elemento único de R al que llamamos ab o $a \cdot b$. Por otra parte, $a < b$ no es un elemento de R sino una proposición acerca de los elementos a y b (a es menor que b).

Nótese que los axiomas A_1 al A_5 se refieren a la adición y que los M_1 al M_5 son proposiciones análogas acerca de la multiplicación. A_1 y M_1 se llaman leyes de estabilidad de la adición y la multiplicación, respectivamente. A_2 y M_2 se llaman leyes conmutativas de la adición y la multiplicación. A_3 y M_3 son leyes asociativas. A_4 y M_4 enuncian la existencia de un elemento neutro único para cada operación y que estos elementos neutros son distintos uno del otro. Al elemento neutro para la adición se le llama "cero" y al elemento neutro para la multiplicación, "uno". A_5 enuncia que todo elemento de R tiene un inverso aditivo único, y M_5 enuncia que todo elemento distinto de cero tiene un inverso multiplicativo único.

El axioma D establece una conexión entre las operaciones de adición y multiplicación y se llama ley distributiva. Los axiomas O_1 y O_2 se refieren a la relación de orden. A O_2 se le llama propiedad transitiva de esta relación. Los axiomas O_3 y O_4 conectan la relación de orden con las operaciones de adición y multiplicación.

El axioma L no está enunciado explícitamente y sólo aparece en la lista para indicar que se necesita otro axioma para completar el conjunto de axiomas para el sistema de los números reales. Este axioma se estudiará con detalle en el capítulo 9. Realmente, el conjunto de los números racionales satisface todos los axiomas, excepto el axioma L. Es el axioma del supremo que nos garantiza que los números reales incluyen los números irracionales.

Nótese que en el axioma A_4 pudimos haber omitido $a = 0+a$. El hecho de que $a = 0+a$ pudo inferirse de que $a+0 = a$ usando la ley conmutativa A_2. Observaciones similares se aplican a los axiomas A_5, M_4, M_5 y D. Además, podemos hacer notar que no es necesario postular la unicidad de los elementos neutros y de los elementos inversos. Con sólo postular la existencia de tales elementos en A_4, M_4, A_5 y M_5, la unicidad puede probarse.

Aunque la relación de igualdad aparece en los axiomas del sistema de los números reales, no damos ningún axioma para esta relación. La relación "$a = b$" significa "a es el mismo elemento que el elemento b". Dicho en otra forma, "$a = b$" significa que se están usando dos símbolos diferentes para representar el mismo elemento. No necesitamos, pues, formular explícitamente reglas tales como "si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$" o "si $a = b$, entonces $a+c = b+c$". Al concluir que $a+c = b+c$ estamos usando la unicidad de la adición.

El axioma A_1 nos dice que podemos sumar dos números reales cuales-

quiera y que su suma es un número real. Es posible sumar los tres números reales a, b y c sumando primero a y b y luego añadiendo c a la suma así obtenida. Este resultado se denota por $(a+b)+c$. También podemos añadir a a la suma de b y c: $a+(b+c)$. Como estas dos sumas son iguales según A_3, podemos prescindir de los paréntesis y escribir simplemente $a+b+c$. Más general, la suma de cualquier colección finita de números reales puede manejarse en la misma forma. Una observación análoga puede hacerse en lo que respecta a la multiplicación.

Si consideramos que el entero positivo 1 es el número real 1 postulado en M_4 y que 2 es $1+1$, entonces 2 es un número real por A_1; 3 es el número real $2+1$. En esta forma vemos que cualquier entero positivo n es un número real. Identificando el entero 0 con el número real 0 postulado en A_4 concluimos que $-n$ es un número real, según A_5. Así pues, los enteros son números reales. Después de que se define la división demostramos que R contiene a los números racionales.

La correspondencia entre números reales y puntos de una recta puede usarse para dar una interpretación geométrica de la relación de orden entre los números reales. En la sección 9 discutiremos la adición usando una interpretación geométrica distinta de los números reales. La relación $a < b$ significa que sobre una recta numérica el punto **A** correspondiente al número a se encuentra a la izquierda del punto **B** correspondiente al número b (figura 6). En este contexto, el axioma O_1 nos dice que para cualesquier números reales a y b con **A** y **B** como puntos correspondientes, o **A** está a la izquierda de **B**, o **B** está a la izquierda de **A**, o **A** es el mismo que **B**. El axioma O_2 se corresponde con el hecho geométrico de que si **A** está a la izquierda de **B** y **B** está a la izquierda de **C**, entonces **A** está a la izquierda de **C** (figura 6).



FIGURA 6

Usando los axiomas, probaremos ahora algunas propiedades del sistema de los números reales. Los únicos axiomas necesarios en esta sección y la próxima, son los que van desde A_1 hasta D. En la prueba del teorema 4.1 el axioma que justifica cada paso se indica entre paréntesis a la derecha. Las pruebas del resto de los teoremas en esta sección se dan en una forma más breve y habitual.

4.1 Teorema. *Para todo a en* R, $a\cdot 0 = 0 = 0\cdot a$.

PRUEBA

$$a\cdot 0 = a\cdot 0+0 \qquad [A_4]$$

$$= a\cdot 0+(a+(-a)) \qquad [A_5]$$

$$\begin{aligned}
&= (a\cdot 0+a)+(-a) && [A_3]\\
&= (a\cdot 0+a\cdot 1)+(-a) && [M_4]\\
&= a(0+1)+(-a) && [D]\\
&= a\cdot 1+(-a) && [A_4]\\
&= a+(-a) && [M_4]\\
&= 0. && [A_5]
\end{aligned}$$

También $0\cdot a=0$ de acuerdo con M_2.

4.2 Teorema. *Para todo a en* R, $-a=(-1)a$.

PRUEBA. De acuerdo con el axioma A_5, el inverso aditivo de a es único. De donde, si demostramos que $a+(-1)a=0$, entonces $(-1)a=-a$.

Usando los axiomas M_4, D y A_5 y el teorema 4.1,

$$a+(-1)a=1\cdot a+(-1)\cdot a=(1+(-1))a=0\cdot a=0.$$

4.3 Corolario. *Para a y b en* R *cualesquiera,* $a(-b)=-(ab)=(-a)b$.

PRUEBA. Usando el teorema 4.2 y los axiomas M_2 y M_3,

$$a(-b)=a((-1)b)=(-1)(ab)=-(ab).$$

La prueba de que $(-a)b=-(ab)$ es análoga a ésta y se deja como ejercicio para el lector.

4.4 Teorema. *Para todo a en* R, $-(-a)=a$.

PRUEBA. Según el axioma A_5 el inverso aditivo de $-a$ es único. Como $a+(-a)=0=(-a)+a$, a es el inverso aditivo de $-a$; es decir, $-(-a)=a$.

4.5 Teorema. *Para a y b en* R *cualesquiera,* $(-a)(-b)=ab$.

PRUEBA. Usando el corolario 4.3 y el teorema 4.4, tenemos

$$(-a)(-b)=-(a(-b))=-(-(ab))=ab.$$

Hay otras dos operaciones sobre los números reales que no están incluidas explícitamente en los axiomas; a saber, la sustracción y la división. Estas operaciones están incluidas implícitamente y se definen como sigue:

4.6 Definición. *Para todo a y b en* R, $a-b=a+(-b)$.

4.7 Definición. *Para todo a y b en* R, *con b diferente de* 0,

$$\frac{a}{b}=ab^{-1}.$$

Nótese que 0 no tiene inverso multiplicativo, y, por tanto, la división por cero no está definida. La hipótesis de que 0 tuviera inverso multiplicativo no es consistente con los otros axiomas. Si 0 tuviese un inverso multiplicativo, llamémosle a, entonces $0 \cdot a = 1$. Esto estaría en contradicción con el teorema 4.1, y por tanto no sería consistente con los axiomas sobre los que está basada la prueba del teorema 4.1. Es en este sentido en el que decimos que la división por cero no puede definirse.

De la definición 4.7 y los axiomas M_5 y M_1, resulta que el cociente de dos números reales cualesquiera es un número real con tal de que el denominador no sea 0. Como los enteros son números reales y un número racional es un cociente de dos enteros, los números racionales son números reales.

No podemos demostrar que números irracionales tales como $\sqrt{2}$ o $\sqrt{5}$ son números reales sin usar el axioma L. Más adelante probaremos que tales números son números reales. Entre tanto, suponemos que si n es un entero impar positivo y a es un número real cualquiera, entonces hay un número único b tal que $a = b^n$. El número b está denotado por $\sqrt[n]{a}$ o por $a^{1/n}$ y se le llama ***n*-ésima raíz de** a. Por ejemplo, $\sqrt[3]{27} = 3$ y $\sqrt[5]{-32} = -2$. Obsérvese, sin embargo, que si n es un entero positivo par, entonces no hay ningún número b tal que $a = b^n$ si $a < 0$, y hay dos números tales que $a = b^n$ si $a > 0$. Así pues, si n es un entero positivo par suponemos que para cada número $a \geqslant 0$ hay un número único $b \geqslant 0$ tal que $a = b^n$. El número no negativo b se denota por $\sqrt[n]{a}$ o por $a^{1/n}$ y se llama **raíz *n*-ésima de** a. Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$ y $\sqrt[4]{16} = 2$.

Problemas

1. Pruébese que $-0 = 0$.

2. Pruébese que $-a-b = -(a+b)$.

3. Pruébese que si $a+b = a+c$, entonces, $b = c$. Esta es la ley de cancelación para la adición.

4. Pruébese que $a-(b-c) = (a-b)+c$.

5. Pruébese que $1^{-1} = 1$.

6. Pruébese que si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

7. Pruébese que si $ab \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

8. Pruébese que si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

9. Pruébese que si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$. Esta es la ley de cancelación para la multiplicación.

5. ALGO DE ÁLGEBRA

Mostraremos cómo algunas de las reglas y métodos del álgebra pueden manejarse a la luz de los axiomas para el sistema de los números reales.

(En esta sección no volveremos a referirnos más, explícitamente, a las leyes asociativas: axiomas A_3 y M_3.)

5.1 Ejemplo. Demuéstrese que

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

SOLUCIÓN. De acuerdo con la definición 4.7, M_4, M_5, M_2, D y el problema 7 de la sección 4

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=ab^{-1}+cd^{-1}=ab^{-1}dd^{-1}+cd^{-1}bb^{-1}=adb^{-1}d^{-1}+bcb^{-1}d^{-1}$$

$$=(ad+bc)b^{-1}d^{-1}=(ad+bc)(bd)^{-1}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

5.2 Ejemplo. Demuéstrese que

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

SOLUCIÓN. Mediante dos aplicaciones del axioma D, tenemos

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Consideraremos ahora las soluciones de las ecuaciones lineales y cuadráticas. Por solución de una ecuación tal como $ax+b=0$, se entiende que debemos encontrar todos los números que cuando están en lugar de x igualan los dos miembros de la ecuación. Enunciaremos el resultado para la ecuación lineal $ax+b=0$ en forma de un teorema.

5.3 Teorema. *Si a, b y x están en* R *y $a \neq 0$, entonces $ax+b=0$ si y sólo si $x=-a^{-1}b$.*

PRUEBA. Hay dos cosas por demostrar, a saber: si $ax+b=0$, entonces $x=-a^{-1}b$, y si $x=-a^{-1}b$, entonces $ax+b=0$.

1) Si $ax+b=0$, entonces

$$ax+b+(-b)=0+(-b)$$

$$ax+0=-b \qquad [A_5, A_4]$$

$$ax=-b \qquad [A_4]$$

$$a^{-1}ax=a^{-1}(-b)$$

$$1\cdot x=-a^{-1}b \qquad [M_5, 4.3]$$

$$x=-a^{-1}b. \qquad [M_4]$$

2) Si $x = -a^{-1}b$, entonces

$$\begin{aligned} ax &= a(-a^{-1}b) & \\ ax &= -aa^{-1}b & [4.3] \\ ax &= -1\cdot b & [M_5] \\ ax &= -b & [M_4] \\ ax+b &= -b+b & \\ ax+b &= 0. & [A_5] \end{aligned}$$

Cuando tenemos que resolver una ecuación lineal específica, el procedimiento usual no es el de aplicar el teorema 5.3 sino, en lugar de ello, emplear el método usado en la prueba del teorema. (En la solución de los ejemplos combinaremos algunos de los pasos en un solo paso y no daremos la razón de cada paso. El estudiante debe justificarlos por sí mismo.)

5.4 Ejemplo. Resolver la ecuación lineal

$$3x+1 = 5x-4.$$

SOLUCIÓN. Si x es una solución de $3x+1 = 5x-4$, entonces

$$\begin{aligned} 3x+1 &= 5x-4 \\ 3x+1-5x-1 &= 5x-4-5x-1 \\ -2x &= -5 \\ x &= \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que si x es una solución, entonces x debe ser $\frac{5}{2}$ y, por tanto, que $\frac{5}{2}$ es la única solución posible. Sin embargo, no hemos demostrado aún que $\frac{5}{2}$ sea realmente una solución. Que $\frac{5}{2}$ es una solución puede verse sustituyendo por este valor a la x en la ecuación dada. Otro método es mostrar recorriendo los distintos pasos de la primera parte de la solución en sentido inverso que si $x = \frac{5}{2}$ entonces $3x+1 = 5x-4$. Es esto lo que haremos ahora.

Si $x = \frac{5}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} -2x &= -5 \\ -2x+5x+1 &= -5+5x+1 \\ 3x+1 &= 5x-4 \end{aligned}$$

Hemos demostrado así que $\frac{5}{2}$ es una solución y en realidad la sola solución de $3x+1 = 5x-4$.

La solución del ejemplo anterior podría ser acortada considerablemente si tuviéramos una forma de indicar que los pasos son reversibles. El uso del conectivo "si y sólo si" entre los pasos cumplirá tal misión.

Si P y Q son dos proposiciones, entonces "P si y sólo si Q" significa que P implica Q y que Q implica P. Es decir, "P si y sólo si Q" significa

que la proposición P es equivalente a la proposición Q. Una doble flecha, $\Rightarrow$, se usa frecuentemente para denotar "implica"; una doble flecha de dos puntas, $\Leftrightarrow$, denota "si y sólo si". Por ejemplo,

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0$$

significa que si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, y también que si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $ab = 0$.

Usando esta notación, la solución del ejemplo 5.4 toma la forma:

$$\begin{aligned} 3x+1 = 5x-4 &\Leftrightarrow 3x+1-5x-1 = 5x-4-5x-1 \\ &\Leftrightarrow -2x = -5 \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Nótese que el símbolo $\Leftrightarrow$ denota la equivalencia de *proposiciones* mientras que $=$ denota la igualdad entre entes matemáticos.

La solución de una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c = 0$ por el método de factorización, se basa en el siguiente teorema:

5.5 Teorema. *$ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$.*

PRUEBA. Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$ según el problema 6 de la sección 4. Y por el teorema 4.1 si $a = 0$ o $b = 0$ entonces $ab = 0$.

5.6 Ejemplo. Resolver la ecuación cuadrática

$$x^2-3x+2 = 0.$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} x^2-3x+2 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 = 0 \quad \text{o} \quad x-2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{o} \quad x = 2. \end{aligned}$$

Así pues, 1 y 2 son soluciones y son las únicas soluciones de la ecuación $x^2-3x+2 = 0$.

Es conveniente comprobar el álgebra y la aritmética efectuadas en la solución del problema sustituyendo la x por 1 y por 2 en la ecuación original.

COMPROBACIÓN

$$(1)^2-3(1)+2 = 0$$

y

$$(2)^2-3(2)+2 = 0.$$

Cuando resolvemos una ecuación cuadrática completando el cuadrado, usamos el siguiente teorema:

5.7 Teorema. $a^2 = b^2$ *si y sólo si* $a = b$ *o* $a = -b$.

PRUEBA

$$
\begin{aligned}
a^2 = b^2 &\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 0 \\
&\Leftrightarrow a-b = 0 \quad \text{o} \quad a+b = 0 \qquad [5.5] \\
&\Leftrightarrow a = b \quad \text{o} \quad a = -b.
\end{aligned}
$$

5.8 Ejemplo. Resolver la ecuación cuadrática

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 1 = 0 &\Leftrightarrow (x-2)^2 = 3 \\
&\Leftrightarrow x - 2 = \sqrt{3} \quad \text{o} \quad x - 2 = -\sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \quad \text{o} \quad x = 2 - \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Así pues la solución de $x^2 + 4x + 1 = 0$ es el conjunto consistente en los dos números $2 + \sqrt{3}$ y $2 - \sqrt{3}$.

COMPROBACIÓN

$$(2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + 1 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8 - 4\sqrt{3} + 1 = 0$$

y

$$(2-\sqrt{3})^2 - 4(2-\sqrt{3}) + 1 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 - 8 + 4\sqrt{3} + 1 = 0.$$

Problemas

1. Demostrar que $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$.
2. Demostrar que $\dfrac{a}{b} \Big/ \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$.
3. Demostrar que $a + a = 2a$.
4. Demostrar que $(2x-y) + (x+y) = 3x$.
5. Demostrar que $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.
6. Demostrar que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
7. Demostrar que $\dfrac{2xy + x^2}{x^2 + x} = \dfrac{2y + x}{x + 1}$, $(x \neq 0, -1)$.

8. Demostrar que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$, $(bd \neq 0)$.

9. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3x+5 = x-3$ b) $2x-1 = 2x+4$

c) $x-2 = 7$ d) $5x-2 = 10x-4$

e) $11-4x = x+5$ f) $3x+2 = 6x+4$

10. Resolver las siguientes ecuaciones por factorización:

a) $x^2+4x-5 = 0$ b) $x^2-4x-21 = 0$

c) $2x^2-x-10 = 0$ d) $3x^2-11x+6 = 0$

e) $5x^2+13x+6 = 0$ f) $x^3+x^2-2x = 0$

11. Resolver las siguientes ecuaciones completando el cuadrado:

a) $x^2+4x-5 = 0$ b) $3x^2-11x+6 = 0$

c) $x^2+6x+7 = 0$ d) $9x^2+54x+79 = 0$

e) $5x^2+3x+2 = 0$ f) $5x^2+3x-2 = 0$

6. DESIGUALDADES

Estudiaremos ahora unas pocas propiedades básicas de las desigualdades e ilustraremos la solución de algunos problemas en que aparecen desigualdades. Aparte dèl símbolo $<$ es conveniente emplear $>$, $\geqslant$ y $\leqslant$. $a > b$, que se lee "a es mayor que b", tiene el mismo significado que $b < a$; $a \geqslant b$ significa que "a es mayor que b o a es igual a b"; y $a \leqslant b$ significa "a es menor que o igual a b".

Un número a se llama *positivo* si $a > 0$ y *negativo* si $a < 0$. El estudiante no debe creer que si hay un signo menos precediendo a un símbolo que representa un número, como por ejemplo $-a$, por ello $-a$ ha de ser negativo. Por ejemplo, si $a = -3$, entonces $-a = 3$, un número positivo. Diremos que dos números tienen el mismo signo si ambos son positivos o ambos son negativos y que son de signo diferente si uno es positivo y el otro positivo.

En esta sección suponemos que todos los axiomas, desde el A_1 hasta el D, han sido tan bien comprendidos que no es necesario que nos refiramos a ellos explícitamente. Esto nos permitirá subrayar los axiomas que tratan de la relación de orden: del O_1 hasta el O_4 inclusive.

6.1 Teorema. *Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a+c < b+d$.*

PRUEBA. Usando el axioma O_3, tenemos: si $a < b$, entonces $a+c < b+c$, y si $c < d$, entonces $b+c < b+d$. Luego, por el axioma O_2,

$$a+c < b+d.$$

Nota. En particular, el teorema 6.1 implica que la suma de números positivos es positiva y que la suma de números negativos es negativa.

6.2 Teorema. *Si* $a < b$, *entonces* $-a > -b$.

PRUEBA. De acuerdo con el axioma O_3, $a < b$ implica que

$$a+(-a)+(-b) < b+(-a)+(-b).$$

Por tanto,

$$-b < -a, \text{ o, equivalentemente, } -a > -b.$$

6.3 Teorema. *Si* $a < b$ y $c < 0$, *entonces* $ac > bc$.

PRUEBA. Si $c < 0$, entonces $-c > 0$ por el teorema 6.2 y el problema 1 de la pág. 29 ($-0 = 0$). De donde, por el axioma O_4:

$$a(-c) < b(-c).$$

Según el corolario 4.3 esto es equivalente a

$$-ac < -bc.$$

Aplicando los teoremas 6.2 y 4.4, tenemos

$$-(-ac) > -(-bc)$$

y

$$ac > bc.$$

6.4 Teorema. *Si* $a \neq 0$, *entonces* $a^2 > 0$.

PRUEBA. Si $a \neq 0$, entonces $a > 0$ o $a < 0$. Si $a > 0$, entonces $a \cdot a > 0 \cdot a$ según el axioma O_4 y, por tanto, $a^2 > 0$ según el teorema 4.1 ($0 \cdot a = 0$). Si $a < 0$, entonces $a \cdot a > 0 \cdot a$ según el teorema 6.3 y, por tanto, $a^2 > 0$.

Como $1 \neq 0$ y $1 = 1^2$, el teorema 6.4 demuestra que $1 > 0$. Usando el teorema 6.1 y el hecho de que $2 = 1+1$, concluimos que $2 > 0$. De esta manera podemos ver que todos los enteros positivos son números reales positivos. De este hecho y el teorema 6.2, se deduce que todos los enteros negativos son números reales negativos.

Enunciamos ahora unos cuantos teoremas más sobre desigualdades, dejando las pruebas de los teoremas 6.6 a 6.9 al estudiante (problema 1, pág. 38).

6.5 Teorema. *Si* $0 \leqslant a < b$ *y* $0 \leqslant c < d$, *entonces* $ac < bd$.

(La expresión $0 \leqslant a < b$ significa que $0 \leqslant a$ y $a < b$.)

PRUEBA. Como $b > 0$ y $c < d$, $bc < bd$ según el axioma O_4. Consideremos ahora dos casos, a saber: $c > 0$ y $c = 0$.

1) Si $c > 0$, entonces, como $a < b$, $ac < bc$ según el axioma O_4. Usando el axioma O_2, concluimos que $ac < bd$.

2) Si $c = 0$, entonces $ac = 0 = bc$. Luego $ac < bd$.

6.6 Teorema. *Si a y b tienen el mismo signo, entonces $ab > 0$. Si a y b son de diferente signo, entonces $ab < 0$.* (Esta es la regla de los signos para la multiplicación.)

Nota. De acuerdo con el teorema 6.6, podemos concluir que si $ab > 0$, entonces a y b tienen el mismo signo, y si $ab < 0$, entonces a y b son de diferente signo. Pues si $ab > 0$, entonces a y b no pueden ser de diferente signo y, por tanto, deben tener el mismo signo. Análogamente, si $ab < 0$, entonces a y b no pueden tener el mismo signo y, por tanto, deben ser de diferente signo. Podemos, pues, decir que a y b tienen el mismo signo si y sólo si $ab > 0$ y que a y b son de signo diferente si y sólo si $ab < 0$.

6.7 Teorema. *a^{-1} tiene el mismo signo que a.*

6.8 Teorema. *Si a y b tienen el mismo signo y $a < b$, entonces*

$$a^{-1} > b^{-1}.$$

6.9 Teorema. *Si $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, entonces $a^2 > b^2$ si y sólo si $a > b$.*

Consideraremos ahora la solución de desigualdades lineales y cuadráticas. Por ejemplo, $3x+5 > x-3$ es una desigualdad lineal. Por solución de una desigualdad entendemos el conjunto de todos los números que cuando están en el lugar de la x hacen cierta la desigualdad. El método de solución de desigualdades es análogo al de solución de ecuaciones. Sin embargo, la solución de una desigualdad es generalmente un conjunto infinito.

6.10 Ejemplo. Resolver la desigualdad

$$3x+5 > x-3.$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3x+5 > x-3 &\Leftrightarrow 3x+5-x-5 > x-3-x-5 \\ &\Leftrightarrow 2 > -8 \\ &\Leftrightarrow x > -4 \end{aligned}$$

Así, pues, la solución de esta desigualdad es el conjunto de todos los números mayores que -4.

En el caso de desigualdades cuadráticas que pueden ser factorizadas, un método de solución puede basarse en el teorema 6.6: $ab > 0$ si y sólo si tienen el mismo signo, y $ab < 0$ si y sólo si a y b son de signo diferente.

Sin embargo, preferimos presentar un método de completación de cuadrados porque este método tiene aplicaciones mayores. El método de completación de cuadrados se basa en los siguientes dos teoremas que son simples consecuencias del teorema 6.9.

6.11 Teorema. *Si* $b \geqslant 0$, *entonces* $a^2 > b$ *si y sólo si* $a > \sqrt{b}$ *o* $a < -\sqrt{b}$.

PRUEBA. Si $a \geqslant 0$, entonces, según el teorema 6.9, $a^2 > b = (\sqrt{b})^2$ si y sólo si $a > \sqrt{b}$. si $a < 0$, entonces $-a > 0$, y aplicando 6.9 otra vez, tenemos $(-a)^2 = a^2 > b = (\sqrt{b})^2$ si y sólo si $-a > \sqrt{b}$. Es decir, si $a < 0$, entonces $a^2 > b$ si y sólo si $a < -\sqrt{b}$.

6.12 Teorema. *Si* $b > 0$, *entonces* $a^2 < b$ *si y sólo si* $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$.

La prueba es análoga a la prueba del teorema 6.11 y la dejamos para el estudiante.

6.13 Ejemplo. Resuélvase la desigualdad cuadrática

$$2x^2+x-6 > 0.$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 2x^2+x-6 > 0 &\Leftrightarrow x^2+\tfrac{1}{2}x-3 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x+\tfrac{1}{4})^2 > \tfrac{49}{16} \\ &\Leftrightarrow x+\tfrac{1}{4} > \tfrac{7}{4} \quad \text{o} \quad x+\tfrac{1}{4} < -\tfrac{7}{4} \qquad [6.11] \\ &\Leftrightarrow x > \tfrac{3}{2} \quad \text{o} \quad x < -2. \end{aligned}$$

La solución de la desigualdad es, pues, el conjunto de todos los números que son mayores que $\frac{3}{2}$ o menores que -2.

Otro tipo de problema que puede resolverse completando el cuadrado se ilustra en el siguiente ejemplo.

6.14 Ejemplo. Encuéntrese el mínimo número M con la propiedad de que $2+6x-3x^2 \leqslant M$ para todo $x \in \mathrm{R}$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 2+6x-3x^2 &= 2-3(x^2-2x) \\ &= 2-3(x^2-2x+1)+3 \\ &= 5-3(x-1)^2 \end{aligned}$$

Para todo $x \in \mathrm{R}$

$$5-3(x-1)^2 \leqslant 5$$

y, como la igualdad se verifica cuando $x = 1$, el mínimo M entre tales números es 5.

Problemas

1. Pruébense los siguientes teoremas:

a) 6.6, *b*) 6.7, *c*) 6.8, *d*) 6.9.

2. Si a es un número real distinto de cero, demuéstrese que a y $-a$ son de signo diferente.

3. Pruébese: si $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, entonces $ab \geqslant 0$.

4. Pruébese: si $a \geqslant 0$ y $b < 0$, entonces $ab \leqslant 0$.

5. Pruébese: si $a \leqslant c$ y $b \leqslant d$, entonces $a+b \leqslant c+d$.

6. Pruébese que $a < b$ si y sólo si $b-a > 0$.

7. Pruébese que $a < b$ si y sólo si existe un número positivo c tal que $a+c = b$.

8. Resuélvanse las siguientes desigualdades lineales:

a) $x+5 > 2$ *b*) $3x \geqslant 5$
c) $4x+1 < 2x+3$ *d*) $3x-5 > 7x+12$
e) $-3x+1 < 2x+5$ *f*) $11x-7 \leqslant 4x+2$

9. Pruébese: si $a > 1$, entonces $a^2 > a$, y si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.

10. Resuélvanse las siguientes desigualdades cuadráticas:

a) $x^2-5x+6 < 0$ *b*) $x^2-3x-4 > 0$
c) $2x^2-x-10 > 0$ *d*) $3x^2-7x+4 < 0$
e) $3x^2-7x+6 < 0$ *f*) $x^2-4x+5 > 0$

11. Si a y b son dos números reales distintos cualesquiera, demuéstrese que hay un número real entre a y b.

12. Pruébese: $0 < a < b$ implica $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

13. Encontrar el mínimo número M con la propiedad de que para todo $x \in R$:

a) $2x-x^2 \leqslant M$ *b*) $1+6x-x^2 \leqslant M$
c) $-19+12x-2x^2 \leqslant M$

14. Encontrar el número m máximo con la propiedad de que para todo $x \in R$:

a) $m \leqslant x^2-4x+4$ *b*) $m \leqslant x^2-4x+29$
c) $m \leqslant x^2+4x+6$

15. Determinar los valores de x para los que cada una de las siguientes expresiones es 1) igual a cero, 2) menor que cero, y 3) mayor que cero.

a) x^2-5x-6 *b*) x^2-6x
c) $x^2-10x+33$

7. INTERVALOS

Los conjuntos que son de uso más frecuente en análisis son los intervalos. Estos son conjuntos de números reales definidos por la propiedad de que sus elementos satisfacen ciertas desigualdades.

7.1 Definición. *El* ***intervalo abierto*** *determinado por dos números a y b, donde $a \leqslant b$, es el conjunto de todos los números x para los que $a < x < b$.* Este intervalo abierto se denota mediante $\langle a, b\rangle$. Otra forma de escribir esta definición es

$$\langle a, b\rangle = \{x \mid a < x < b\}$$

donde $\{x \mid a < x < b\}$ denota al conjunto de todos los números reales x tales que $a < x < b$. Nótese que si $a = b$ entonces $\langle a, b\rangle$ es el conjunto nulo.

7.2 Definición. *El* ***intervalo cerrado*** *determinado por dos números a y b, donde $a \leqslant b$, es el conjunto de todos los números x para los que $a \leqslant x \leqslant b$.* Este intervalo cerrado se denota mediante $[a, b]$ y otra vez podemos escribir la definición:

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Sobre la recta numérica, el intervalo abierto $\langle a, b\rangle$ es el conjunto de todos los puntos que se encuentran estrictamente entre a y b. El intervalo cerrado $[a, b]$ consiste de todos los puntos entre a y b además de los puntos extremos a y b.

Además de intervalos abiertos y cerrados, tenemos intervalos semiabiertos, tales como:

$$\langle a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

y

$$[a, b\rangle = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$

y también intervalos infinitos.

Los intervalos infinitos son:

$$\langle a, \infty\rangle = \{x \mid x > a\}$$
$$[a, \infty\rangle = \{x \mid x \geqslant a\}$$
$$\langle -\infty, a\rangle = \{x \mid x < a\}$$
$$\langle -\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a\}$$
$$\langle -\infty, \infty\rangle = \{x \mid x \in \mathrm{R}\}.$$

El intervalo infinito $\langle a, \infty\rangle$ consiste en todos los puntos sobre la recta de los números que están a la derecha de a. El intervalo $\langle -\infty, \infty\rangle$ es la

recta total de los números. "∞" y "$-\infty$" son simplemente símbolos; no son números reales.

El término intervalo es aplicable a cualquiera de los antes enumerados.

Problemas

1. Escriba lo siguiente como intervalos e ilústrelos sobre una recta numérica.

a) $\langle 1, 3\rangle \cap \langle 2, 5\rangle$ *b*) $[-1, 4] \cap \langle 1, \infty\rangle$

c) $\langle -\infty, 3] \cap [1, \infty\rangle$ *d*) $\langle 2, 4] \cap [1, 6\rangle$

e) $\langle 1, 4\rangle \cup \langle 3, 7\rangle$ *f*) $\langle 2, 4] \cup \langle 4, 6]$

2. ¿Es $\langle -1, 2\rangle \cup \langle 3, 5\rangle$ un intervalo?

3. Demuéstrese que:

a) Si $x \in [2, 4]$, entonces $2x+3 \in [7, 11]$.

b) Si $x \in \langle 2, 4\rangle$, entonces $\dfrac{1}{2x+3} \in \langle \frac{1}{11}, \frac{1}{7}\rangle$.

c) Si $x-5 \in [-2, 2]$, entonces $x \in [3, 7]$.

d) Si $2x-6 \in \langle -4, 4\rangle$, entonces $x \in \langle 1, 5\rangle$.

e) Si $x-x_0 \in [-a, a]$, entonces $x \in [x_0-a, x_0+a]$.

f) Si $x \in [x_0-a, x_0+a]$, entonces $x-x_0 \in [-a, a]$.

4. Pruébese que la intersección de dos intervalos abiertos es un intervalo abierto. (Recuérdese que el conjunto nulo puede considerarse un intervalo abierto.)

5. Pruébese que si la intersección de dos intervalos abiertos es distinta del conjunto nulo, entonces la unión de estos intervalos es un intervalo abierto.

6. Si $[a, b] \subset \langle c, d\rangle$, demuéstrese que $c < a$ y $b < d$.

8. VALOR ABSOLUTO

Si a es un número real distinto de cero, entonces o a o $-a$ es positivo (problema 2, pág. 38). Aquél de los dos que es positivo es llamado valor absoluto de a.

8.1 Definición. *El **valor absoluto** de un número real a, denotado por* $|a|$, *se define por la regla*

$$|a| = a \quad \text{si} \quad a \geqslant 0$$

y

$$|a| = -a \quad \text{si} \quad a < 0.$$

Por ejemplo,

$$|2| = 2, \quad |-2| = -(-2) = 2, \quad |-\tfrac{3}{2}| = \tfrac{3}{2}, \quad |0| = 0.$$

Nótese que esta regla define el valor absoluto de un número a distinto de cero como aquél de los dos números a y $-a$ que es positivo. El valor absoluto de 0 es 0. Geométricamente, el valor absoluto de a es la distancia del origen al punto a.

Es fácil ver que a tiene las siguientes propiedades:

8.2 $$|a| = |-a|$$

y

8.3 $$a \leqslant |a| \quad \text{y} \quad -a \leqslant |a|.$$

Estas propiedades se siguen inmediatamente de la definición, y sus pruebas las dejamos para el estudiante (problemas 1 y 2).

Las tres propiedades fundamentales de los números reales son:

1) $|a| \geqslant 0$, y $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$.
2) $|ab| = |a|\,|b|$.
3) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

Establecemos estas propiedades en los siguientes tres teoremas.

8.4 Teorema. *Para cualquier número real a, $|a| \geqslant 0$. Además $|a| = 0$ implica $a = 0$.*

PRUEBA. Si $a \geqslant 0$, entonces $|a| = a \geqslant 0$, de acuerdo con la definición 8.1. Si $a < 0$, entonces, de acuerdo con el resultado del problema 2, pág. 38, $-a > 0$, de modo que en este caso, usando de nuevo la definición, tenemos $|a| = -a > 0$. Esto prueba la primera parte del teorema.

Si $a \neq 0$, entonces o $a > 0$ y $|a| = a > 0$, o $a < 0$ y $|a| = -a > 0$. Así pues, $a \neq 0$, implica $|a| \neq 0$, o, equivalentemente, $|a| = 0$ implica $a = 0$.

8.5 Teorema. *Para dos números reales cualesquiera a y b,*

$$|a|\,|b| = |ab|.$$

PRUEBA. Caso 1. Si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, entonces, por definición, $|a| = a$ y $|b| = b$, de modo que $|a|\cdot|b| = ab$. Pero, por otra parte, de acuerdo al problema 3, pág. 38, $ab \geqslant 0$, de modo que $|ab| = ab$. De donde $|a|\,|b| = ab = |ab|$.

Caso 2. Si $a \geqslant 0$, $b < 0$, entonces usando 8.2 y el corolario 4.3 de la página 28,

$$|ab| = |-(ab)| = |(a)(-b)|.$$

Ahora, el caso 1 se aplica a $|(a)(-b)|$, ya que $a \geqslant 0$ y $-b > 0$. Por tanto

$$|ab| = |(a)(-b)| = |a|\,|-b| = |a|\,|b|.$$

Caso 3. Si $a < 0$, $b \geqslant 0$, intercambiamos a y b en el caso 2.

Caso 4. Si $a < 0$, $b < 0$, tenemos según el teorema 4.5, pág. 28, caso 1. y el teorema 8.2,

$$|ab| = |(-a)(-b)| = |-a|\,|-b| = |a|\,|b|.$$

8.6 Teorema. (La desigualdad del triángulo.) *Para cualesquiera dos números reales a y b*

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

PRUEBA.

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= |(a+b)^2| \\ &= (a+b)^2 \\ &= a^2+2ab+b^2 \\ &\leqslant a^2+2|ab|+b^2 \\ &= |a|^2+2|a|\,|b|+|b|^2 \\ &= (|a|+|b|)^2 \end{aligned}$$

Como $|a+b|$ y $|a|+|b|$ son ambos no negativos, podemos concluir que $|a+b| \leqslant |a|+|b|$ según el teorema 6.9.

8.7 Corolario. *Para cualesquiera dos numeros reales a y b*

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|.$$

PRUEBA. Aplicando la desigualdad del triángulo a los números $a-b$ y b, tenemos

$$|a| = |(a-b)+b| \leqslant |a-b|+|b|.$$

Consecuentemente

$$|a|-|b| \leqslant |a-b|$$

Análogamente

$$|b| = |(b-a)+a| \leqslant |b-a|+|a|$$

y

$$|b|-|a| \leqslant |b-a|.$$

Según 8.2, $|b-a| = |a-b|$ y de aquí se tiene

$$|b|-|a| \leqslant |a-b|.$$

De los dos números $|a|-|b|$ y $|b|-|a|$, uno es $\big||a|-|b|\big|$. De donde se tiene

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|.$$

Antes de discutir la solución de ecuaciones y desigualdades en que aparezcan implicados valores absolutos, vamos a dar algunos resultados básicos utilizados en la solución de tales problemas.

8.8
$$|a| = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ \text{y} \\ -a = b \quad \text{o} \quad a = b \end{cases}$$

8.9
$$\begin{aligned} |a| < b &\Leftrightarrow -a < b \quad \text{y} \quad a < b \\ &\Leftrightarrow a > -b \quad \text{y} \quad a < b \\ &\Leftrightarrow -b < a < b \end{aligned}$$

Si $b > 0$, entonces $|a| < b \Leftrightarrow a \in \langle -b, b \rangle$.

8.10
$$\begin{aligned} |a| > b &\Leftrightarrow -a > b \quad \text{o} \quad a > b \\ &\Leftrightarrow a < -b \quad \text{o} \quad a > b \\ &\Leftrightarrow a \in \langle -\infty, -b \rangle \cup \langle b, \infty \rangle. \end{aligned}$$

Obtenemos 8.8 immediatamente de la definición de valor absoluto; 8.9 y 8.10 se obtienen usando 8.3 además de la definición.

8.11 Ejemplo. Resuélvase la ecuación

$$|3x-1| = 2x+5.$$

SOLUCIÓN. Usando 8.8, tenemos

$$|3x-1| = 2x+5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geqslant 0 \\ \text{y} \\ -(3x-1) = 2x+5 \quad \text{o} \quad 3x-1 = 2x+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -\frac{5}{2} \\ \text{y} \\ x = -\frac{4}{5} \quad \text{o} \quad x = 6. \end{cases}$$

Así pues, la ecuación tiene las dos soluciones: $-\frac{4}{5}$ y 6.

COMPROBACIÓN

$$|3(-\tfrac{4}{5})-1| = \tfrac{17}{5} = 2(-\tfrac{4}{5})+5$$

y

$$|3\cdot 6-1| = 17 = 2\cdot 6+5.$$

8.12 Ejemplo. Resuélvase la ecuación

$$|x+1| = 3x-9.$$

SOLUCIÓN. Usando 8.8, tenemos:

$$|x+1| = 3x-9 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-9 \geqslant 0 \\ \text{y} \\ -(x+1) = 3x-9 \quad \text{o} \quad x+1 = 3x-9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ \text{y} \\ x = 2 \quad \text{o} \quad x = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 5.$$

Así pues, 5 es la única solución de la ecuación.

COMPROBACIÓN

$$|5+1| = 6 = 3 \cdot 5 - 9$$

8.13 Ejemplo. Resuélvase la desigualdad

$$|x-a| < r, \quad \text{donde } r > 0.$$

SOLUCIÓN. Usando 8.9, tenemos:

$$\begin{aligned} |x-a| < r &\Leftrightarrow -r < x-a < r \\ &\Leftrightarrow a-r < x < a+r \\ &\Leftrightarrow x \in \langle a-r, a+r \rangle. \end{aligned}$$

Así pues, el conjunto de todos los puntos en el intervalo $\langle a-r, a+r \rangle$ constituye la solución de la desigualdad.

8.14 Ejemplo. Resuélvase la desigualdad

$$|3x-1| < 2x+5.$$

SOLUCIÓN. Usando 8.9 tenemos:

$$\begin{aligned} |3x-1| < 2x+5 &\Leftrightarrow 3x-1 > -(2x+5) \quad \text{y} \quad 3x-1 < 2x+5 \\ &\Leftrightarrow x > -\tfrac{4}{5} \quad \text{y} \quad x < 6 \\ &\Leftrightarrow -\tfrac{4}{5} < x < 6 \\ &\Leftrightarrow x \in \langle -\tfrac{4}{5}, 6 \rangle. \end{aligned}$$

8.15 Ejemplo. Resuélvase la desigualdad

$$|3x-1| > 2x+5.$$

SOLUCIÓN. Usando 8.10, tenemos:

$$\begin{aligned} |3x-1| > 2x+5 &\Leftrightarrow 3x-1 < -(2x+5) \quad \text{o} \quad 3x-1 > 2x+5 \\ &\Leftrightarrow x < -\tfrac{4}{5} \quad \text{o} \quad x > 6 \\ &\Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -\tfrac{4}{5} \rangle \cup \langle 6, \infty \rangle. \end{aligned}$$

Problemas

1. Pruébese que si a es un número real cualquiera, entonces $|a| = |-a|$.

2. Pruébese que para todo número real a

$$a \leqslant |a| \quad \text{y} \quad -a \leqslant |a|.$$

3. Pruébese que si a y b ($b \neq 0$) son dos números reales cualesquiera, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

4. Pruébese que si a y b son números reales cualesquiera, entonces

$$|a-b| \leqslant |a|+|b|.$$

5. Pruébese que si a y b son números reales cualesquiera, entonces

$$\big||a|-|b|\big| \leqslant |a+b|.$$

6. Pruébese que si a, b y c son números reales cualesquiera, entonces

$$|a+b+c| \leqslant |a|+|b|+|c|.$$

7. Pruébese que: $|a| = |b|$ si y sólo si $a = b$ o $a = -b$.

8. Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

a) $|x| = 4$
b) $|x+3| = 7$
c) $|x+3| = |2x+1|$
d) $|3x+1|+x = 7$
e) $|2x+3| = 2x+3$
f) $|x-2| = |2x+3|$
g) $|x^2-4| = -2x+4$
h) $|x^2+2| = 2x+1$
i) $|x-2| = 4$
j) $|3x-5|+x-7 = 0.$

9. Resuélvanse las siguientes desigualdades:

a) $|x| \leqslant 4$
b) $|x+3| < 7$
c) $|x+3| > 7$
d) $|3x-1| < 4$
e) $|2x+5| > 3$
f) $|x+3| \leqslant 5$
g) $|3+2x| \leqslant 2$
h) $|5x-3| < 7$
i) $|3-x| \geqslant 1$
j) $|x-2| \leqslant 2x$
k) $|4+x| > 3$
l) $|2x+1| \geqslant 2+x.$

10. Demuéstrese que $|x-a| \leqslant r \Leftrightarrow x \in [a-r, a+r]$, donde $r > 0$.

11. Resuélvanse las siguientes desigualdades:

a) $|x+5| < 2x-3$
b) $|4x-3| < x+2$
c) $|x^2-4| < -2x+4$
d) $|x+5| > 2x-3$
e) $|4x-3| > x+2$
f) $|x^2-4| > -2x+4.$

12. Demuéstrese que:

a) $|x-3| < 1$ implica $6 < x+4 < 8$.

b) $|x-3| < 1$ implica $\frac{1}{8} < \frac{1}{x+4} < \frac{1}{6}$.

c) $|x-1| < 2$ implica $0 \leqslant |2x-3| < 5$.

d) $|x-4| < 1$ implica $\frac{1}{3} < \frac{1}{x-2} < 1$.

13. Demuéstrese que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces sólo se verifica la igualdad en la desigualdad del triángulo en el caso de que a y b tengan el mismo signo. (Sugerencia: Véase la prueba del teorema 8.6 y úsese el hecho de que $ab = |ab|$ si y sólo si a y b tienen el mismo signo.)

9. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES

En la sección 3 discutimos cómo puede establecerse una correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta. Se escogen dos puntos **O** y **U** sobre la recta con **U** a la derecha de **O**. Al punto **O** se le llama origen y distancia de **O** a **U** se toma como unidad de distancia. Después, a cada número real a le asociamos el punto **A** de tal forma que la distancia de **O** a **A** es $|a|$ y **A** está a la derecha de **O** si $a > 0$ y **A** está a la izquierda de **O** si $a < 0$. Como hay una correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta, es frecuente que identifiquemos un número con su punto correspondiente.

Podemos también imaginarnos un número como un desplazamiento: el número a es un desplazamiento de longitud $|a|$ a la derecha si $a > 0$ y a la izquierda si $a < 0$. Si el punto inicial del desplazamiento correspondiente al número a es el origen, entonces el punto final del desplazamiento es el punto correspondiente a a. Representamos a los desplazamientos por letras negrillas minúsculas y por flechas fuera de la recta en los diagramas (figura 7).

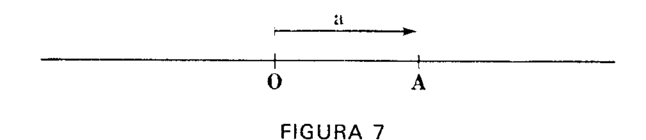


FIGURA 7

Sobre la recta numérica el punto $a+b$ (estamos identificando el número con el punto correspondiente) queda localizado como el resultado de aplicar el desplazamiento **a** a 0 seguido por el desplazamiento **b** (figura 8).

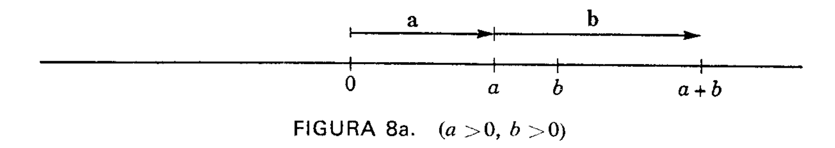


FIGURA 8a. ($a > 0$, $b > 0$)

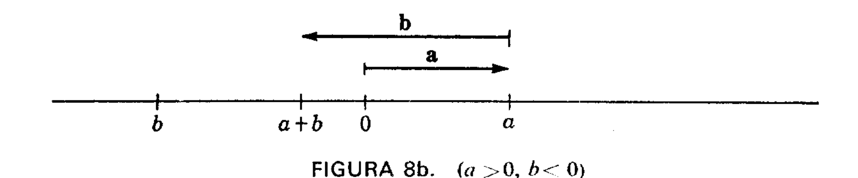


FIGURA 8b. ($a > 0$, $b < 0$)

Los siguientes diagramas ilustran el axioma A_2 (figura 9) y A_5 (figura 10). Para estas ilustraciones tomamos a y b positivos.

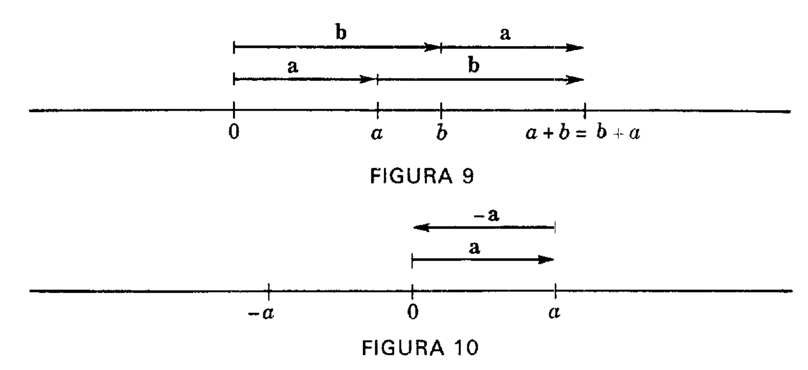


FIGURA 9

FIGURA 10

Si escribimos $a = b+(a-b)$, entonces el punto a está localizado por el desplazamiento **b** del 0 seguido por el desplazamiento correspondiente a $a-b$. Así pues, el desplazamiento correspondiente a $a-b$ es un desplazamiento de b a a (figura 11). Como la longitud de este desplazamiento es $|a-b|$, se sigue de ello que $|a-b|$ es la distancia entre los puntos a y b.

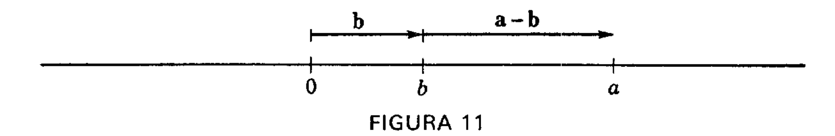


FIGURA 11

Considerando de nuevo la desigualdad

$$|x-a| < r, \quad \text{donde} \quad r > 0,$$

del ejemplo 8.13, vemos que x es una solución si y sólo si la distancia de x a a es menor que r, es decir, si y sólo si x está a la derecha de $a-r$ y a la izquierda de $a+r$ (figura 12).

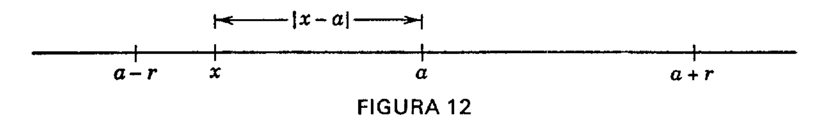


FIGURA 12

Problemas

1. Usando el método de desplazamientos sucesivos, localizar los siguientes puntos sobre una recta numérica.

a) $3+2$, *b*) $-3+2$, *c*) $-3+(-2)$, *d*) $3+(-2)$.

2. Ilústrense gráficamente los siguientes axiomas.

a) A_3, *b*) O_3.

3. ¿Cuál es la distancia entre el punto a y el punto $-b$? Ilústrese graficamente.

4. Ilústrense gráficamente las siguientes relaciones.

a) $|x-3| < 2$ *b*) $|x-3| > 2$
c) $|x-3| = 2$ *d*) $|3-x| \leqslant 2$
e) $|x| < 5$ *f*) $|x| > 5$
g) $|x| = 5$ *h*) $|x+1| = 3$
i) $|x+1| > 3$ *j*) $|x+1| \leqslant 3$.

5. Proporciónese una interpretación geométrica de la desigualdad del triángulo: $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. ¿En qué circunstancias $|a+b| = |a|+|b|$?

6. Al definir la distancia $d(a, b)$ de un punto a a un punto b en la recta numérica, esperamos que la distancia tenga las siguientes propiedades:

1) $d(a, b) \geqslant 0$; $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2) $d(a, b) = d(b, a)$
3) $d(a, b) \leqslant d(a, c)+d(c, b)$.

Muéstrese que si $d(a, b) = |b-a|$, entonces la distancia tiene las propiedades acabadas de enumerar.

10. RESUMEN

En este capítulo hemos construido una parte de la base —los axiomas para el sistema de los números reales— sobre la que descansa nuestro trabajo en matemáticas. Esta base será completada en el capítulo 9, donde discutimos el axioma L, el Axioma del Supremo.

Hemos enunciado y probado algunos teoremas de álgebra elemental no tanto por su contenido —el estudiante conocía ya la mayor parte de estos hechos acerca de los números— sino más bien para ilustrar el modo en que estos hechos pueden derivarse del conjunto de los axiomas dados. Desde luego, tendremos ocasión de usar las propiedades de los números enunciadas en los teoremas, lo mismo que las enunciadas en los axiomas.

El estudiante debe haber ganado alguna apreciación de las matemáticas como ciencia deductiva. Se supone que son verdaderas ciertas proposiciones —los axiomas del sistema; después se prueban los teoremas sacando a la

luz explícitamente la información implícitamente contenida en el sistema de axiomas.

Problemas de repaso

1. Determínense los siguientes conjuntos:

a) $\langle 2, 5\rangle \cup \langle 3, 7\rangle$
b) $\langle 2, 5\rangle \cap \langle 3, 7\rangle$
c) $\langle 2, 5\rangle \cap [3, 7\rangle$
d) $\langle -\infty, 3] \cap [2, \infty\rangle$
e) $\langle -\infty, \infty\rangle \cap [3, 4]$
f) $\langle -1, 4\rangle \cup [0, 3]$.

2. Si $\mathcal{A} = \{x \mid x = 3n,\ n \text{ un entero}\}$ y $\mathcal{B} = \{x \mid x = 5n,\ n \text{ un entero}\}$, determínese $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

3. Pruébese que la intersección de dos intervalos cerrados es o nula o un intervalo cerrado.

4. Pruébese que si la intersección de dos intervalos cerrados no es nula, entonces la unión de estos intervalos es un intervalo cerrado.

5. Localícense los puntos $-\frac{5}{6}$ y $\frac{5}{4}$ sobre una recta numérica.

6. Si a es un número real cuya representación decimal comienza como sigue:

$$a = 1.532\ldots,$$

dése un intervalo cerrado de longitud 10^{-3} que contenga a a.

7. Definamos los enteros del 2 al 9 como sigue: $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $4 = 3+1$, $5 = 4+1$, $6 = 5+1$, $7 = 6+1$, $8 = 7+1$, $9 = 8+1$. Usando los axiomas del sistema de los números reales (indíquense cuáles axiomas se usan en cada paso), pruébese:

a) $3+2 = 5$
b) $3+3 = 6$
c) $3+4 = 7$
d) $3+5 = 8$
e) $3+6 = 9$
f) $3\cdot 2 = 6$
g) $3\cdot 3 = 9$

8. Demuéstrese que $(2x+3)+(x+5) = 3x+8$.

9. Si definimos $a^1 = a$, $a^n = a^{n-1}\cdot a$, donde n es un entero cualquiera mayor que 1, demuéstrese que $a^3 \cdot a^2 = a^5$.

10. Demuéstrese que $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$.

11. Demuéstrese que $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$ si $bc \neq 0$.

12. Si se sabe que

$$1.41415 \leqslant a \leqslant 1.41425$$

y

$$3.135 \leqslant b \leqslant 3.145,$$

establézcanse límites para $a+b$, $a-b$, ab y b/a.

13. Resuélvanse las siguientes desigualdades:

a) $3x+1 > 2x-5$
b) $2x-1 \leqslant 4x+2$
c) $x^2-5x+6 < 0$
d) $x^2-5x+6 > 0$

14. Primero, descríbase la solución de las siguientes desigualdades gráficamente; luego resuélvanse analíticamente.

a) $|x+4| > 5$ *b*) $|x-2| \leqslant 3$

c) $|x+3| < 7$ *d*) $|x-11| \geqslant 2$

15. Resuélvanse las siguientes desigualdades:

a) $|x^2-1| < 2$ *b*) $\dfrac{2}{1-x} > \dfrac{4}{14x}$

c) $\dfrac{3x-2}{x+1} < 4$ *d*) $\dfrac{3x-2}{x+1} < 3$.

Aunque el siguiente material no quedó cubierto en este capítulo, lo incluimos aquí para que el estudiante pueda ejercitarse en el manejo de potencias racionales de números reales. Requeriremos una operación de este tipo en algunos problemas antes de que se discuta totalmente en un capítulo posterior.

Sea a un número real positivo; entonces

$$a^{p/q} = (a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q},$$

donde p y q son enteros positivos, y

$$a^{-r} = (a^{-1})^r,$$

donde r es un número racional positivo. Las siguientes reglas (leyes de los exponentes) se verifican

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(ab)^r = a^r b^r.$$

16. Escríbase cada una de las siguientes expresiones como una potencia racional de un número real:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ *b*) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}$ *c*) $\sqrt[3]{7}/\sqrt{7}$

d) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$ *e*) $\sqrt[3]{4a^2b^2} \cdot \sqrt[3]{2ab^3}$ *f*) $\sqrt[4]{12ab^3}/\sqrt[4]{3a^3b}$.

17. Racionalícese el denominador de cada una de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ *b*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ *c*) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$

d) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ *e*) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ *f*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}}$.

Capítulo

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

2

Geometría analítica plana

1. INTRODUCCIÓN

La palabra "análisis", como aquí la usamos, tuvo su origen histórico en algún momento durante el Renacimiento (siglos XIV a XVI). Al menos en el siglo XVII, por análisis se entiende el método para la resolución de problemas mediante su reducción a la solución de ecuaciones algebraicas. A medida que el tiempo pasaba y las matemáticas se desarrollaban, la palabra "análisis" la usaron los matemáticos en un sentido más y más general hasta incluir a la geometría analítica, el cálculo diferencial e integral, la teoría de series infinitas, las ecuaciones diferenciales, la geometría diferencial, el cálculo de variaciones, la teoría de funciones, etc. Aquí usamos la palabra "análisis" en este amplio sentido e incluimos dentro del análisis todas las matemáticas basadas sobre el sistema de los números reales R.

El propósito de este capítulo es colocar a la geometría euclidiana plana sobre una base analítica. Es posible —aunque *no* es esto lo que haremos— comenzar como lo hizo Euclides, es decir, con una noción de espacio en el que los puntos son objetos indefinidos. Después, partiendo de un conjunto adecuado de axiomas sobre el espacio, es posible demostrar que la geometría puede reducirse al análisis.† Este enfoque presupone una familiaridad con conceptos que aún no han sido estudiados y es un camino que para nosotros no está abierto. Las dificultades encontradas al intentar reducir la geometría al análisis no fueron en realidad vencidas hasta la última parte del siglo XIX. Fue en esta época cuando los matemáticos comenzaron a entender el concepto de "continuidad" y su relación con la geometría.

Nosotros estamos estudiando análisis y adoptamos completamente el punto de vista de que el análisis proporciona otro método, y, como veremos, un método muy poderoso, para el estudio de la geometría. A este enfoque de la geometría se le llama "geometría analítica". En la geometría analítica los puntos y las rectas del espacio no son objetos indefinidos, sino que están definidos en términos de números reales llamados "coordenadas". La recta numérica de la sección 3 del capítulo 1 es un ejemplo de esto. Subyacente al concepto de recta numérica está la hipótesis de que podemos identificar los puntos de una recta (espacio unidimensional) con los números reales. En este capítulo veremos cómo los puntos de un plano (espacio bidimensional) pueden relacionarse con pares de números reales. A su vez, la mayor parte de las ideas de este capítulo pueden extenderse a espacios de tres dimensiones, cuatro dimensiones, ... , n dimensiones, e incluso a espacios de infinitas dimensiones.

La idea subyacente básica de la geometría analítica —la noción de coordenadas— es muy antigua. Tanto Arquímedes (250 años A. C.) y Apolonio (210 años A. C.) usaron representaciones coordenadas en su estudio de las secciones cónicas. Pero los matemáticos griegos recorrían un callejón sin salida, y no fue sino hasta el siglo XVII que el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) explotó la idea y dio ímpetu al desarrollo de un enfoque algebraico sistemático y consistente para el estudio de la geometría. El papel de la geometría analítica en el desarrollo de las matemáticas es tan grande que a menudo se dice que las matemáticas modernas comenzaron con Descartes.

2. COORDENADAS (CARTESIANAS) RECTANGULARES

Nuestro objetivo es construir un modelo matemático de un plano euclidiano basado en el sistema de los números reales. La idea geométrica

† Véase, por ejemplo, G. B. Robinson, *The Foundations of Geometry.* (University of Toronto Press, Toronto, 1940), capítulo 5.

que está detrás de todo este modelo analítico, es el concepto de sistema coordenado. Esta sección está dedicada a mostrar un cuadro geométrico de las coordenadas (cartesianas) rectangulares y de los sistemas (cartesianos) de coordenadas rectangulares. ("Cartesiano" proviene de Descartes derivado del latín.) Aquí no damos definiciones precisas, ni tenemos que estar preocupados con pruebas. Tan solo deseamos ilustrar las ideas intuitivas de las coordenadas rectangulares y explicar cómo es que pares de números reales —estos números reales son las "coordenadas"— se usan para localizar puntos. Esta descripción geométrica de las coordenadas rectangulares será en términos de figuras que dibujaremos en el papel o el pizarrón, y la construcción de estos dibujos o diagramas presupone que estamos familiarizados con los medios físicos de medir distancias y la construcción de rectas paralelas y ángulos rectos. Los diagramas sirven para ilustrar las ideas geométricas que están detrás de nuestro modelo analítico y son de gran valor intuitivo y heurístico. Pero debe tenerse presente, cuando posteriormente tratemos de pruebas, que las pruebas mismas no pueden depender de los diagramas. Las pruebas tienen que ser deducciones basadas sobre los axiomas del sistema de los números reales o sobre propiedades de los números reales deducidas de estos axiomas.

Elijamos en un plano un par de rectas mutuamente perpendiculares, X y Y (figura 1). La recta X se llama "eje X". Usualmente la dibujamos horizontalmente y convenimos en que la dirección positiva para medir distancias sobre el eje X es a la derecha. La recta Y se llama "eje Y". La dirección positiva para medir distancias sobre el eje Y es hacia arriba. El punto **O** de intersección de los dos ejes se llama "origen". Elijamos una unidad de distancia. El par de ejes es, entonces, un par de lo que llamamos en el capítulo 1 "rectas numéricas". Las distancias desde **O** a los puntos sobre los ejes, son distancias "dirigidas" —es decir, positivas a la derecha y negativas a la izquierda sobre X, y positivas hacia arriba y negativas hacia abajo sobre Y.

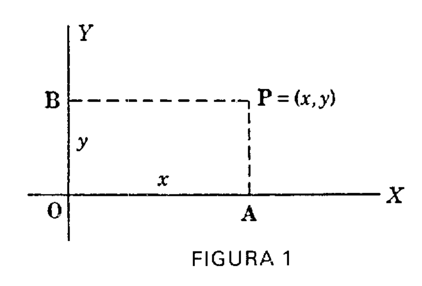


FIGURA 1

Sea **P** un punto cualquiera en el plano (figura 1). Construyamos por **P** una recta paralela al eje Y. Sea **A** la intersección de esta recta con el eje X. El punto **B** es la intersección del eje Y y la recta paralela al eje X que pasa por **P**. Los puntos **O**, **A**, **P**, **B**, son los vértices de un rectángulo. Sea x la distancia dirigida desde **O** hasta **A**, y sea y la distancia dirigida desde **O** hasta **B**. Hemos asociado entonces el punto **P** con el par (x, y) de números reales. Los números x y y se llaman "coordenadas rectangulares" del punto **P**.

Invirtiendo este procedimiento, comenzamos con un par (x, y) de

números reales (figura 1): 1) localizamos el punto **A**, a la distancia dirigida x de **O** sobre el eje X; 2) localizamos **B** a la distancia dirigida y de **O** sobre el eje Y; 3) construimos por **A** una recta paralela al eje Y, y 4) construimos una recta por **B**, paralela al eje X; la intersección de estas dos rectas determina un punto **P** cuyas coordenadas rectangulares son (x, y).

De esta manera asignamos un par de números reales (x, y) a cada punto **P** del plano, y cada par de números reales (x, y) tiene un punto y sólo un punto asignado a él. Identificamos a **P** con el par coordenado (x, y) y escribimos $\mathbf{P} = (x, y)$. Si $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$, entonces $\mathbf{P}_1$ es el mismo punto que $\mathbf{P}_2$ (lo que se escribe $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$) si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. Por ejemplo, el punto (1, 2) no es el mismo que el punto (2, 1). El orden en que los números se dan es importante, y un par (x, y) se llama par ordenado de números reales.

La introducción de dos rectas dirigidas perpendiculares y la elección de una unidad de distancia, han establecido, por tanto, una correspondencia uno a uno entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales. Cualquier medio de establecer una correspondencia tal uno a uno, se llama "sistema de coordenadas". Cuando se eligen dos rectas dirigidas, perpendiculares entre sí, y una unidad de distancia, como aquí se ha ilustrado, el sistema de coordenadas se llama sistema de coordenadas "rectangular" o "cartesiano". Los pares ordenados (x, y) se llaman coordenadas rectangulares de los puntos.

Esta visualización geométrica de un sistema de coordenadas rectangulares sugiere que si (x_1, y_1) son las coordenadas rectangulares de un punto $\mathbf{P}_1$, y (x_2, y_2) son las coordenadas rectangulares de un punto $\mathbf{P}_2$, entonces la "distancia" $d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ de $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$ debería ser dada por

2.1 $$d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Para ver esto, dibújese a traves de $\mathbf{P}_1$ la recta $\mathcal{L}$ paralela al eje Y (figura 2). Todos los puntos de $\mathcal{L}$ tienen a x_1 como su primera coordenada.

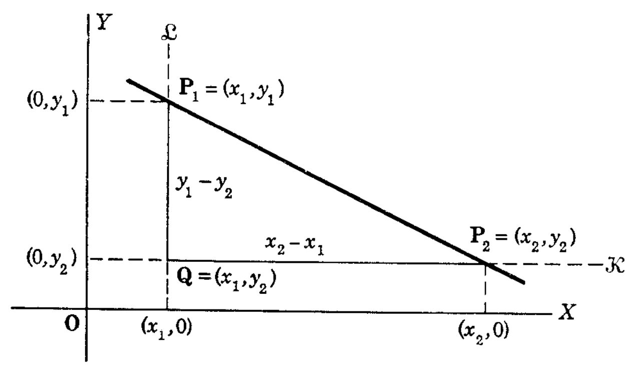


FIGURA 2

Construyamos ahora la recta $\mathcal{K}$ a través de $\mathbf{P}_2$ paralela al eje X. Todos los puntos de $\mathcal{K}$ tienen a y_2 como su segunda coordenada. El punto $\mathbf{Q}$ de intersección de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{K}$ tiene, entonces, coordenadas (x_1, y_2). Evidentemente, $d(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}) = |y_2 - y_1|$ y $d(\mathbf{Q}, \mathbf{P}_2) = |x_2 - x_1|$. De acuerdo con el teorema de Pitágoras

$$[d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)]^2 = [d(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q})]^2 + [d(\mathbf{Q}, \mathbf{P}_2)]^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2,$$

y de aquí obtenemos 2.1.

Problemas

1. Constrúyase un sistema de coordenadas rectangulares y localícense los puntos $(1, 0), (0, 1), (-1, -1), (1, 1), (2, 2), (2, 5), (5, 2), (5, -2), (-5, 2)$.

2. Determínense gráficamente las coordenadas del punto de intersección de la recta que pasa por $(2, 3)$ y $(-1, 4)$ y la recta que pasa por $(-1, 0)$ y $(-2, 3)$.

3. ¿Cual es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 3)$ y $(4, 0)$? Compruébese la respuesta gráficamente.

4. Calcúlense las distancias entre los siguientes pares de puntos:

a) $(0, 0), (6, 8)$, *b*) $(3, 4), (6, 8)$, *c*) $(2, 2), (-1, 1)$, *d*) $(-5, 0), (-2, 6)$.

5. Verifíquese gráficamente que los puntos $(1 + 6t, 3 - 3t)$ correspondientes a $t = 0, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{3}, \pm 1, \pm 2$ se encuentran, todos, sobre una misma recta.

6. Verifíquese gráficamente que los puntos $\mathbf{P} = (x, 2x - 4)$ correspondientes a $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ se encuentran, todos, sobre una misma recta.

7. Determínense cinco puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ cuyas coordenadas satisfagan la ecuación $y - 2x = -4$. Localícense estos puntos.

8. Determínense cinco puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ cuyas coordenadas satisfagan la ecuación $2x + 6y = 14$. Localícense estos puntos.

9. Localícense seis puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ cuyas coordenadas satisfagan:

a) $y = x + 1$ *b*) $y + x = 1$
c) $2x + 3y = 0$ *d*) $x^2 + y^2 = 1$
e) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ *f*) $y = x^2$.

3. ÁLGEBRA VECTORIAL BIDIMENSIONAL

En la sección precedente dimos una descripción geométrica de los sistemas de coordenadas rectangulares en un plano. Las coordenadas (x, y) son un "par ordenado" de números reales y sitúan un punto en el plano. Si meditamos un poco acerca de esta situación, veremos que hay en nuestra vida diaria muchos ejemplos de cosas completamente ordinarias —tales

como la anotación en un juego de beisbol, una fecha 13/1/1956, las dimensiones de un refrigerador— que son especificadas por dos o más números reales donde el orden en que los números se dan es significativo. Tales cantidades se llaman cantidades "vectoriales" o, simplemente, "vectores".

El propósito de esta sección es el de definir precisamente el concepto de "par ordenado" de elementos, introducir una notación para representar tales pares, y definir y estudiar operaciones algebraicas sobre "pares ordenados" de números reales. Este es nuestro primer paso en la tarea de colocar a la geometría sobre una base analítica. Las ideas intuitivas que están detrás del álgebra vectorial se explican en la próxima sección.

Aunque nuestro interés inmediato está en los "pares ordenados" de números reales, más adelante (capítulo 3) hablaremos de pares ordenados de otras cosas que no sean números reales. Preparándonos para esto introducimos la siguiente.

3.1 Definición. *El* ***producto cartesiano*** $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *de dos conjuntos* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *es el conjunto de todos los pares* (a, b) *donde* $a \in \mathcal{A}$ *y* $b \in \mathcal{B}$ *y donde la* ***igualdad*** *de pares* (a, b) *y* (c, d) *en* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *se define con* $(a, b) = (c, d)$ *si y sólo si* $a = c$ *y* $b = d$. *Los elementos de* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *se llaman* ***pares ordenados***.

Al presente estamos solamente interesados en el producto cartesiano del sistema de los números reales R por él mismo.

3.2 Definición. *Los elementos de* R × R *se llaman* ***pares ordenados de números reales***. [Los elementos de R × R se denotarán con letras negrillas $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{P} = (x, y)$, etc.]

Vemos, pues, que (0, 2) y (2, 0) son distintos pares ordenados de números reales; $(0, 2) \neq (2, 0)$. Si visualizamos (0, 2) y (2, 0) como coordenadas rectangulares de puntos en el plano, (0, 2) es un punto sobre el eje Y y (2, 0) es un punto sobre el eje X. La igualdad de pares ordenados, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$, es equivalente a decir que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ si y sólo si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) señalan el mismo punto.

3.3 Definición. (Adición de pares ordenados de números reales.) *Para cada* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *y* $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ *en* R × R, *definimos*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

3.4 Definición. (Multiplicación de un par ordenado de números reales por un número real.) *Para todo* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *en* R × R *y todo* $r \in$ R, *definimos*

$$r\mathbf{a} = (ra_1, ra_2).$$

El conjunto R × R de pares ordenados de números reales con las operaciones que acabamos de definir de suma y multiplicación por números

reales, se llama **espacio vectorial bidimensional** y se denota por V_2. Los elementos del espacio vectorial —los pares ordenados de números reales— se llaman **vectores** o **puntos.**

Los números a_1 y a_2 se llaman primero y segundo componentes, respectivamente, del vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Nuestras definiciones concernientes a los vectores (pares ordenados) pueden, por tanto, expresarse:

a) "Dos vectores son iguales si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales."

El vector $\mathbf{a} = (4, 7)$ no es igual al vector $\mathbf{b} = (7, 4)$.

b) "La suma de dos vectores es el vector que se obtiene al sumar los componentes correspondientes."

Si $\mathbf{a} = (3, 8)$ y $\mathbf{b} = (2, -9)$, entonces $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (3+2, 8+(-9)) = (5, -1)$.

c) "Un número real r veces un vector **a** es el vector obtenido al multiplicar cada componente de **a** por el número real r."

Si $\mathbf{a} = (1, 8)$, entonces $\frac{1}{2}\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, 4)$.

3.5 Ejemplo. Pruébese la ley conmutativa para la adición de vectores:

A_2. $\qquad \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$, para cualesquier **a**, **b** en V_2.

SOLUCIÓN. Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$. Por la definición de la adición de vectores

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2)$$
$$\mathbf{b}+\mathbf{a} = (b_1+a_1, b_2+a_2).$$

De donde, de acuerdo con la ley conmutativa para la adición de números reales y la definición de igualdad de vectores

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (b_1+a_1, b_2+a_2) = \mathbf{b}+\mathbf{a}.$$

3.6 Ejemplo. Demuéstrese que:

A_4. $\quad \mathbf{0} = (0, 0)$ es el único vector en V_2 con la propiedad de que

$$\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{a} \text{ para todo } \mathbf{a} \in V_2.$$

SOLUCIÓN. El vector $\mathbf{0} = (0, 0)$ tiene, ciertamente, esta propiedad: $\mathbf{a}+\mathbf{0} = (a_1, a_2)+(0, 0) = (a_1+0, a_2+0) = (a_1, a_2) = \mathbf{a}$, para todo $\mathbf{a} \in V_2$. Supongamos que $\mathbf{0}'$ es otro vector con esta propiedad. Entonces, según el ejemplo 3.5

$$\mathbf{0}' = \mathbf{0}'+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{0}' = \mathbf{0}.$$

De donde **0** es el único vector con esta propiedad.

3.7 Ejemplo. Establézcase la siguiente ley distributiva para vectores:

D_2. $\qquad r(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = r\mathbf{a}+r\mathbf{b}$

para todo **a**, **b** en V_2 y todo $r \in R$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} r(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= r(a_1+b_1, a_2+b_2) && [3.3] \\ &= (r(a_1+b_1), r(a_2+b_2)) && [3.4] \\ &= (ra_1+rb_1, ra_2+rb_2) && [\text{D de R}] \\ &= (ra_1, ra_2)+(rb_1, rb_2) && [3.3] \\ &= r(a_1, a_2)+r(b_1, b_2) && [3.4] \\ &= r\mathbf{a}+r\mathbf{b}. \end{aligned}$$

De modo análogo puede demostrarse cada una de las siguientes propiedades algebraicas *fundamentales* del espacio vectorial V_2.

3.8 Teorema

Para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V_2$

A_1. $\qquad \mathbf{a}+\mathbf{b} \in V_2$

A_2. $\qquad \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$

A_3. $\qquad (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

A_4. *Hay un elemento único* $\mathbf{0} \in V_2$ *—llamado el* ***origen*** *o* ***elemento cero*** *de* V_2*— con la propiedad de que*

$$\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{a}$$

para todo $\mathbf{a} \in V_2$. ($\mathbf{0} = (0, 0)$.)

A_5. *Para cada* $\mathbf{a} \in V_2$ *hay un elemento único* $-\mathbf{a} \in V_2$, *al que se llama el* ***inverso aditivo*** *de* $\mathbf{a}$, *con la propiedad de que*

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

($-\mathbf{a} = -(a_1, a_2) = (-a_1, -a_2)$.)

Para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_2$ *y* $r, s \in R$:

M_1. $\qquad r\mathbf{a} \in V_2$

M_2. $\qquad 1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

D_1. $\qquad (r+s)\mathbf{a} = r\mathbf{a}+s\mathbf{a}$

D_2. $\qquad r(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = r\mathbf{a}+r\mathbf{b}$

D_3. $\qquad r(s\mathbf{a}) = (rs)\mathbf{a}$

PRUEBA. Las Propiedades A_2, A_4 y D_2 se establecieron en los ejemplos 3.5, 3.6 y 3.7. Las pruebas de las restantes propiedades son también simples consecuencias de las propiedades de los números reales (problema 2).

Como en la substracción de los números reales, la sustracción de vectores se define mediante la adición del inverso aditivo.

3.9 *Definición (sustracción de vectores).* Para $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V_2$ cualesquiera, definimos

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Luego, de acuerdo con A_5 del teorema anterior

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2);$$

"dos vectores se restan, restando sus componentes correspondientes". Por ejemplo,

$$(1, 3) - (2, -2) = (-1, 5).$$

A menudo usamos la notación $\mathbf{a}/r$ o $\dfrac{\mathbf{a}}{r}$ en lugar de $\dfrac{1}{r}\mathbf{a}$.

Problemas

1 Sean $\mathbf{a} = (-1, 3)$, $\mathbf{b} = (4, 8)$, y $\mathbf{P}_0 = (-1, -6)$. Calcúlense:

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *b)* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$
c) $2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ *d)* $4\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$
e) $\mathbf{P}_0 + 3\mathbf{a}$ *f)* $3(\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) + 6\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

2 Pruébese que el espacio vectorial V_2 tiene las propiedades:

a) A_1 *b)* A_3 *c)* A_5 *d)* M_1
e) M_2 *f)* D_1 *g)* D_3.

3. Pruébese que:

a) $r\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $r \neq 0$ implica $\mathbf{a} = \mathbf{0}$
b) $r\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ implica $r = 0$
c) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$
d) $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

4. Pruébese que: Si s y t son números reales dados con $t \neq 0$, y $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores dados, la ecuación

$$s\mathbf{a} + t\mathbf{v} = \mathbf{b}$$

tiene la solución, única, $\mathbf{v} = t^{-1}(\mathbf{b} - s\mathbf{a})$.

5. Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

a) $2(0, 6)+7\mathbf{v} = (-1, 1)$ *b*) $-2\mathbf{v} = (3, 6)$
c) $5\mathbf{v}+(8, 15) = 5(1, 3)$ *d*) $\frac{1}{2}\mathbf{v}+(0, -3) = (4, 1)-\mathbf{v}$
e) $2[(5, -1)+\mathbf{v}] = 2\mathbf{v}+(1, 0)$ *f*) $2[(5, -1)+\mathbf{v}] = 2\mathbf{v}+(10, -2)$.

6. Determínese, en cada una de las siguientes expresiones, si existe o no un número real r que las satisface:

a) $r(3, 2) = (1, 0)$ *b*) $r(6, 8) = (-3, 4)$
c) $r(6, 8) = (-3, -4)$ *d*) $(1, 7)+r(3, 2) = (-5, 3)$.

4. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE VECTORES

Aunque en la sección previa pudimos haber aceptado que hay algunas razones para estudiar los pares ordenados de números reales, puede ser que no nos parezca aún claro por qué estamos interesados en el álgebra de los pares ordenados (vectores). En esta sección discutiremos las ideas físicas y geométricas intuitivas que se encuentran detrás del álgebra vectorial y que nos guían en la construcción de nuestro modelo matemático del plano euclidiano. Describimos la manera en que los vectores pueden representarse por "flechas" (también llamadas "segmentos dirigidos"). Mediante construcciones con estas flechas dibujaremos diagramas que ilustrarán el álgebra vectorial.

Construyamos, como se describe en la sección 2, un sistema rectangular de coordenadas. Entonces, construimos una flecha representativa de un vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ del siguiente modo (figura 3): 1) comenzamos desde un punto $\mathbf{P}_0$ cualquiera del plano; 2) nos movemos desde $\mathbf{P}_0$ en dirección paralela al eje X la distancia a_1 (a la derecha si a_1 es mayor que cero y a la izquierda si a_1 es menor que cero) y localizamos así un punto **Q**; 3) movemos **Q** paralelamente al eje Y una distancia $\mathbf{a}_2$ (hacia arriba si $a_2 > 0$ y hacia

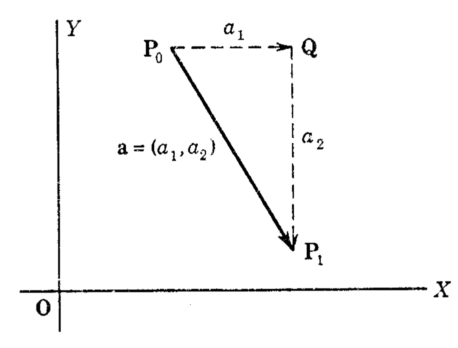


FIGURA 3

abajo si $a_2 < 0$), y localizamos, así, un punto $\mathbf{P}_1$; dibujamos el segmento rectilíneo de $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}_1$ y colocamos la cabeza de la flecha en $\mathbf{P}_1$; esta es la flecha que representa a $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Análogamente, dada una flecha de $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}_1$, podemos, por construcción de la recta por $\mathbf{P}_0$ paralela al eje X y la recta por $\mathbf{P}_1$ paralela al eje Y, localizar su punto de intersección $\mathbf{Q}$ y determinar así los números a_1 y a_2. De aquí que, dado un sistema de coordenadas rectangulares, vemos que cada flecha determina un vector único $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. La afirmación recíproca no es cierta, ya que en la construcción de la flecha el punto $\mathbf{P}_0$ se eligió arbitrariamente. Sin embargo, dado $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, todas las flechas que pueden construirse de esta manera son de la misma longitud, paralelas entre sí, y apuntan a la misma dirección.

Una descripción geométrica de la adición de vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ es la que sigue (figura 4): 1) elíjase un punto $\mathbf{P}_0$; 2) constrúyase la flecha $\mathbf{a}$ desde $\mathbf{P}_0$ y localícese así el punto $\mathbf{P}_1$; 3) constrúyase la flecha $\mathbf{b}$ desde $\mathbf{P}_1$ y localícese así el punto $\mathbf{P}_2$; la flecha de $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}_2$ corresponde al vector $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Es decir, si el punto inicial de $\mathbf{b}$ se coloca en el punto terminal de $\mathbf{a}$, entonces $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ corresponde a la flecha dibujada desde el punto inicial de $\mathbf{a}$ hasta el punto terminal de $\mathbf{b}$.

Por definición,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1, a_2)+(b_1, b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2).$$

Que la anterior descripción geométrica de la adición de vectores (figura 4) se conforma a esta definición, se basa en nuestra aceptación del siguiente hecho físico: mover horizontalmente la distancia a_1 y luego verticalmente la distancia a_2 después de mover horizontalmente la distancia b_1 y luego verticalmente la distancia b_2 es lo mismo (nos lleva al mismo punto $\mathbf{P}_2$) que mover horizontalmente la distancia a_1+b_1 después de mover verticalmente la distancia a_2+b_2.

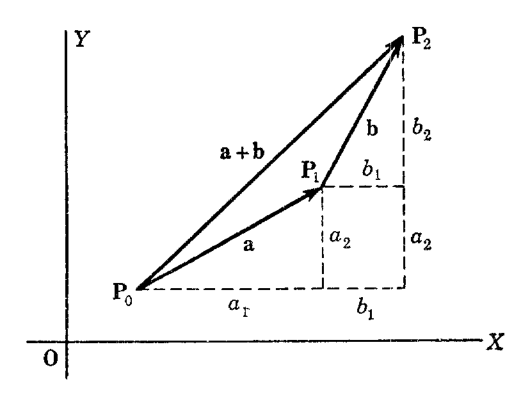


FIGURA 4

La operación de adición de dos vectores $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ puede ilustrarse también de la siguiente manera. Volvemos a dibujar la figura 4 omitiendo las rectas de construcción (las de rayas) y construimos, en la figura 5, el paralelogramo definido por las flechas $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Vemos por esta construcción que $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ es una diagonal del paralelogramo y que $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$. Esto ilustra la ley conmutativa A_2 del teorema 3.8.

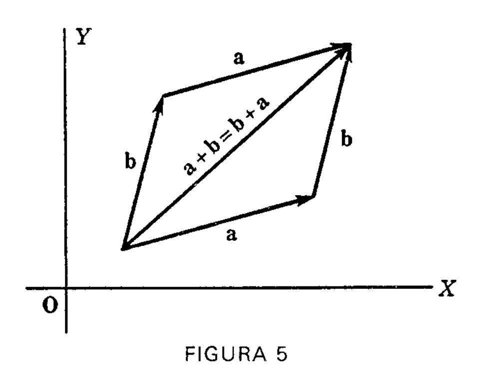


FIGURA 5

Por definición, si r es un número real y $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ es un vector, entonces

$$r\mathbf{a} = r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2).$$

Esta multiplicación de un vector por un número real se ilustra en la figura 6. Como los triángulos que aparecen en la construcción de $\mathbf{a}$ y $r\mathbf{a}$ son semejantes, es evidente que las flechas $\mathbf{a}$ y $r\mathbf{a}$ son paralelas. Denotemos la longitud del vector $\mathbf{a}$ por $|\mathbf{a}|$. Entonces, aceptando el teorema de Pitágoras,

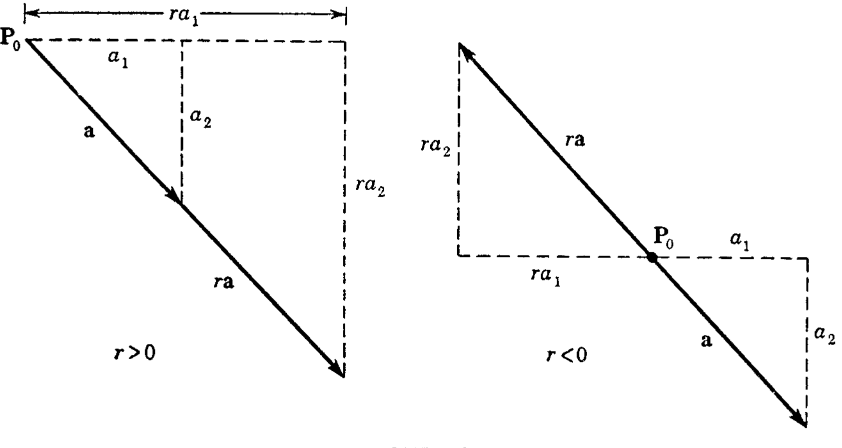


FIGURA 6

obtenemos

$$|r\mathbf{a}| = \sqrt{r^2 a_1{}^2 + r^2 a_2{}^2} = |r|\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2} = |r|\,|\mathbf{a}|.$$

Por tanto, $r\mathbf{a}$ está representado por una flecha cuya longitud es $|r|$ veces la longitud de **a**; si $r > 0$, entonces $r\mathbf{a}$ y **a** apuntan en la misma dirección; si $r < 0$, $r\mathbf{a}$ y **a** apuntan en direcciones opuestas.

La figura 7 ilustra la operación de sustracción $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}+(-\mathbf{b})$. Geométricamente, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ es la flecha desde el punto final de **b** al punto final de **a**. Esta construcción ilustra también que $\mathbf{b}+(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}$.

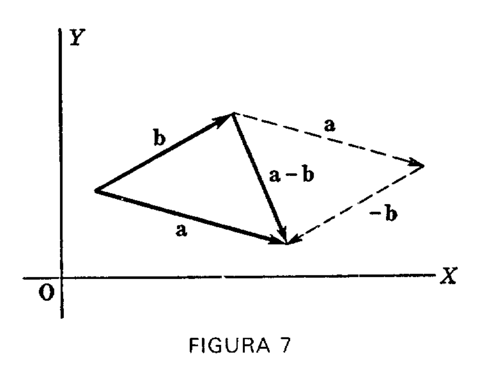


FIGURA 7

Hemos dicho que los elementos del espacio vectorial V_2 se llamarán "vectores" o "puntos". Estos elementos son pares ordenados de números reales y las operaciones sobre los elementos (definiciones 3.3 y 3.4, pág. 56) son operaciones sobre pares ordenados —el que sean llamados "puntos" o "vectores" es indiferente. Sin embargo, en las aplicaciones de los espacios vectoriales a la geometría y a la física ha de hacerse una distinción real entre puntos y vectores. Además, dependiendo de las aplicaciones, hay diferentes tipos de vectores: vectores "libres", vectores "ligados", vectores "deslizantes", etc. La naturaleza de todas estas distinciones no nos concierne por el momento. Estamos, sin embargo, interesados en la aplicación de los vectores a la geometría. En geometría, cuando llamamos a un elemento $(x, y)\in V_2$ un "punto" y escribimos $\mathbf{P} = (x, y)$, tenemos en mente la construcción geométrica de la sección 2: **P** es el punto (figura 8) cuyas coordenadas rectangulares son (x, y). Cuando llamamos a un elemento $\mathbf{a} = (a_1, a_2)\in V_2$ un vector, lo representamos con una flecha como describimos en esta

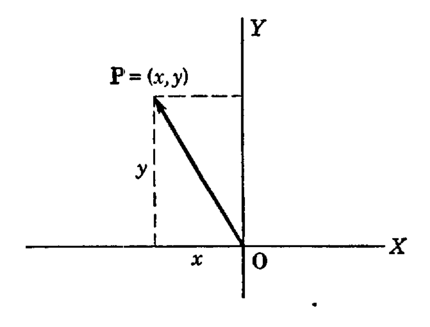


FIGURA 8

sección. Desde luego, el punto **P** = (x, y) tiene asociada a él la flecha de **O** a **P** (figura 8). A estas flechas trazadas desde el origen les llamamos "radio" vectores. Cada punto determina un radio vector, y, recíprocamente, la punta de cada radio vector localiza un punto, el punto terminal del vector. Si (x_0, y_0) y (a_1, a_2) son elementos dados del espacio vectorial V_2 y t es un número real, entonces

$$(x_0, y_0)+t(a_1, a_2) = (x_0+ta_1, y_0+ta_2)$$

es un elemento de V_2. En las aplicaciones a la geometría hablaremos del punto $\mathbf{P} = (x, y)$ definido por

$$\mathbf{P} = (x, y) = (x_0, y_0)+t(a_1, a_2) = (x_0+ta_1, y_0+ta_2).$$

P es entonces el punto cuyas coordenadas son $x = x_0+ta_1$ y $y = y_0+ta_2$; o, lo que es equivalente, decimos que **P** es el punto localizado por el radio vector (x_0+ta_1, y_0+ta_2). La descripción puede incluso ser más detallada.

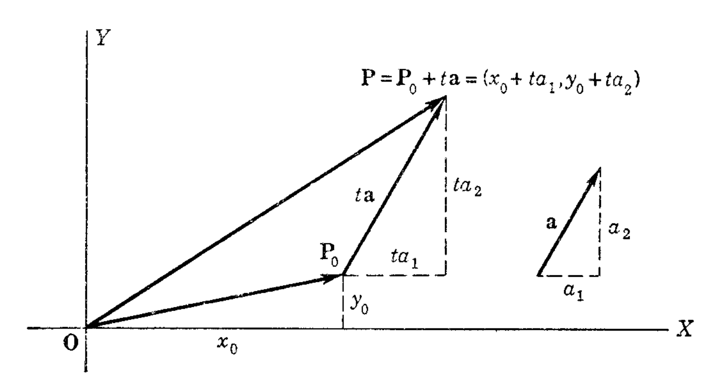


FIGURA 9

Por ejemplo, hablaremos del punto **P** definido por

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0+t\mathbf{a},$$

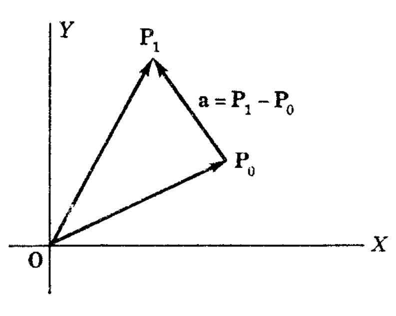


FIGURA 10

donde $\mathbf{P}_0$ es el punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$, **a** es el vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $t \in$ R. El punto **P** es el mismo de antes, pero el lenguaje usado ahora describe el modo en que visualizamos la localización del punto **P** (figura 9): $\mathbf{P}_0+t\mathbf{a}$ es "el radio vector obtenido añadiendo $t\mathbf{a}$ al radio vector correspondiente a $\mathbf{P}_0$, y **P** es el punto localizado por el radio vector $\mathbf{P}_0+t\mathbf{a}$". Otra ilustración es el lenguaje usado

para describir el vector $\mathbf{a} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$, donde $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ y $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ son puntos en V_2. Decimos que $\mathbf{a} = \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0$ es "el vector de $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}_1$". Este vector **a** expresado como la diferencia de dos puntos está entonces representado geométricamente por la flecha de $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}_1$ (figura 10).

Además de las aplicaciones de los vectores a la geometría hay numerosas aplicaciones de los vectores a la ciencia y a la ingeniería. En física, una cantidad vectorial se dice que es "una cantidad que tiene magnitud y dirección". La proposición "va 5 millas a SE" define una cantidad vectorial **a** y se llama "desplazamiento". El número 5 es la magnitud del desplazamiento **a** y SE es su dirección. (La palabra "vector" se deriva del latín —*vehere, vectus*, llevar.) Geométricamente, el desplazamiento **a** puede representarse con una flecha cuya longitud es de 5 unidades y que apunta en la dirección del desplazamiento (figura 11). Con ejes como se indica en la figura 11, $\mathbf{a} = (5/\sqrt{2}, -5/\sqrt{2})$. Otros ejemplos de cantidades vectoriales son la velocidad, la fuerza, la aceleración, y el momento.

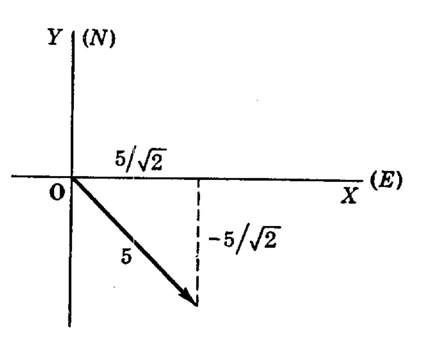


FIGURA 11

Hay un álgebra asociada con las cantidades vectoriales físicas y esta álgebra corresponde a nuestra álgebra vectorial. El físico habla de la "resultante" de dos vectores **a** y **b**; esto es lo que nosotros llamamos la "suma" $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ de los dos vectores. Si **a** es el desplazamiento 5 millas SE y **b**

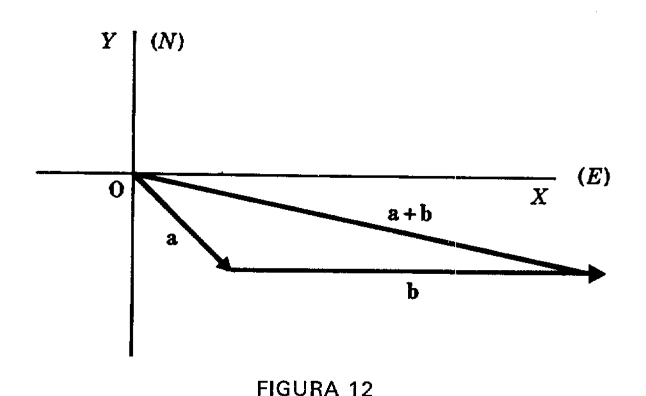


FIGURA 12

es el desplazamiento 10 millas E, la "resultante" o suma $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ de los dos desplazamientos se obtiene yendo 5 millas al SE y luego 10 millas al E

(figura 12):

$$\mathbf{a} = (5/\sqrt{2}, -5/\sqrt{2}), \ \mathbf{b} = (10{,}0)$$

y

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right) + (10, 0) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 10, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right).$$

"Una fuerza 5 veces una fuerza dada **F**" es una fuerza cuya dirección es la de **F** y cuya magnitud es 5 veces la magnitud de **F**. Esto corresponde a la multiplicación de un vector por un número real.

Problemas

1. Determínese gráficamente la suma y diferencia de los dos vectores que aparecen en la figura 13.

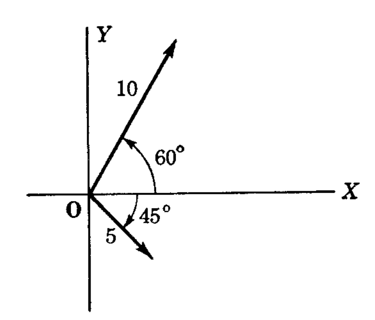


FIGURA 13

2. Constrúyase en cada uno de los siguientes casos el vector **a**:

a) $\mathbf{a} = (2, 5)+(3, 7)$
b) $\mathbf{a} = (3, 7)+(2, 5)$
c) $\mathbf{a} = (3, 6)+(-2, 1)$
d) $\mathbf{a} = (3, 6)-(-2, 1)$
e) $\mathbf{a} = (3, 6)+4(-2, 1)$
f) $(-6, 1)+\mathbf{a} = (2, 3)$.

3. Localícense los puntos $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{a}$ para $t = 0, \pm 1, \pm 2$, cuando

a) $\mathbf{P}_0 = (1, 2)$ y $\mathbf{a} = (-2, 1)$
b) $\mathbf{P}_0 = (1, 2)$ y $\mathbf{a} = (2, 4)$
c) $\mathbf{P}_0 = (-1, 0)$ y $\mathbf{a} = (2, 3)-\mathbf{P}_0$
d) $\mathbf{P}_0 = (-2, -3)$ y $\mathbf{a} = (4, 0)$.

Verifíquese gráficamente en cada caso que los puntos se encuentran sobre una recta.

4. Localícense los puntos $\mathbf{P} = (0, b)+x(1, m)$ para $x = 0, \pm 1, \pm 2$, cuando

a) $m = 1, \ b = 0$
b) $m = -1, \ b = 4$
c) $m = \frac{1}{2}, \ b = 3$
d) $m = -2, \ b = -1$
e) $m = 0, \ b = 2$.

Verifíquese gráficamente en cada caso que los puntos se encuentran sobre una recta.

5. Ilústrese gráficamente la ley asociativa $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

6. Un aeroplano se dirige al NE a 360 kilómetros por hora (velocidad respecto al aire). El viento está soplando exactamente hacia el sur a 60 kilómetros por hora. La velocidad $\mathbf{v}_g$ del aeroplano relativa al suelo es la suma (resultante) de los dos vectores mencionados. Determínese $\mathbf{v}_g$, *a*) gráficamente, *b*) analíticamente.

7. Ilústrese gráficamente la suma $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_4$.

8. ¿Cuál es el significado geométrico de $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$?

5. PARALELISMO DE VECTORES

Hasta el momento, hemos definido el espacio vectorial bidimensional V_2, hemos establecido las propiedades fundamentales del álgebra de vectores y hemos explicado la manera en que los vectores pueden representarse con flechas. Una flecha es el símbolo común que se usa para indicar una dirección. Si $r > 0$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces nuestra idea intuitiva de dirección es que $\mathbf{a}$ y $r\mathbf{a}$

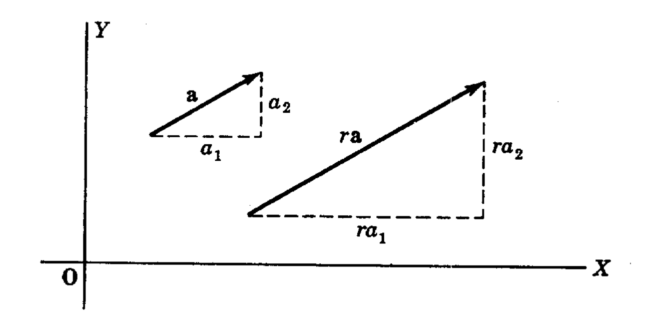


FIGURA 14. $(r > 0)$

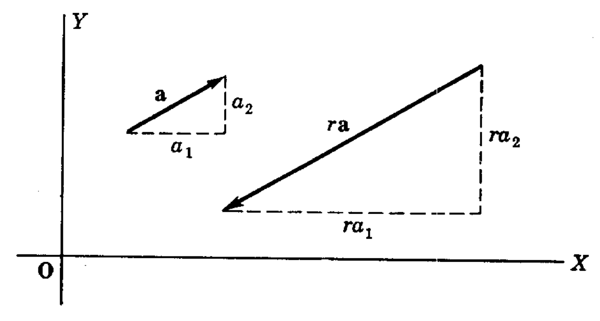


FIGURA 15. $(r < 0)$

apuntan en la misma dirección (figura 14). La dirección indicada por una flecha no depende de la longitud de la flecha. Si $r < 0$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, decimos que $\mathbf{a}$ y $r\mathbf{a}$ apuntan en direcciones "opuestas" (figura 15). Son éstas las ideas que están detrás de la definición de dirección de un vector. Una vez que hemos definido la dirección podemos definir el paralelismo. Los vectores son paralelos si están en la misma dirección o en direcciones opuestas. Teniendo presentes estas ideas intuitivas, pasamos a formular en forma precisa nuestras definiciones.

5.1 Definición. *Dos vectores distintos de cero se dice que están* ***en la misma dirección*** *si uno de ellos es el resultado de multiplicar el otro por un número real positivo. Dos vectores distintos de cero se dice que están* ***en direcciones opuestas*** *si uno de ellos es el resultado de multiplicar el otro por un número real negativo.*

Nota. Supongamos que un vector $\mathbf{a}$ es el resultado de multiplicar un vector $\mathbf{b}$ por un número real positivo r; es decir, $\mathbf{a} = r\mathbf{b}$. Esto implica que $\mathbf{b} = r^{-1}\mathbf{a}$. El vector $\mathbf{b}$ es también el resultado de multiplicar el $\mathbf{a}$ por un número real positivo. Por tanto, si dos vectores están en la misma dirección, entonces cada uno de ellos es el resultado de multiplicar el otro por un número real positivo.

Hemos sugerido anteriormente que podíamos definir que dos vectores distintos de cero eran paralelos si estaban en la misma dirección o en direcciones opuestas. Resulta conveniente definir la noción de paralelismo no sólo para vectores distintos de cero sino también para vectores cero, por lo que extendemos la definición propuesta conviniendo que el vector cero es paralelo a todos los vectores. Repetimos que la única explicación de este convenio es que resulta conveniente, lo que el lector podrá apreciar sólo por experiencia. Es conveniente, por ejemplo, cuando hablamos de vectores no paralelos (es decir, de vectores que no son paralelos) saber inmediatamente que los vectores son distintos de cero.

5.2 Definición. *Se dice que dos vectores son* ***paralelos*** *si uno de ellos es el resultado de multiplicar el otro por un número real.*

Nota. Como $\mathbf{0} = 0\mathbf{a}$ para todo $\mathbf{a} \in V_2$, el vector cero es paralelo a todos los vectores. Si dos vectores distintos de cero son paralelos, entonces uno de ellos es el producto del otro por un número real distinto de cero. Por tanto, los vectores paralelos distintos de cero son de igual dirección o de direcciones opuestas.

5.3 Ejemplo. ¿Son paralelos los vectores $(2, 1)$ y $(-6, -3)$?

SOLUCIÓN. Como $(-6, -3) = -3(2, 1)$, los vectores son paralelos y de direcciones opuestas (figura 16).

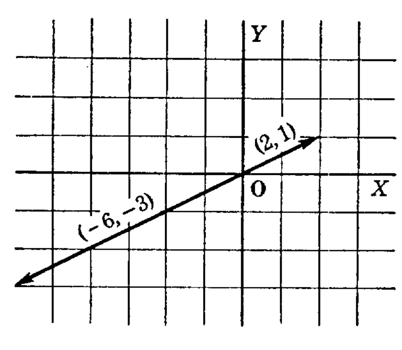


FIGURA 16

Un resultado elemental al que tendremos ocasión de referirnos con suma frecuencia es:

5.4 Lema. *Si* **a** *es un vector distinto de cero, entonces* **a** *y* **b** *paralelos implica* **b** $=$ *r***a** *para algún número real r.*

PRUEBA. Nuestras hipótesis son que **a** y **b** son paralelos y que $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Luego o $\mathbf{b} = r\mathbf{a}$ para algún $r \in \mathrm{R}$ o $\mathbf{a} = s\mathbf{b}$ para algún $s \in \mathrm{R}$. Como $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} = s\mathbf{b}$ implica $s \neq 0$, lo que implica $\mathbf{b} = s^{-1}\mathbf{a}$. Es decir, también en este caso **b** es el producto de **a** por un número real, lo que completa la prueba.

5.5 Ejemplo. ¿Son paralelos los vectores (1, 4) y (3, 8)?

SOLUCIÓN. Si los vectores son paralelos, entonces, de acuerdo con el lema 5.4 hay un número real r tal que

$$(3, 8) = r(1, 4).$$

Pero esto implica $r = 3$ y $4r = 8$, y no hay ningún número real con esta propiedad. Por tanto, los vectores no son paralelos.

Una propiedad básica del paralelismo es que vectores paralelos a un mismo vector distinto de cero son paralelos entre sí.

5.6 Teorema. *Si* $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ *y* **a** *y* **b** *son paralelos a* **c**, *entonces* **a** *y* **b** *son paralelos.*

PRUEBA. Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, entonces **b** es paralelo a todos los vectores, y **a** y **b** son paralelos. Si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, entonces, como $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, tenemos según el lema 5.4 que

$$\mathbf{a} = r\mathbf{c} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = s\mathbf{b}.$$

Luego $\mathbf{a} = (rs)\mathbf{b}$, y **a** y **b** son paralelos.

Problemas

1. ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores tienen la misma dirección? ¿Cuáles son paralelos?

a) (1, 1), (2, 2) *b*) (4, 7), (12, 20) *c*) (6, 2), (−3, −1)
d) (6, 2), (0, 0) *e*) (−5, 10), (3, −6) *f*) (3, 9), (4, 6).

2. Determínense todos los vectores de la forma $(1, m)$ paralelos a:

a) (3, 6) *b*) (2, −5) *c*) (−1, 6)
d) (−3, −7) *e*) (1, 3)−(2, 5) *f*) (0, 2).

3. Pruébese, para vectores distintos de cero, que si $\mathbf{a}$ es paralelo a $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$ es paralelo a $\mathbf{b}'$, y $\mathbf{a}$ es paralelo a $\mathbf{b}$, entonces $\mathbf{a}'$ es paralelo a $\mathbf{b}'$. Ilústrese este resultado gráficamente.

4. Demuéstrese que si $\mathbf{d} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$ y $\mathbf{b}$ es paralelo a $\mathbf{a}$, entonces $\mathbf{d}$ es paralelo a $\mathbf{a}$ si y sólo si $\mathbf{c}$ es paralelo a $\mathbf{a}$. Ilústrese este resultado gráficamente.

6. ORTOGONALIDAD DE VECTORES

De acuerdo con nuestra imagen geométrica de un vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, las componentes a_1 y a_2 del vector son las longitudes "dirigidas" de los lados de un triángulo rectángulo (figura 17). La longitud de la flecha que representa a $\mathbf{a}$ es la hipotenusa del triángulo rectángulo. Nuestra geometría tiene que ser euclidiana y tiene que estar de acuerdo con esta imagen geométrica. En la geometría euclidiana, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados (teorema de Pitágoras). Estas consideraciones determinan la definición que ha de darse de "longitud" de un vector.

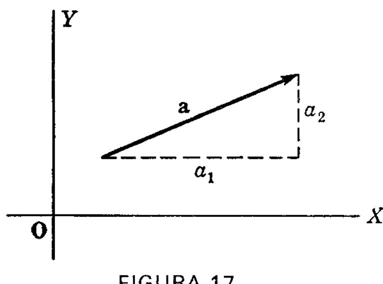


FIGURA 17

6.1 Definición. *La* ***longitud*** $|\mathbf{a}|$ (*léase "valor absoluto de* $\mathbf{a}$" *o "longitud de* $\mathbf{a}$") ***de un vector*** $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *es*

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}.$$

6.2 Teorema. ***Las propiedades fundamentales de la longitud de un vector son:***

Para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_2$ *y todo* $r \in R$,

6.3 $|\mathbf{a}| \geqslant 0$; $|\mathbf{a}| = 0$ *implica* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

6.4 $$|r\mathbf{a}| = |r|\,|\mathbf{a}|.$$

6.5 $$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}| \text{ (Desigualdad del triángulo.)}$$

PRUEBA DE 6.3. Por definición $|\mathbf{a}| \geqslant 0$. Pero $|\mathbf{a}|^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2$, de donde si $a_1 \neq 0$ o $a_2 \neq 0$, entonces $|\mathbf{a}| \neq 0$. Por tanto, $|\mathbf{a}| = 0$ implica $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$, de modo que $\mathbf{a} = (a_1, a_2) = (0, 0) = \mathbf{0}$.

PRUEBA DE 6.4.

$$\begin{aligned} |r\mathbf{a}| &= |(ra_1, ra_2)| = \sqrt{(ra_1)^2+(ra_2)^2} \\ &= \sqrt{r^2}\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2} \\ &= \sqrt{r^2}\,|\mathbf{a}| = |r|\,|\mathbf{a}|. \end{aligned}$$

Nota. En el capítulo 1 dijimos que supondríamos, para cada número real no negativo x, la existencia de un número no negativo único $\sqrt{x}$ con la propiedad de que $(\sqrt{x})^2 = x$. Esto lo tendremos que probar más adelante. Ahora bien, si y es también un número real no negativo, entonces también lo es xy. De donde $\sqrt{xy}$ es un número no negativo único con la propiedad de que $(\sqrt{xy})^2 = xy$; como

$$(\sqrt{x}\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 = xy,$$

se sigue de ello que $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$, para todo $x \geqslant 0$ y $y \geqslant 0$. Es ésta la propiedad de la raíz cuadrada que se usó en la prueba de 6.4.

La prueba de la desigualdad del triángulo está dada en la sección 8. En ese momento no será difícil demostrar que si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ no están en la misma dirección, entonces $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| < |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$). Esta desigualdad corresponde al teorema geométrico: *la longitud de un lado de un triángulo es siempre menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados* (figura 18).

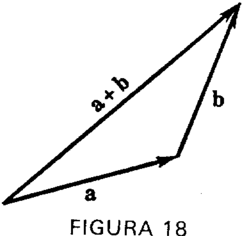


FIGURA 18

La notación para la longitud de un vector es la misma que la usada para el valor absoluto de un número real. Lo que es mas significativo es el hecho de que las propiedades fundamentales de los dos (longitud de un vector y valor absoluto de un número real) son las mismas. Compárense 6.3, 6.4, y 6.5 con las propiedades fundamentales del valor absoluto dadas en la sección 8, capítulo 1 (pág. 40).

Volviendo a la imagen geométrica de los vectores, deseamos motivar la definición que estamos a punto de dar. La palabra "ortogonal" significa "en ángulo recto" y es sinónima de "perpendicular". Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ los lados de un paralelogramo (figura 19*a*). Los vectores $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ son las diagonales del paralelogramo. Expresada geométricamente, la definición de ortogonalidad nos dirá: $\mathbf{a}$ es ortogonal a $\mathbf{b}$ si las diagonales del paralelo-

gramo formado por **a** y **b** son de igual longitud, es decir, si el paralelogramo es un rectángulo.

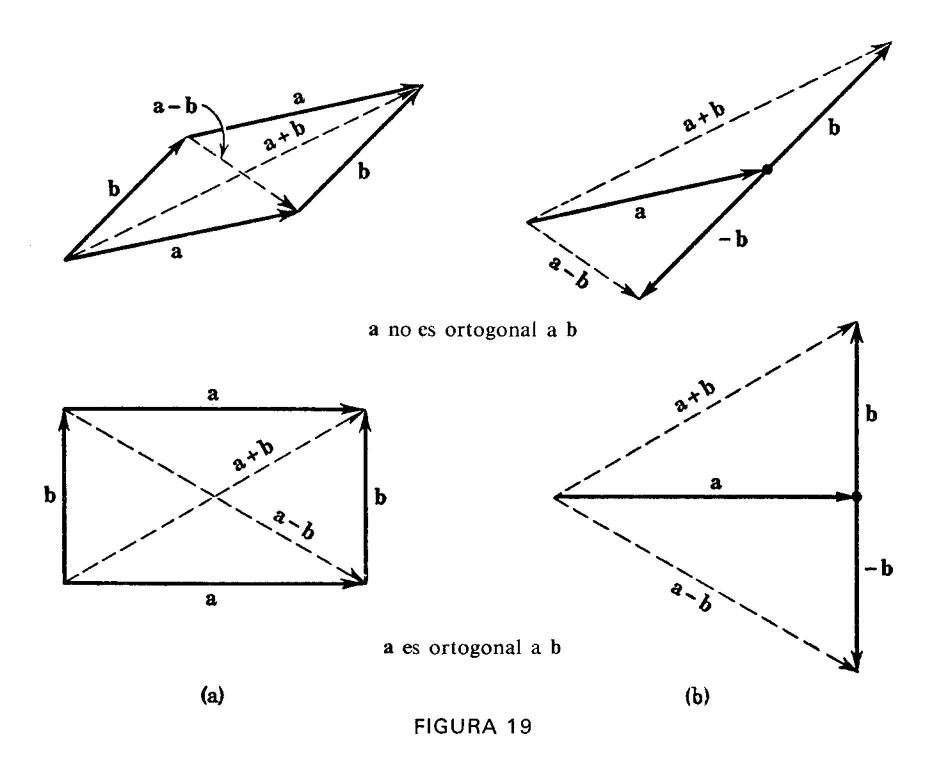


FIGURA 19

6.6 Definición. *Un vector* **a** *se dice que* ***es ortogonal a*** *un vector* **b** *si*

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|.$$

La figura 19*b* es otra interpretación geométrica de la definición 6.6. Si **a** es ortogonal a **b**, entonces **a** es el bisector perpendicular (la mediatriz) del segmento rectilíneo formado por **b** y $-\mathbf{b}$. Es esto el fundamento de una construcción geométrica con regla y compás de un vector ortogonal a otro.

Como $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{b}+\mathbf{a}|$ y $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|$, se sigue que **a** es ortogonal a **b**, implica **b** ortogonal a **a**. Por esta razón se usa con frecuencia la expresión "mutuamente ortogonales". Algunas veces decimos, simplemente, "**a** y **b** son ortogonales" queriendo expresar con ello que "**a** es ortogonal a **b**".

6.7 Ejemplo. ¿Son ortogonales los vectores $\mathbf{a} = (a, 0)$ y $\mathbf{b} = (0, \mathbf{b})$?

Solución

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |(a, b)| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = |(a, -b)| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|,$$

y, por tanto, los vectores son ortogonales. La definición de ortogonalidad está así de acuerdo con nuestra imagen geométrica de los ejes de coordenadas —todo vector horizontal es ortogonal a todo vector vertical.

6.8 Ejemplo. ¿Son los vectores (1, 3) y (3, −1) ortogonales?

Solución

$$|(1, 3)+(3, -1)| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$$

$$|(1, 3)-(3, -1)| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = \sqrt{20}.$$

Sí, son ortogonales.

Problemas

1. Si $\mathbf{a} = (1, 4)$ y $\mathbf{b} = (-2, 3)$, calcúlense las longitudes de:

a) $\mathbf{a}$ *b*) $\mathbf{b}$ *c*) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *d*) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$
e) $3\mathbf{a}$ *f*) $-3(\mathbf{a}-\mathbf{b})$ *g*) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$ *h*) $3\mathbf{a}-\frac{1}{2}\mathbf{b}$
i) $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ *j*) $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$.

2. Demuéstrese que: *a*) $|-\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$. *b*) Para todo vector $\mathbf{a}$ distinto de cero, $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ es un vector unitario (es decir, un vector de longitud igual a la unidad).

3. Compruébese tanto gráfica como analíticamente la ortogonalidad de los siguientes pares de vectores:

a) (1, 5), (−4, 1) *b*) (2, 3), (9, −6) *c*) (0, 0), (8, −7)
d) $(1, -\frac{1}{3})$, (2, 6) *e*) (a_1, a_2), $(-a_2, a_1)$ *f*) (5, 7), (−4, 3).

4. ¿Qué puede decirse de un vector cuando sabemos que es ortogonal a sí mismo?

5. Dado un vector **b**, dígase cómo construir con regla y compás un vector ortogonal al **b**.

7. EL PRODUCTO ESCALAR

Nuestra definición de ortogonalidad de un par de vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ es equivalente a decir que la diferencia de los cuadrados de las longitudes de las diagonales $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ es cero; es decir, que

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 0.$$

Como

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2$$
$$= a_1{}^2+2a_1b_1+b_1{}^2+a_2{}^2+2a_2b_2+b_2{}^2$$

y

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2$$
$$= a_1{}^2-2a_1b_1+b_1{}^2+a_2{}^2-2a_2b_2+b_2{}^2,$$

obtenemos

7.1 $$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 4(a_1b_1+a_2b_2).$$

La ortogonalidad de los dos vectores **a** y **b** es, por tanto, equivalente a la anulación de $(a_1b_1+a_2b_2)$. Esta cantidad $(a_1b_1+a_2b_2)$ es de considerable importancia en álgebra, geometría y física, y es por ello que se le ha dado un nombre especial.

7.2 Definición. *El **producto escalar** (interior)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ *—léase "**a** punto **b**"— de dos vectores* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ *y* $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ *está definido por*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1+a_2b_2.$$

Nótese que el producto escalar de dos vectores *no* es un vector; *es un número real.* En física, cantidades tales como la longitud, el trabajo, la masa, la temperatura, etc., se llaman cantidades "escalares". Tienen magnitud, pero ninguna dirección y quedan especificadas (medidas) por números reales. En matemáticas se usa con frecuencia el término producto "interior". Otro nombre para el producto escalar —sugerido por la notación— es el de "producto punto".

El resultado dado en 7.1 para la diferencia de las longitudes de las diagonales de los paralelogramos cuyos lados están determinados por **a** y **b** (figura 19*a*) puede escribirse ahora:

7.3 $$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b});$$

y podemos enunciar

7.4 Teorema. *Dos vectores* **a** *y* **b** *son ortogonales si y sólo si* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

7.5 Ejemplo. Aplíquese este criterio de ortogonalidad a los ejemplos 6.7 y 6.8.

SOLUCIÓN DE 6.7.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a, 0)\cdot(0, b) = a\cdot 0+0\cdot b = 0.$$

Por tanto, los vectores son ortogonales.

SOLUCIÓN DE 6.8

$$(1, 3)\cdot(3, -1) = 1\cdot 3+3(-1) = 0.$$

Por tanto, los vectores son ortogonales.

7.6 Ejemplo. ¿Son ortogonales los vectores $(1, 5)$ y $(-4, \frac{9}{10})$?

SOLUCIÓN. $(1, 5)\,(-4, \frac{9}{10}) = -4+\frac{45}{10} = \frac{1}{2}$. Como el producto escalar de los dos vectores no es cero, los vectores no son ortogonales.

Las propiedades fundamentales del producto escalar son:

7.7 $$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$$

7.8 $$(r\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = r(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

7.9 $$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_2$$

7.10 $$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geqslant 0;\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0 \textit{ implica } \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a_1{}^2+a_2{}^2 = |\mathbf{a}|^2$, la propiedad 7.10 es una reformulación de la propiedad 6.3 de $|\mathbf{a}|$. Las otras tres propiedades son simples consecuencias de las propiedades de los números reales y su verificación se deja como ejercicio para el estudiante (problema 3).

Ahora que hemos definido la longitud y la ortogonalidad de vectores podemos hablar de un triángulo "rectángulo". Un par de vectores **a** y **b** y su suma **a** + **b** pueden representar los lados de un triángulo. Si **a** es ortogonal a **b**, decimos que el triángulo determinado por **a** y **b** es un triángulo *rectángulo* (figura 20). El vector **a** + **b** es la *hipotenusa* del triángulo rectángulo. Tiene, pues, sentido preguntarnos si el teorema de Pitágoras se verifica en nuestro modelo analítico. Si no se verifica, habremos fallado en nuestro intento de construir un modelo euclidiano. Mostraremos ahora que las definiciones de longitud y ortogonalidad implican el teorema de Pitágoras.

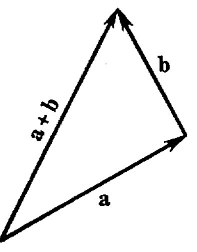


FIGURA 20

7.11 Teorema. **a** *es ortogonal a* **b** *si y sólo si*

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2.$$

PRUEBA. Por las propiedades fundamentales del producto escalar,

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\\ &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\\ &= |\mathbf{a}|^2+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2.\end{aligned}$$

De donde vemos que $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2$ si y sólo si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$; es decir, si y sólo si **a** es ortogonal a **b**.

El resto de esta sección está dedicado a ilustrar la aplicación del concepto de vector a la geometría, y podremos ver la simplicidad y potencia del método vectorial.

7.12 Teorema. *Sea* **a** *un vector distinto de cero. Si* **a** *y* **b** *son paralelos y* **a** *es ortogonal a* **n**, *entonces* **b** *es ortogonal a* **n**.

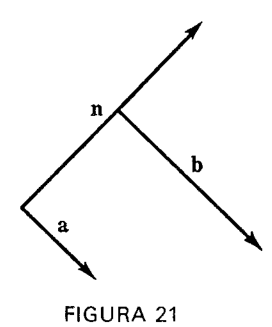


FIGURA 21

PRUEBA. (Figura 21.) Como **a** es un vector distinto de cero, **a** y **b** paralelos implica $\mathbf{b} = r\mathbf{a}$ para algún $r \in \mathrm{R}$. Usando 7.8, obtenemos

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = (r\mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = r(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}).$$

Nuestra otra hipótesis es que **a** es ortogonal a **n**. Luego $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = 0$, y vemos que, según la anterior ecuación, esto implica $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = 0$. Luego b es ortogonal a **n**.

Probamos a continuación el recíproco del teorema 7.12: Vectores ortogonales al mismo vector no nulo son paralelos. En preparación para esto probamos.

7.13 Lema. *Sea* $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ *un vector distinto de cero. Si* **a** *es ortogonal a* **n**, *entonces* $\mathbf{a} = r(-n_2, n_1)$ *para algún* $r \in \mathrm{R}$.

PRUEBA. [Geométricamente, el vector $(-n_2, n_1)$ es el vector que se obtiene por rotación de 90° de **n** en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 22).]

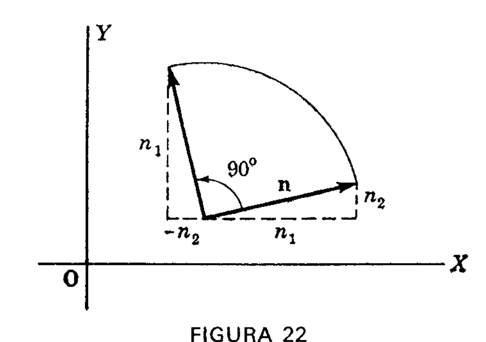


FIGURA 22

Como **a** es ortogonal a **n**, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = 0$; es decir, si escribimos $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = n_1 a_1 + n_2 a_2 = 0.$$

Si $n_1 \neq 0$, entonces $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = 0$ implica $a_1 = -\dfrac{n_2}{n_1} a_2$ y, de aquí,

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) = \left(-\frac{n_2}{n_1} a_2, a_2\right) = \frac{a_2}{n_1}(-n_2, n_1).$$

Si $n_1 = 0$, entonces $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = n_2 a_2$. Como $n_1 = 0$ y $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, se sigue que $n_2 \neq 0$. Por tanto, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} = n_2 a_2 = 0$ implica $a_2 = 0$. Luego $\mathbf{n} = (0, n_2)$ y $\mathbf{a} = (a_1, 0) = -\dfrac{a_1}{n_2}(-n_2, 0)$. Esto completa la prueba.

7.14 Teorema. *Vectores ortogonales al mismo vector no nulo, son paralelos.*

PRUEBA. (Figura 23.) Supongamos que los vectores **a** y **b** son ortogonales al vector distinto de cero $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$. El lema 7.13 nos dice que entonces

$$\mathbf{a} = r(-n_2, n_1) \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = s(-n_2, n_1)$$

para algúnos $r, s \in \mathrm{R}$. De aquí se deduce que **a** y **b** son paralelos al mismo vector no nulo $(-n_2, n_1)$ y son, por tanto, paralelos entre sí.

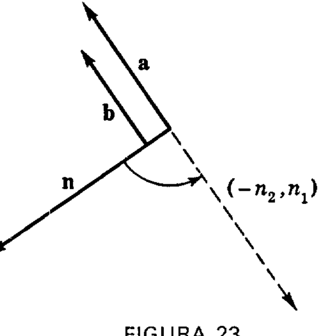


FIGURA 23

En el anterior teorema, el vector $(-n_2, n_1)$ era simplemente un conveniente vector ortogonal al $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$. Introducimos un símbolo para este vector. Para cada vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, definimos un vector correspondiente, el vector $\mathbf{a}^\perp$ —léase "**a** perpendicular"— por $\mathbf{a}^\perp = (-a_2, a_1)$. Como se ilustra en la figura 24, $\mathbf{a}^\perp$ es el resultado de aplicar un giro de 90° en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj al vector **a**. Respecto

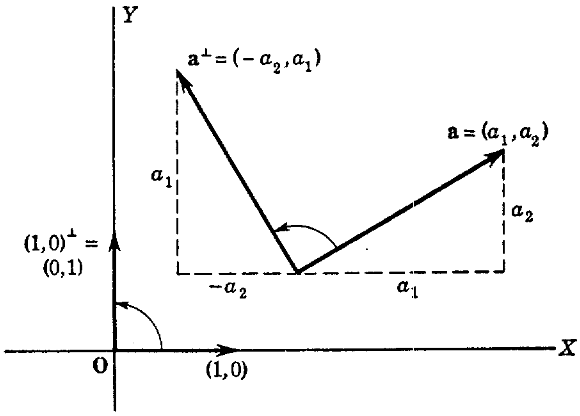


FIGURA 24

a los ejes de coordenadas de nuestra representación geométrica, sentido contrario a la de las manecillas del reloj es la de rotación mostrada en la figura 24 de la dirección positiva del eje X a la dirección positiva del eje Y. Por ejemplo, $(1, 0)^{\perp} = (0, 1)$.

El siguiente resultado es un criterio útil y conveniente de paralelismo entre vectores. Nos dice que **a** y **b** son paralelos si y sólo si **b** es ortogonal a $\mathbf{a}^{\perp}$.

7.15 Teorema. *Los vectores* $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ *son paralelos si y sólo si*

$$\mathbf{a}^{\perp} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

PRUEBA. Si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{a}^{\perp} = \mathbf{0}$, y el teorema es cierto aunque trivial. Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{a}^{\perp} \neq \mathbf{0}$, y $\mathbf{a}^{\perp} \cdot \mathbf{b} = 0$ implica que **a** y **b** son ortogonales al mismo vector distinto de cero $\mathbf{a}^{\perp}$. De donde, según el teorema 7.14, **a** y **b** son paralelos. Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ y **a** y **b** son paralelos, entonces —como **a** es ortogonal a $\mathbf{a}^{\perp}$— se sigue del teorema 7.12 que **b** es ortogonal a $\mathbf{a}^{\perp}$, y, por tanto, que $\mathbf{a}^{\perp} \cdot \mathbf{b} = 0$. Esto completa la prueba.

7.16 Ejemplo. Resuélvanse los ejemplos 5.3 y 5.5 (pág. 68) mediante el uso del teorema 7.15.

SOLUCIÓN DE 5.3. Como

$$(-1, 2) \cdot (-6, -3) = 6 - 6 = 0,$$

los vectores (2, 1) y (−6, −3) son parelelos.

SOLUCIÓN DE 5.5. Como

$$(-4, 1) \cdot (3, 8) = -12 + 8 = -4,$$

los vectores (1, 4) y (3, 8) no son paralelos.

Problemas

1. ¿Son ortogonales los siguientes vectores?

a) ¿(2, 4) y (2, 1)? *b*) ¿(33, 48) y (−5, 4)?
c) ¿$(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ y (−8, −4)? *d*) ¿(−18, 3) y (2, 12)?

2. Determínense todos los vectores ortogonales a **a** que tienen la misma longitud que **a**.

a) $\mathbf{a} = (1, 0)$ *b*) $\mathbf{a} = (1, 1)$ *c*) $\mathbf{a} = (-4, 5)$.

3. Pruébese que el producto escalar satisface 7.7, 7.8 y 7.9.

4. Sea $\mathbf{a} = (5.2)$, $\mathbf{b}_1 = (-3, 4)$ y $\mathbf{b}_2 = (4, 7)$. Calcúlense

a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_1$ *b*) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_2$ *c*) $(2\mathbf{a}+3\mathbf{b}_1)\cdot\mathbf{b}_2$

d) $(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)\cdot(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)$ *e*) $(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)\cdot(\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2)$.

5. Demuéstrese que:

a) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2$

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2-|\mathbf{b}|^2$

c) $|\mathbf{a}+t\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2+2t\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+t^2|\mathbf{b}|^2$.

6. Pruébese: Si **a** y **b** son vectores no nulos, entonces **a** ortogonal a **b** implica **a** no paralelo a **b**.

7. ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores son paralelos?

a) $(2, 4)$ y $(-\frac{1}{2}, -1)$ *b*) $(-3, 1)$ y $(6, -2)$

c) $(2, 5)$ y $(-5, 2)$ *d*) $(8, 13)$, $(9, 14)$.

8. Los lados de un triángulo son los vectores **a**, **b**, y $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Si $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 4$, y $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \frac{2}{3}$, encuéntrese la longitud del lado $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

9. Pruébese: La suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados del paralelogramo.

10. Demuéstrese que:

a) $(\mathbf{a}^\perp)^\perp = -\mathbf{a}$ *b*) $\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b}^\perp = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

c) $\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b} = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^\perp$ *d*) $|\mathbf{a}^\perp| = |\mathbf{a}|$

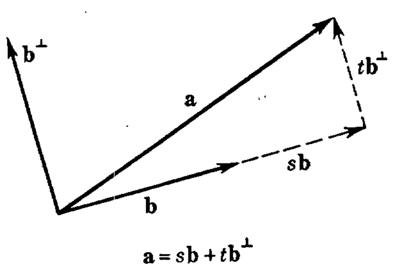
e) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^\perp = \mathbf{a}^\perp+\mathbf{b}^\perp$

f) Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $s\mathbf{a}+t\mathbf{a}^\perp = \mathbf{0}$ implica $s = 0$ y $t = 0$.

11. Resuélvase el problema 4 de la sección 5 usando el teorema 7.15.

8. PROYECCIÓN ORTOGONAL. COMPONENTES

Esta sección podría titularse con toda propiedad "el significado geométrico del producto escalar". Resolvemos primero un sencillo problema algebraico por medio del producto escalar, y relacionamos luego esta solución con los conceptos geométricos de "proyección ortogonal" y "componente". Estos conceptos son de importancia tanto en geometría como en física, y el producto escalar nos da un procedimiento sencillo para calcularlos.



$\mathbf{a} = s\mathbf{b}+t\mathbf{b}^\perp$

FIGURA 25

Si $\mathbf{a} = s\mathbf{b}+t\mathbf{b}^\perp$ para algunos números reales s y t, decimos que **a** es una *combinación lineal* de **b** y $\mathbf{b}^\perp$. Esto

geométricamente significa ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) que podemos construir un triángulo con hipotenusa $\mathbf{a}$ y lados paralelos a $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}^{\perp}$ (figura 25). Mostraremos ahora que, dado un vector no nulo cualquiera $\mathbf{b}$, todo vector $\mathbf{a}$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}^{\perp}$.

8.1 Teorema. *Si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, entonces para cada vector $\mathbf{a}$ de V_2 hay números únicos s y t tales que*

$$\mathbf{a} = s\mathbf{b} + t\mathbf{b}^{\perp}.$$

PRUEBA. Supongamos que existen números s y t tales que

$$\mathbf{a} = s\mathbf{b} + t\mathbf{b}^{\perp}.$$

Entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (s\mathbf{b} + t\mathbf{b}^{\perp}) \cdot \mathbf{b} = s\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$$

y

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{\perp} = (s\mathbf{b} + t\mathbf{b}^{\perp}) \cdot \mathbf{b}^{\perp} = t\mathbf{b}^{\perp} \cdot \mathbf{b}^{\perp} = t\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}.$$

De donde, si existen tales números son únicos, y

8.2 $$s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/|\mathbf{b}|^2 \quad \text{y} \quad t = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{\perp}/|\mathbf{b}|^2.$$

Verificamos ahora que

8.3 $$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{\perp}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}^{\perp}$$

para todos los vectores $\mathbf{a}$ y todos los vectores no nulos $\mathbf{b}$.

$$\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^{\perp}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}^{\perp} = \frac{1}{|\mathbf{b}|^2}\{[a_1 b_1 + a_2 b_2](b_1, b_2) + [-a_1 b_2 + a_2 b_1](-b_2, b_1)\}$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{b}|^2}(a_1[b_1{}^2 + b_2{}^2], \ a_2[b_1{}^2 + b_2{}^2])$$

$$= (a_1, a_2) = \mathbf{a}.$$

Esto completa la prueba.

8.4 Ejemplo. Exprésese $\mathbf{a} = (1, 3)$ como una combinación lineal de $\mathbf{b} = (1, 1)$ y $\mathbf{b}^{\perp}$.

SOLUCIÓN. (Figura 26.) Sabemos que podemos expresar $\mathbf{a}$ como una combinación lineal de $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}^{\perp}$.

$$(1, 3) = s(1, 1) + t(-1, 1).$$

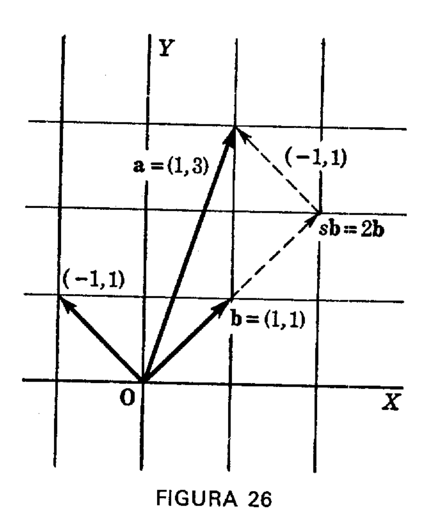


FIGURA 26

Por consiguiente,

$$(1, 1)\cdot(1, 3) = s(1, 1)\cdot(1, 1) \quad \text{y} \quad s = \tfrac{4}{2} = 2$$
$$(-1, 1)\cdot(1, 3) = t(-1, 1)\cdot(-1, 1) \quad \text{y} \quad t = \tfrac{2}{2} = 1.$$

COMPROBACIÓN. $2(1, 1)+(-1, 1) = (1, 3)$.

8.5 Ejemplo. Exprésese $\mathbf{a} = (-2, 1)$ como una combinación lineal de $\mathbf{b} = (1, 1)$ y $\mathbf{b}^{\perp}$.

SOLUCIÓN. (Figura 27.)

$$(-2, 1) = s(1, 1)+t(-1, 1)$$

$$s = \frac{(1, 1)\cdot(-2, 1)}{(1, 1)\cdot(1, 1)} = -\frac{1}{2}$$

$$t = \frac{(-1, 1)\cdot(-2, 1)}{(-1, 1)\cdot(-1, 1)} = \frac{3}{2}.$$

La descomposición de un vector **a** en dos vectores, paralelo a **b** uno y perpendicular a **b** el otro, se obtiene geométricamente por proyección ortogonal. El vector $s\mathbf{b}$ (la base del triángulo en la figura 25) se llama "proyección ortogonal de **a** sobre **b**". Según la ecuación 8.2, $s\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\,\mathbf{b}$.

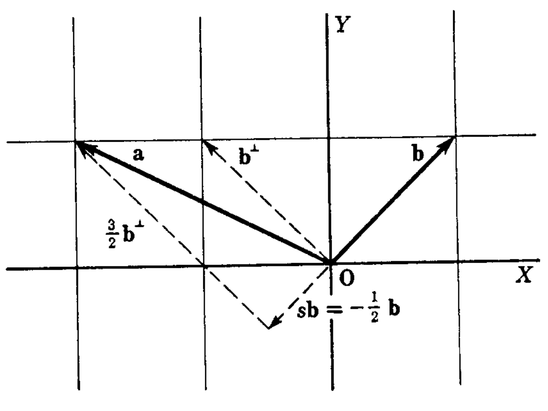


FIGURA 27

8.6 Definición. *Sean* **a** *y* **b** ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) *vectores. La* ***proyección ortogonal*** *de* **a** *sobre* **b** *—denotada por* $\mathbf{Proy_b\, a}$*— es el vector*

$$\mathbf{Proy_b\, a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\,\mathbf{b}\,.$$

La descomposición (ecuación 8.3) de **a** en un vector paralelo y uno perpendicular a **b** puede expresarse ahora (figura 28) por

8.7 $$\mathbf{a} = \mathbf{Proy_b\, a} + \mathbf{Proy_b}^{\perp}\,\mathbf{a}\,.$$

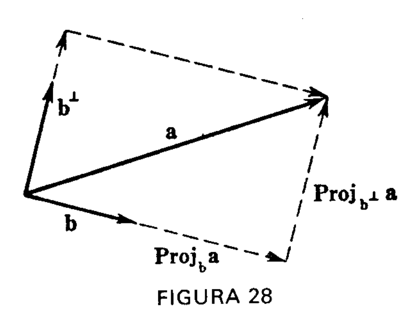


FIGURA 28

8.8 Definición. *El número* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ *se llama* ***componente de*** **a** ***en la dirección de*** **b** ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) *y se denota por* $\mathrm{Comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$; *es decir*

$$\mathrm{Comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/|\mathbf{b}|\,.$$

La relación entre proyección (*un vector*) y componente (*un número*) es

8.9 $$\mathbf{Proy_b\, a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\,\mathbf{b} = (\mathrm{Comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a})\,\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\,.$$

El vector $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ es un vector unitario (un vector de longitud igual a la unidad) en la dirección de $\mathbf{b}$, y esta relación entre proyección y componente nos dice que la componente de $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{b}$ es la longitud "dirigida" de la proyección. Si $\text{Comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} > 0$, entonces $\mathbf{Proy}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$ está en la dirección de $\mathbf{b}$ (figura 26). Si $\text{Comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} < 0$, entonces $\mathbf{Proy}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están en direcciones opuestas (figura 27).

Nota. No es difícil demostrar (problema 6b) que si $\mathbf{b}'$ es un vector cualquiera en la dirección de $\mathbf{b}$, entonces $\text{Comp}_{\mathbf{b}'}\, \mathbf{a} = \text{Comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$. El componente de $\mathbf{a}$ no depende de cuál haya sido el vector $\mathbf{b}$ elegido para especificar la dirección, y esto justifica la terminología "componente de $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{b}$". Si $\mathbf{b}'$ y $\mathbf{b}$ tienen direcciones opuestas, entonces $\text{Comp}_{\mathbf{b}'}\, \mathbf{a} = -\text{Comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$ (problema 6c). La proyección es proyección ortogonal sobre una recta; $\mathbf{Proy}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}$ es invariante si $\mathbf{b}$ se reemplaza por cualquier vector no nulo paralelo a $\mathbf{b}$ (problema 6a).

El componente de un vector en la dirección de otro vector tiene un significado geométrico (y físico) definido, y la relación entre componente y producto escalar describe geométricamente al producto escalar. Según la definición de componente

8.10 $$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\, \text{Comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a}.$$

Esta ecuación nos dice: *el producto escalar* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ *es el producto de la longitud de* $\mathbf{b}$ *por la componente de* $\mathbf{a}$ *en la dirección de* $\mathbf{b}$.

Si $\mathbf{b}$ es un vector unitario, entonces $\text{Comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Por esta razón es a menudo conveniente especificar direcciones por medio de vectores unitarios.

Veremos más adelante que, si θ es el ángulo desde $\mathbf{a}$ hasta $\mathbf{b}$, entonces

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$$

y

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\text{sen}\,\theta.$$

8.1 Ejemplo. Determínese la proyección ortogonal de $\mathbf{a} = (2, 5)$ sobre $\mathbf{b} = (-1, 2)$ y el componente de $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{b}$.

SOLUCIÓN. (Figura 29.)

$$\text{Comp}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{-2+10}{\sqrt{1+4}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$\mathbf{Proy}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} = \frac{8}{\sqrt{5}}\,\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{8}{5}(-1, 2).$$

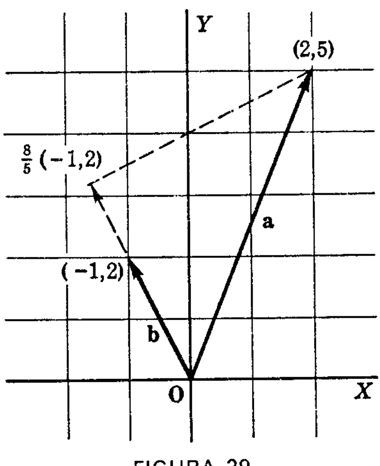


FIGURA 29

Tenemos ahora un procedimiento simple para el cálculo de las áreas de paralelogramos y triángulos. Consideremos el paralelogramo de lados **a** y **b** (figura 30). La altura **c** se obtiene mediante la proyección ortogonal de **a**

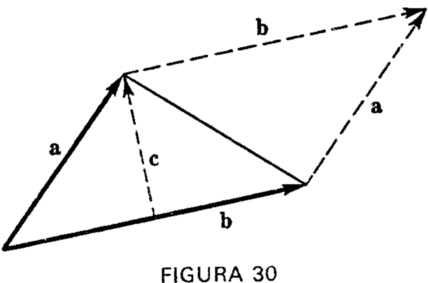


FIGURA 30

sobre $\mathbf{b}^{\perp}$. La altura del paralelogramo es $|\mathbf{c}| = |\text{Comp}_{\mathbf{b}}{}^{\perp}\ \mathbf{a}|$. El área (la altura por la base) del paralelogramo es $|\mathbf{c}|\,|\mathbf{b}| = \dfrac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp}|}{|\mathbf{b}|}|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp}|$. El área del triángulo de lados **a** y **b** es $\frac{1}{2}|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp}|$.

8.12 Ejemplo. Calcúlese el área del triángulo de lados (1, 3) y (3, 1).

SOLUCIÓN. (Figura 31 pág. 85.) Sea $\mathbf{a} = (1, 3)$ y $\mathbf{b} = (3, 1)$. El área del triángulo es

$$\tfrac{1}{2}|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp}| = \tfrac{1}{2}|(1, 3)\cdot(-1, 3)| = \tfrac{8}{2} = 4.$$

Pasamos ahora a considerar un problema cuya solución tiene un número considerable de consecuencias interesantes. Sea **a** un vector, **b** un vector no

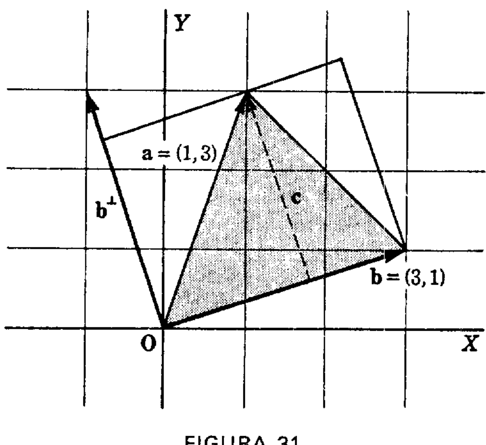


FIGURA 31

nulo, y t un número real cualquiera. Si **a** y t**b** se representan como los lados de un triángulo (figura 32), entonces el tercer lado del triángulo es **a** − t**b**. Consideremos fijos los vectores **a** y **b**. Comprobamos

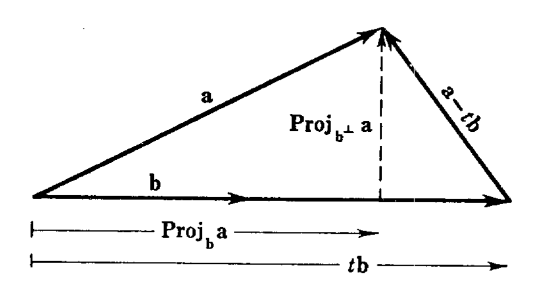


FIGURA 32

con esta imagen geométrica que el lado **a** − t**b** será de longitud mínima cuando **a** − t**b** sea ortogonal a **b**; es decir, cuando $t\mathbf{b} = \mathbf{Proy_b\ a}$ y $t = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/|\mathbf{b}|^2$. Para demostrar esto expresamos **a** − t**b** como una combinación lineal de **b** y $\mathbf{b}^\perp$:

$$\mathbf{a}-t\mathbf{b} = \frac{(\mathbf{a}-t\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\,\mathbf{b} + \frac{(\mathbf{a}-t\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}^\perp}{|\mathbf{b}|^2}\,\mathbf{b}^\perp = \left[\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} - t\right]\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^\perp}{|\mathbf{b}|^2}\,\mathbf{b}^\perp .$$

Por tanto

8.13
$$|\mathbf{a}-t\mathbf{b}|^2 = \left[\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} - t\right]^2 |\mathbf{b}|^2 + \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^\perp)^2}{|\mathbf{b}|^2} .$$

Vemos que $\mathbf{a}-t\mathbf{b}$ tiene la longitud mínima cuando $t = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/|\mathbf{b}|^2$; es decir, cuando

8.14
$$\mathbf{a}-t\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp}}{|\mathbf{b}|^2}\,\mathbf{b}^{\perp} = \mathbf{Proy}_{\mathbf{b}^{\perp}}\,\mathbf{a}\,.$$

Como veremos más adelante, esto nos da un procedimiento para calcular la distancia de un punto a una recta. Por el momento lo que nos interesa es la identidad que hemos obtenido partiendo de 8.13 haciendo $t=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}/|\mathbf{b}|^2$:

$$\left|\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\,\mathbf{b}\right|^2 = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp})^2}{|\mathbf{b}|^2}, \quad \mathbf{b}\neq\mathbf{0},$$

o bien,

8.15
$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp})^2 = \left||\mathbf{b}|\,\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\,\mathbf{b}\right|^2, \quad \mathbf{b}\neq\mathbf{0}.$$

Calculando $\left[|\mathbf{b}|\,\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\,\mathbf{b}\right]\cdot\left[|\mathbf{b}|\,\mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\,\mathbf{b}\right]$, obtenemos

8.16
$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2,$$

para todo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ en V_2. La identidad (8.16) se verifica para $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, y la restricción $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$ no se aplica a (8.16).

Como $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp})^2 \geqslant 0$ y $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp} = 0$ si y sólo si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos, obtenemos

8.17 $\quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leqslant |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$ (desigualdad de Schwarz)

donde la igualdad solamente se verifica si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos. Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, la desigualdad de Schwarz es equivalente a la siguiente desigualdad entre números reales:

8.18
$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leqslant (a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2).$$

La desigualdad del triángulo 6.5 es ahora una simple consecuencia de la desigualdad de Schwarz y del teorema 6.9 del capítulo 1, pág. 36.

La desigualdad de Schwarz es equivalente a

8.19
$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|.$$

Como $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leqslant |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$, esto implica
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leqslant |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|.$$

De donde
$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+|\mathbf{b}|^2$$
$$\leqslant |\mathbf{a}|^2+2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|+|\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|)^2.$$

Esto implica
$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|.$$

Problemas

1. Para cada par de vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ exprésese $\mathbf{a}$ como una combinación lineal de $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}^{\perp}$.

a) $\mathbf{a} = (2, 2)$, $\mathbf{b} = (3, 1)$ *b*) $\mathbf{a} = (2, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 3)$
c) $\mathbf{a} = (-2, 2)$, $\mathbf{b} = (3, 1)$ *d*) $\mathbf{a} = (3, 1)$, $\mathbf{b} = (-2, 2)$
e) $\mathbf{a} = (3, -4)$, $\mathbf{b} = (-5, 2)$.

Compruébense las respuestas gráficamente.

2. Para cada par de vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ calcúlese la proyección ortogonal de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$ y la componente de $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{b}$.

a) $\mathbf{a} = (4, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 2)$ *b*) $\mathbf{a} = (2, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 4)$
c) $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{b} = (4, 2)$ *d*) $\mathbf{a} = (3, 8)$, $\mathbf{b} = (-2, 6)$
e) $\mathbf{a} = (3, 12)$, $\mathbf{b} = (-6, 5)$ *f*) $\mathbf{a} = (-6, 5)$, $\mathbf{b} = (3, 12)$.

3. Un aeroplano vuela en dirección SE y la velocidad del viento es

a) 60 kmph O *b*) 60 kmph N
c) 60 kmph NE *d*) 60 kmph E,

determinar en cada caso la componente de la velocidad del viento 1) en la dirección del aeroplano, y 2) en la dirección en ángulo recto a la dirección del aeroplano.

4. En un determinado momento un automóvil está viajando a 55 kilómetros por hora hacia arriba en una carretera cuya pendiente es 1/20 (es decir, cada 20 metros medidos horizontalmente la carretera se eleva 1 metro). ¿Cuales son las componentes horizontal y vertical de la velocidad del automóvil? Si el automóvil pesa 2 000 kilogramos, ¿cual es la componente en la dirección del automóvil de la fuerza gravitacional que opera sobre él?

5. Demuéstrese que $\text{Comp}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{Comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}_1 + \text{Comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}_2$ (la componente de la suma es la suma de las componentes). Ilústrese gráficamente este resultado.

6. Demuéstrese que:

a) Si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}'$ son paralelos y no nulos, entonces $\mathbf{Proy}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \mathbf{Proy}_{\mathbf{b}'}\,\mathbf{a}$.
b) Si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}'$ tienen la misma dirección, entonces $\text{Comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = \text{Comp}_{\mathbf{b}'}\,\mathbf{a}$.
c) Si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}'$ tienen direcciones opuestas, entonces $\text{Comp}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = -\text{Comp}_{\mathbf{b}'}\,\mathbf{a}$.

7. Calcúlese el área de los paralelogramos con lados:

a) $\mathbf{a} = (4, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 8)$ *b*) $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 2)$
c) $\mathbf{a} = (4, -1)$, $\mathbf{b} = (-2, 6)$.

8. Calcúlese el área de los triángulos con vértices:

a) (0, 0), (1, 0), (1, 2) *b*) (0, 0), (1, 1), (4, 3)
c) (1, 1), (3, 3), (5, 7) *d*) (1, 0), (0, 1), (4, 2)
e) (−5, 0), (1, 3), (−3, −2).

9. Demuéstrese que si **a** y **b** son vectores no nulos, entonces $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ implica que **a** y **b** están en la misma dirección y que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ implica que **a** y **b** son de direcciones opuestas.

10. Demuéstrese que si **a** y **b** son vectores no nulos, entonces la igualdad en la desigualdad del triángulo

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$$

se verifica si y sólo si **a** está en la dirección de **b**.

11. Tomando vectores horizontales $(a, 0)$ y $(b, 0)$, demuéstrese que las propiedades fundamentales del valor absoluto de los números reales son casos especiales de las propiedades fundamentales de la longitud de los vectores.

12. Demuéstrese que: $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\perp}| \leqslant |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$, expresión en que la igualdad se verifica si y sólo si **a** y **b** son ortogonales.

9. EL PLANO (ANALÍTICO) EUCLIDIANO

La palabra "geometría" significa "medida de la tierra", e incluso sin un estudio histórico, nuestra geometría de la escuela media nos basta para comprobar que, como la mayor parte de nuestros conocimientos, la geometría surgió en respuesta a las necesidades prácticas del hombre. La antigua geometría empírica de los egipcios era simplemente una colección de reglas basadas en la experiencia práctica de la agrimensura y en la medida de figuras geométricas sencillas. La Gran Pirámide se construyó 3 900 años antes de Cristo, y se diseñó usando estas reglas empíricas. Los griegos desarrollaron esta geometría intuitiva y demostraron para siempre el extraordinario poder del pensamiento abstracto. El primer libro global sobre geometría, los *Elementos* de Euclides, él escribió alrededor del 300 antes de Cristo. El texto que el lector usa en la escuela es una adaptación de los *Elementos* de Euclides. Se comienza con un conjunto de postulados para puntos y rectas. Los puntos y las rectas son términos indefinidos. Son abstracciones de la geometría intuitiva. La "recta" es la abstracción de un "hilo extendido". Después de haber introducido los postulados se definen otros conceptos, y partiendo de los postulados se deducen sistemáticamente teoremas (proposiciones). Esta formalización abstracta de la geometría intuitiva es muy diferente de lo que aquí estamos haciendo.

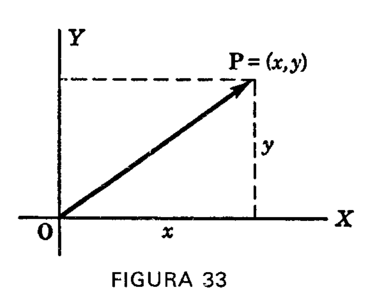


FIGURA 33

Estamos ahora preparados para dar una descripción precisa de nuestro modelo analítico de un plano euclidiano. Llamamos a este modelo el "plano euclidiano analítico" o, simplemente, "plano euclidiano". El plano euclidiano se denota por R^2 (léase "R dos"). Los "puntos" de R^2 son los pares ordenados (x, y) de V_2. Los números x y y tienen que visualizarse como las coordenadas rectangulares del punto $\mathbf{P} = (x, y)$ (figura 33). Nuestra definición de "recta" en R^2 nace de nuestra realización intuitiva de que una recta está determinada por un punto $\mathbf{P}_0$ y una dirección $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ es un vector no nulo) (figura 34). Los puntos $\mathbf{P}$ sobre la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $\mathbf{P}_0$ en la

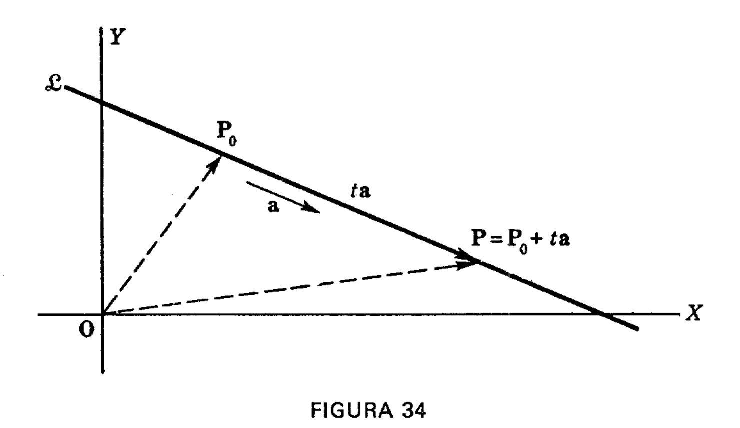


FIGURA 34

dirección de $\mathbf{a}$ son todos puntos de la forma $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{a}$ donde t es un número real. Estos son todos los puntos que pueden alcanzarse desde $\mathbf{P}_0$ marchando desde $\mathbf{P}_0$ en una dirección paralela a $\mathbf{a}$. La "distancia" en el

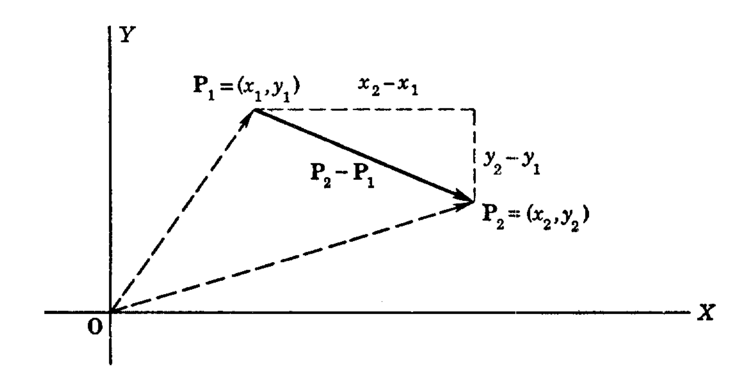


FIGURA 35

plano euclidiano R^2 desde un punto $\mathbf{P}_1$ a un punto $\mathbf{P}_2$ está definida como la longitud del vector $\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1$ desde $\mathbf{P}_1$ hasta $\mathbf{P}_2$ (figura 35). Nuestro plano euclidiano R^2 es, por tanto, V_2, donde los elementos de V_2 son los "puntos" y donde "recta" y "distancia" han sido definidos. Damos ahora un enunciado formal de la definición del plano euclidiano R^2

9.1 Definición. *El **plano euclidiano** (analítico), denotado por* R^2, *es el espacio vectorial bidimensional* V_2 *donde:*

1) *los elementos* (x, y) *de* V_2 *son los **puntos** de* R^2 (figura 33);

2) *un conjunto* $\mathcal{L}$ *de puntos de* R^2 *se llama **recta** si hay un punto* $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0) \in R^2$ *y un vector no nulo* $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in V_2$ *tales que* (figura 34)

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{P}_0 + t\mathbf{a} \mid t \in R\};$$

3) *la **distancia,** escrita* $d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$, ***desde*** $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ ***hasta*** $\mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$ *es la longitud del vector de* $\mathbf{P}_1$ *a* $\mathbf{P}_2$ (figura 35); *es decir,*

$$d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = |\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

La recta $\mathcal{L}$ que acabamos de definir en 9.1 se llama *recta que pasa por el punto* $\mathbf{P}_0$ *paralela al vector (no nulo)* $\mathbf{a}$. Decimos que dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ coinciden si y sólo si como conjuntos $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$; es decir, si y sólo si $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$. La definición de la recta $\mathcal{L}$ paralela a $\mathbf{a}$ que pasa por $\mathbf{P}_0$ nos dice —como muestra el siguiente teorema— que un punto $\mathbf{P}$ está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si el vector de $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}$ es paralelo a $\mathbf{a}$ (figura 34).

9.2 Teorema. *Si* $\mathcal{L}$ *es la recta que pasa por* $\mathbf{P}_0$ *es paralela a* $\mathbf{a}$, *entonces un punto* $\mathbf{P}$ *de* R^2 *está sobre* $\mathcal{L}$ *si y sólo si* $\mathbf{P}-\mathbf{P}_0$ *es paralelo a* $\mathbf{a}$.

PRUEBA. $\mathcal{L} = \{\mathbf{P}_0 + t\mathbf{a} \mid t \in R\}$. Supongamos que $\mathbf{P}-\mathbf{P}_0$ es paralelo a $\mathbf{a}$. Entonces, como $\mathbf{a}$ es un vector no nulo, se sigue que (véase el lema 5.4, pág. 69)

$$\mathbf{P}-\mathbf{P}_0 = t\mathbf{a} \text{ para algún } t \in R;$$

esto implica que $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{a}$, y de aquí que $\mathbf{P} \in \mathcal{L}$. Recíprocamente, $\mathbf{P} \in \mathcal{L}$ implica

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{a} \text{ para algún } t \in R.$$

Por tanto $\mathbf{P}-\mathbf{P}_0 = t\mathbf{a}$, y $\mathbf{P}-\mathbf{P}_0$ es paralelo a $\mathbf{a}$.

9.3 Corolario. *Si* $\mathcal{L}$ *es la recta que pasa por* $\mathbf{P}_0$ *paralelo a* $\mathbf{a}$, *entonces* $\mathbf{P} \in \mathcal{L}$ *si y sólo si* $\mathbf{a}^{\perp} \cdot (\mathbf{P}-\mathbf{P}_0) = 0$.

PRUEBA. Como $\mathbf{P}-\mathbf{P}_0$ es paralelo a $\mathbf{a}$ si y sólo si $\mathbf{a}^{\perp} \cdot (\mathbf{P}-\mathbf{P}_0) = 0$, este corolario es una consecuencia directa del teorema 9.2.

9.4 Ejemplo. Determínese la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $\mathbf{P}_0 = (2, 3)$ paralela a $\mathbf{a} = (4, -2)$. ¿Están los puntos (0, 4) y (6, 2) sobre la recta?

SOLUCIÓN. (Figura 36.) Por definición

$$\mathcal{L} = \{(2, 3)+t(4, -2) \mid t \in \mathrm{R}\}.$$

Como

$$(2, 4)\cdot[(0, 4)-(2, 3)] = (2, 4)\cdot(-2, 1) = -4+4 = 0$$

y

$$(2, 4)\cdot[(6, 2)-(2, 3)] = (2, 4)\cdot(4, -1) = 8-4 = 4,$$

concluimos que (0, 4) está sobre $\mathcal{L}$, pero en cambio (6, 2) no está sobre $\mathcal{L}$. [El punto (0, 4) es el que corresponde a $t = -\frac{1}{2}$; puesto que

$$(2, 3)-\tfrac{1}{2}(4, -2) = (0, 4).]$$

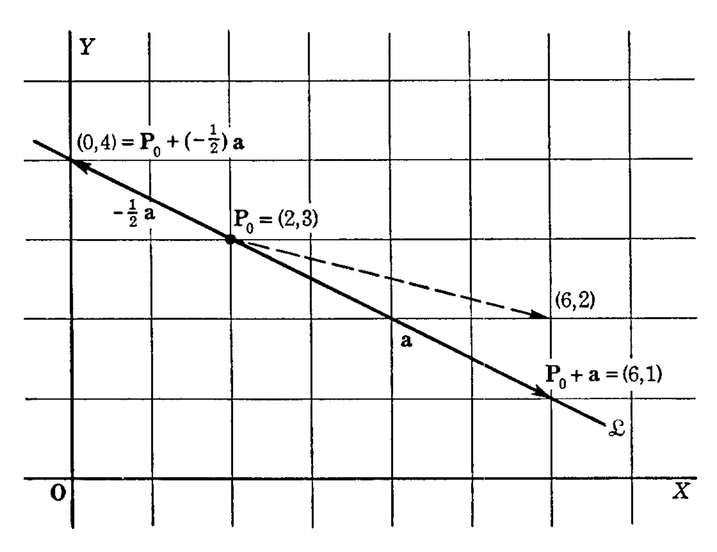


FIGURA 36

9.5 Ejemplo. Determínese una recta que pase por los puntos $\mathbf{P}_0 = (1, 4)$ y $\mathbf{P}_1 = (5, 2)$.

SOLUCIÓN 1. (Figura 37.) Tómese $\mathbf{a} = \mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0 = (5, 2)-(1, 4) = (4, -2)$. Entonces

9.6 $$\mathcal{L} = \{\mathbf{P}_0+t(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)\} = \{(1, 4)+t(4, -2)\} = \{(1+4t, 4-2t)\}$$

contiene $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$; $\mathbf{P}_0$ corresponde a $t = 0$ y $\mathbf{P}_1$ corresponde a $t = 1$.

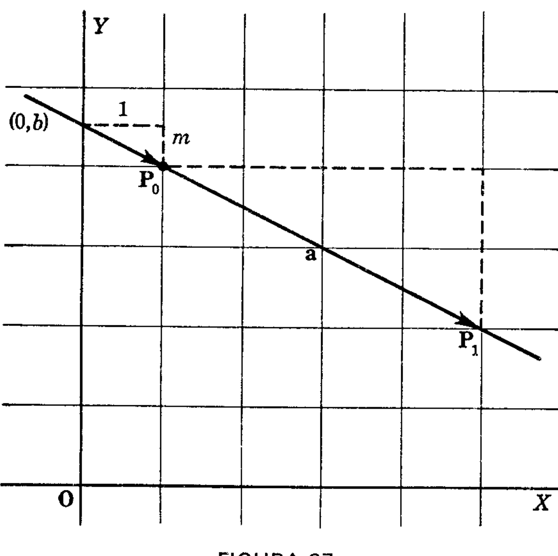


FIGURA 37

SOLUCIÓN 2. (Figura 37.) Estamos buscando una recta de la forma

9.7 $$\mathcal{L}_1 = \{(0, b)+x(1, m) \mid x \in \mathrm{R}\} = \{(x, mx+b) \mid x \in \mathrm{R}\}$$

que contenga a $\mathbf{P}_0$ y a $\mathbf{P}_1$. $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1 \in \mathcal{L}_1$ implica que hay números x_0 y x_1 tales que

$$\mathbf{P}_0 = (1, 4) = (x_0, mx_0+b)$$
$$\mathbf{P}_1 = (5, 2) = (x_1, mx_1+b).$$

Por tanto

$$x_0 = 1 \text{ y } mx_0+b = m+b = 4$$
$$x_1 = 5 \text{ y } mx_1+b = 5m+b = 2.$$

Estas ecuaciones implican $-4m = 2$, y $m = -\frac{1}{2}$. De donde

$$b = 4-m = 4+\tfrac{1}{2} = \tfrac{9}{2}.$$

Concluimos, por tanto, que si hay una recta de la forma $\mathcal{L}_1$ que contiene a $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$,

$$\mathcal{L}_1 = \{(x, -\tfrac{1}{2}x+\tfrac{9}{2})\}.$$

Es fácil verificar que $\mathcal{L}_1$ contiene a $\mathbf{P}_0 = (1, 4)$ y a $\mathbf{P}_1 = (5, 2)$.

Esperamos que las rectas tengan la propiedad de que por un par de puntos distintos pase una y sólo una recta. En las dos soluciones al ejemplo anterior obtuvimos la recta $\mathcal{L}$ y la recta $\mathcal{L}_1$ que pasaban por los puntos $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$. Como muestra el siguiente ejemplo, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$; $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_1$ son dos diferentes representaciones de la misma recta.

9.8 Ejemplo. Sean

$$\mathcal{L} = \{(1+4t, 4-2t) \mid t \in \mathrm{R}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_1 = \{(x, -\tfrac{1}{2}x+\tfrac{9}{2}) \mid x \in \mathrm{R}\}.$$

Demuéstrese que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$.

SOLUCIÓN. $\mathbf{P} \in \mathcal{L}$ implica $\mathbf{P} = (1+4t, 4-2t)$ para algún $t \in \mathrm{R}$. Sea $x = 1+4t$. Entonces $t = \frac{1}{4}(x-1)$, y

$$(1+4t, 4-2t) = (x, -\tfrac{1}{2}x+\tfrac{9}{2}).$$

De donde $\mathbf{P} \in \mathcal{L}$ implica $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_1$; es decir, $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$. Recíprocamente, $\mathbf{P} \in \mathcal{L}_1$ implica $\mathbf{P} = (x, -\frac{1}{2}x+\frac{9}{2})$ para algún $x \in \mathrm{R}$. Sea $t = \frac{1}{4}(x-1)$. Entonces $x = 1+4t$, y $(x, -\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}) = (1+4t, 4-2t) \in \mathcal{L}$. De donde $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$. Por tanto, $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}$ y $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$; es decir, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$.

Problemas

1. ¿Cuál es la distancia de

a) $(0, 0)$ a $(3, 4)$?
b) $(0, 0)$ a $(-3, -4)$?
c) $(-1, 2)$ a $(-5, -2)$?
d) $(-5, -2)$ a $(-1, 2)$?
e) $(30, 45)$ a $(52, 28)$?
f) $(x_1, 0)$ a $(x_2, 0)$?
g) $(a, 0)$ a $(0, b)$?
h) $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}_0 + t\mathbf{a}$?
i) $\mathbf{P}_0$ a $t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)$?

2. Demuéstrese que la distancia $d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ de $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$ en el plano euclidiano R^2, tiene las siguientes propiedades:

a) $d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \geqslant 0$; $d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = 0$ implica $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$
b) $d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = d(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1)$
c) $d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3) \leqslant d(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) + d(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$.

3. Considérense las siguientes rectas:

1) La recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por $(0, 0)$ paralela a $(1, 1)$
2) La recta $\mathcal{L}_2$ que por $(0, 0)$ paralela a $(-1, -1)$
3) La recta $\mathcal{L}_3$ que pasa por $(1, 0)$ y $(0, 1)$
4) La recta $\mathcal{L}_4$ que pasa por $(0, 1)$ y $(2, 3)$
5) La recta $\mathcal{L}_5$ que pasa por $(0, 3)$ paralela a $(2, 1)$
6) La recta $\mathcal{L}_6$ que pasa por $(0, 3)$ paralela a $(1, \frac{1}{2})$
7) La recta $\mathcal{L}_7$ que pasa por $(-1, 2)$ paralela a $(1, 0)$
8) La recta $\mathcal{L}_8$ que pasa por $(0, 2)$ y $(2, 2)$
9) La recta $\mathcal{L}_9$ que pasa por $(-1, 2)$ paralela a $(0, 1)$
10) La recta $\mathcal{L}_{10}$ que pasa por $(-1, 0)$ y $(-1, 10)$.

Determínense 4 puntos sobre cada una de las tales rectas. Compruébense los resultados gráficamente.

4. ¿Está el punto $(8, 8)$ sobre

a) $\mathcal{L}_1$?
b) $\mathcal{L}_2$?
c) $\mathcal{L}_3$?

5. ¿Está el punto $(-3, 3)$ sobre

a) $\mathcal{L}_5$? *b*) $\mathcal{L}_6$? *c*) $\mathcal{L}_7$?

6. Demuéstrese que:

a) $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$

b) $\mathcal{L}_5 = \mathcal{L}_6$

c) $\mathcal{L}_8 \neq \mathcal{L}_9$

d) $\mathcal{L}_4 \neq \mathcal{L}_7$

e) $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$

f) $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_4 = \emptyset$, el conjunto nulo.

7. Proporciónese, siempre que sea posible, una representación analítica de

a) $\mathcal{L}_1$ *b*) $\mathcal{L}_3$ *c*) $\mathcal{L}_4$ *d*) $\mathcal{L}_5$

e) $\mathcal{L}_6$ *f*) $\mathcal{L}_8$ *g*) $\mathcal{L}_9$ *h*) $\mathcal{L}_{10}$

en la forma

1) $\{(x, mx+b) \mid x \in \mathrm{R}\}$

2) $\{(m'y+a, y) \mid y \in \mathrm{R}\}$.

8. Proporciónese una representación analítica de la recta que pasa por $(0, b)$ que es paralela a $(1, m)$.

9. El conjunto $\{(x, 0) \mid x \in \mathrm{R}\}$ de puntos de R^2 se llama eje X. El conjunto $\{(0, y) \mid y \in \mathrm{R}\}$ de puntos de R^2 se llama eje Y.

Demuéstrese que:

a) El eje X es una recta.

b) El eje Y es una recta.

c) El origen $(0, 0)$ es el punto de intersección del eje X y el eje Y.

10. Encuéntrense los puntos de intersección de

a) $\mathcal{L}_1$ *b*) $\mathcal{L}_3$ *c*) $\mathcal{L}_7$ *d*) $\mathcal{L}_8$ *e*) $\mathcal{L}_9$

con 1) el eje X y 2) el eje Y.

11. Identifíquense cada uno de los siguientes conjuntos de puntos en R^2:

a) $\{(2, 1)+t(3, -1) \mid t \in \mathrm{R}\}$

b) $\{(2+3s, 1-s) \mid s \in \mathrm{R}\}$

c) $\{(1-t)(3, 0)+t(2, 5) \mid t \in \mathrm{R}\}$

d) $\{(1-t)\mathbf{P}_1+t\mathbf{P}_2 \mid t \in \mathrm{R}\}$

e) $\{(x, y) \mid y = 2, x \in \mathrm{R}\}$

f) $\{(x, y) \mid x = 2t+1, y = -3t+4, t \in \mathrm{R}\}$

g) $\{(x, y) \mid y = 2x-5, x \in \mathrm{R}\}$

h) $\{(1, 2)+t(1, 1) \mid t \in [0, \infty\rangle\}$

i) $\{(1, 2)+t(1, 1) \mid t \in \langle 0, 1\rangle\}$

j) $\{(1, 2)+t(1, 1) \mid t \in [0, 1]\}$

k) El conjunto de todos los puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ donde

$$x = s$$
$$y = -3s+5, \quad s \in \mathrm{R}$$

l) El conjunto de todos los puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ tales que

$$y = 3x+5, \ x\in \mathrm{R}$$

m) $\{(x, y)\,|\,x^2+y^2 = 16\}$
n) $\{(x, y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = a^2\}$.

10. PARALELISMO DE RECTAS

En esta sección definimos el paralelismo de rectas y derivamos algunas de las propiedades fundamentales de las rectas.

Hemos dado a la recta $\mathcal{L} = \{\mathbf{P}_0+t\mathbf{a}\,|\,t\in \mathrm{R}\}$ el nombre de "recta que pasa por $\mathbf{P}_0$ paralela a $\mathbf{a}$". Como hemos visto en la sección anterior, la misma recta puede tener muchas representaciones analíticas diferentes. Mostraremos ahora que si $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por $\mathbf{P}_0$ paralela a $\mathbf{a}$ y si $\mathbf{Q}_0$ está sobre $\mathcal{L}$, la recta $\mathcal{L}$ es también la recta que pasa por $\mathbf{Q}_0$ paralela a $\mathbf{a}$. Esto identifica dos representaciones analíticas diferentes de la misma recta.

10.1 Lema. *Si* $\mathbf{Q}_0$ *está sobre la recta* $\mathcal{L} = \{\mathbf{P}_0+t\mathbf{a}\,|\,t\in \mathrm{R}\}$, *entonces* $\mathcal{L} = \{\mathbf{Q}_0+s\mathbf{a}\,|\,s\in \mathrm{R}\}$.

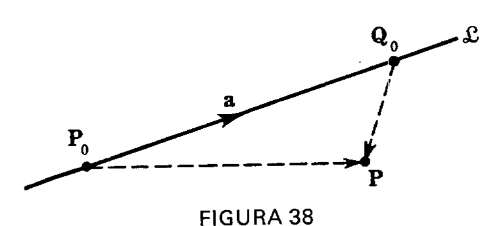


FIGURA 38

PRUEBA. (Figura 38.) Sea $\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{Q}_0+s\mathbf{a}\,|\,s\in \mathrm{R}\}$. Bajo la hipótesis de que $\mathbf{Q}_0\in\mathcal{L} = \{\mathbf{P}_0+t\mathbf{a}\,|\,t\in \mathrm{R}\}$, queremos demostrar que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$. Como $\mathbf{Q}_0\in\mathcal{L}$, sabemos que $\mathbf{Q}_0-\mathbf{P}_0$ es paralela a $\mathbf{a}$. Pero

$$\mathbf{P}-\mathbf{P}_0 = (\mathbf{Q}_0-\mathbf{P}_0)+(\mathbf{P}-\mathbf{Q}_0),$$

y, como $\mathbf{Q}_0-\mathbf{P}_0$ es paralela a $\mathbf{a}$, $\mathbf{P}-\mathbf{P}_0$ es paralela a $\mathbf{a}$ si y sólo si $\mathbf{P}-\mathbf{Q}_0$ es paralelo a $\mathbf{a}$ (problema 4, sección 5). De donde $\mathbf{P}\in\mathcal{L}$ si y sólo si $\mathbf{P}\in\mathcal{L}_1$. Por lo tanto, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$.

El siguiente lema nos permite también identificar representaciones analíticas diferentes de la misma recta.

10.2 Lema. *Sean* $\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{P}_0+t\mathbf{a}\,|\,t\in \mathrm{R}\}$ *y* $\mathcal{L}_2 = \{\mathbf{P}_0+s\mathbf{b}\,|\,\mathbf{a}\in \mathrm{R}\}$ *un par de rectas que pasan por* $\mathbf{P}_0$. $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ *si y sólo si* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *son paralelos.*

PRUEBA. Sea $\mathbf{P}_1$ un punto de $\mathcal{L}_1$ distinto de $\mathbf{P}_0$; es decir, $\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0 \neq \mathbf{0}$. ($\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0+\mathbf{a}$ es tal punto). Entonces $\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0$ es paralelo a $\mathbf{a}$. Supongamos que $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. Entonces $\mathbf{P}_1 \in \mathcal{L}_2$, y esto implica que $\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0$ es paralela a $\mathbf{b}$ Por tanto, como $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos al mismo vector no nulo $\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0$, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos. Para probar el recíproco, comenzamos con la hipótesis de que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos. Entonces $\mathbf{P}-\mathbf{P}_0$ es paralelo a $\mathbf{a}$ si y sólo si $\mathbf{P}-\mathbf{P}_0$ es paralelo a $\mathbf{b}$; es decir, $\mathbf{P}\in\mathcal{L}_1$ si y sólo si $\mathbf{P}\in\mathcal{L}_2$. De donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ paralelos implica $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$. Esto completa la prueba.

10.3 Definición. *Dos rectas* $\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{P}_0+t\mathbf{a} \mid t\in R\}$ *y*

$$\mathcal{L}_2 = \{\mathbf{Q}_0+s\mathbf{b} \mid s\in R\}$$

se dice que son ***paralelas*** *si* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *son paralelos.*

El lema 10.1 y el lema 10.2 nos dicen entonces que dos rectas coinciden si y sólo si tienen un punto en común y son paralelas. Por ejemplo, si $\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{P}_0+t\mathbf{a}\} = \{\mathbf{P}'_0+r\mathbf{a}'\}$, entonces $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}'$ son paralelos. Una de las razones para señalar esto es que se nos presenta la cuestión —y éste es un punto delicado— de si la definición que hemos dado de paralelismo de rectas es satisfactoria. La definición no sería satisfactoria si dependiese de las representaciones analíticas particulares elegidas para las rectas. Supongamos, por ejemplo, que $\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{P}'_0+r\mathbf{a}' \mid r\in R\}$ es otra representación analítica de $\mathcal{L}_1$. Entonces $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}'$ son paralelos, y $\mathbf{a}$ es paralelo a $\mathbf{b}$ si y sólo si $\mathbf{a}'$ es paralelo a $\mathbf{b}$. La definición de paralelismo no depende de la representación analítica particular elegida.

El más famoso de los postulados de Euclides es su postulado 5. Es equivalente a: "por un punto dado puede trazarse una y sólo una paralela a una recta dada". Este es el llamado "postulado de las paralelas". Hubo un periodo —desde 300 años antes de Cristo hasta el comienzo del siglo XIX— en que se sospechó que este postulado no era necesario. Muchas personas creían que sería posible derivar este postulado como una consecuencia de otros postulados de Euclides. Los intentos de conseguir esto fallaron y finalmente condujeron al descubrimiento y estudio de geometrías no euclidianas y al establecimiento del hecho de que, en contra de lo que se había sospechado, el postulado de las paralelas es independiente de los otros postulados. Mostraremos ahora que este postulado de la geometría euclidiana axiomática se satisface en R^2. Si así no fuera, nuestro modelo analítico no se llamaría plano euclidiano.

10.4 Teorema. *Para cada punto* $\mathbf{Q}_0$ *en* R^2 *y cada recta* $\mathcal{L}$ *en* R^2, *hay una y sólo una recta que pasa por* $\mathbf{Q}_0$ *paralela a* $\mathcal{L}$.

PRUEBA. Sea $\mathcal{L} = \{\mathbf{P}_0+t\mathbf{a}\}$. Entonces $\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{Q}_0+t\mathbf{a}\}$ es una recta que pasa por $\mathbf{Q}_0$ paralela a $\mathcal{L}$. Supongamos que $\mathcal{L}_2$ es cualquier otra recta que pasa por $\mathbf{Q}_0$ paralela a $\mathbf{a}$. Entonces, por el lema 10.1 $\mathcal{L}_2 = \{\mathbf{Q}_0+t\mathbf{b}\}$.

Como $\mathcal{L}_2$ es paralela a $\mathcal{L}$, **b** es paralela a **a**, y según el lema 10.2 $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$. $\mathcal{L}_1$ es, por tanto, la única recta por $\mathbf{Q}_0$ paralela a $\mathcal{L}$.

10.5 Corolario. Si $\mathcal{L}$ es una recta y $\mathbf{Q}_0$ un punto no sobre $\mathcal{L}$, entonces la recta $\mathcal{L}'$ por $\mathbf{Q}_0'$ paralela a $\mathcal{L}$ no intersecta a $\mathcal{L}$.

PRUEBA. Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ se intersectasen, entonces por 10.4 $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$. Esto contradice la hipótesis de que $\mathbf{Q}_0$ no está sobre $\mathcal{L}$.

10.6 Ejemplo. Determínese la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $(1, -3)$ paralela a la recta que pasa por $(-5, 8)$ y $(3, 0)$.

SOLUCIÓN. (Figura 39.) La recta $\mathcal{L}$ es paralela a $(3, 0)-(-5, 8) = (8, -8) = 8(1, -1)$. De donde $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por $(1, -3)$ paralela a $(1, -1)$, y

$$\mathcal{L} = \{(1, -3)+t(1, -1)\} = \{(1+t, -3-t)\}.$$

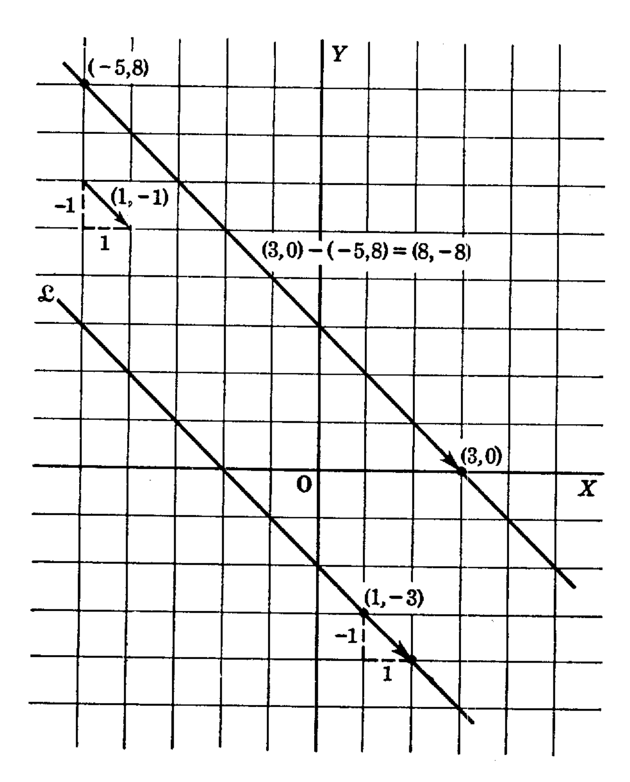


FIGURA 39

La solución puede también describirse diciendo que $\mathcal{L}$ es el conjunto de todos los puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ donde

$$x = 1+t$$
$$y = -3-t, \ t \in \mathrm{R}.$$

Nota. A las ecuaciones del anterior par se les llama **ecuaciones paramétricas** de la recta. Por ejemplo, las ecuaciones

10.7
$$x = x_0 + ta_1$$
$$y = y_0 + ta_2, \ t \in \mathrm{R},$$

son ecuaciones paramétricas de la recta

$$\mathcal{L} = \{(x_0+ta_1, y_0+ta_2) \mid t \in \mathrm{R}\} = \{(x_0, y_0)+t(a_1, a_2) \mid t \in \mathrm{R}\}.$$

Las ecuaciones paramétricas 10.7 representan la recta que pasa por (x_0, y_0) paralela a (a_1, a_2).

10.8 Corolario. *Para cada par de puntos distintos en el plano euclidiano* R^2 *hay una y sólo una recta que pasa por ellos.*

PRUEBA. Sean $\mathbf{Q}_0$ y $\mathbf{Q}_1$ puntos distintos de R^2. Entonces $\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0$ es un vector no nulo, y

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{Q}_0 + t(\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0) \mid t \in \mathrm{R}\} = \{(1-t)\mathbf{Q}_0 + t\mathbf{Q}_1 \mid t \in \mathrm{R}\}$$

es una recta que pasa por $\mathbf{Q}_0$ y $\mathbf{Q}_1$; $\mathbf{Q}_0$ corresponde a $t = 0$ y $\mathbf{Q}_1$ corresponde a $t = 1$. Supongamos que $\mathcal{L}_1$ es también una recta que pasa por $\mathbf{Q}_0$ y $\mathbf{Q}_1$. Entonces

$$\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{Q}_0 + s\mathbf{a} \mid s \in \mathrm{R}\}.$$

Pero $\mathbf{Q}_1 \in \mathcal{L}_1$ implica $\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0$ es paralela a $\mathbf{a}$. Por tanto, $\mathcal{L}$ es paralela a $\mathcal{L}_1$, y de acuerdo con el teorema 10.4 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$.

10.9 Ejemplo. Identifíquese la recta $\mathcal{L}$ dada mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = t$$
$$y = mt+b, \ t \in \mathrm{R}.$$

SOLUCIÓN 1.

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \mid x = t, y = mt+b, t \in \mathrm{R}\} = \{(t, mt+b) \mid t \in \mathrm{R}\}$$
$$= \{(0, b)+t(1, m) \mid t \in \mathrm{R}\}.$$

De donde $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por $(0, b)$ paralela a $(1, m)$.

SOLUCIÓN 2. Tomando $t = 0$ y luego $t = 1$, obtenemos dos puntos distintos $(0, b)$ y $(1, m+b)$ sobre $\mathcal{L}$. Por tanto, $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por $(0, b)$ y $(1, m+b)$.

Problemas

Considérense las siguientes rectas:

1) La recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por (5, 0) paralela a (1, 1)
2) La recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por (2, 3) y (7, 8)
3) La recta $\mathcal{L}_3$ que pasa por (−1, 1) y (0, 3)
4) La recta $\mathcal{L}_4$ que pasa por (−3, 4) y (2, 9)
5) La recta $\mathcal{L}_5$ que pasa por (−3, 4) y (117, 244).

1. ¿Cuáles de las anteriores rectas son paralelas?

2. Determínese la recta que pasa por (1, −6) paralela a:

a) $\mathcal{L}_1$ *b*) $\mathcal{L}_2$ *c*) $\mathcal{L}_3$ *d*) $\mathcal{L}_4$ *e*) $\mathcal{L}_5$.

3. Determínense todas las paralelas a:

a) El eje X
b) El eje Y
c) La recta que pasa por $(a, 0)$ y $(0, b)$.

4. Pruébese que rectas no paralelas se intersectan cuando más en un punto.

5. Determínense los puntos de intersección de

a) $\mathcal{L}_1$ *b*) $\mathcal{L}_2$ *c*) $\mathcal{L}_3$ *d*) $\mathcal{L}_4$ *e*) $\mathcal{L}_5$

con el eje X.

6. Determínense los puntos de intersección de

a) $\mathcal{L}_1$ *b*) $\mathcal{L}_2$ *c*) $\mathcal{L}_3$ *d*) $\mathcal{L}_4$ *e*) $\mathcal{L}_5$

con el eje Y.

7. Demuéstrese que $\frac{1}{2}\mathbf{P}_0+\frac{1}{2}\mathbf{P}_1$ es el punto sobre la recta que pasa por $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$ equidistante de $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$ ($\mathbf{P}_0 \neq \mathbf{P}_1$).

8. ¿Cuál es la significación geométrica de los puntos

$$\tfrac{1}{3}\mathbf{P}_0+\tfrac{2}{3}\mathbf{P}_1 \quad \text{y} \quad \tfrac{2}{3}\mathbf{P}_0+\tfrac{1}{3}\mathbf{P}_1\,?$$

9. Demuéstrese que tres puntos $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ se encuentran sobre una misma recta (es decir, son colineales) si y sólo si $\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_1$ son paralelos.

***10.** Demuéstrese que $|\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1|+|\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_2| = |\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_1|$ implica que $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, y $\mathbf{P}_3$ son colineales.

***11.** Un punto $\mathbf{P}$ se dice que está *entre* $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ si $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}_2$, y $|\mathbf{P}-\mathbf{P}_1|+|\mathbf{P}_2-\mathbf{P}| = |\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1|$. Pruébese que el conjunto de todos los puntos entre $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ es

$$\{(1-t)\mathbf{P}_1+t\mathbf{P}_2 \mid t\in\langle 0, 1\rangle\}.$$

11. ORTOGONALIDAD DE RECTAS. ECUACIÓN DE UNA RECTA

Como con el paralelismo de rectas, definimos la ortogonalidad de rectas en términos de los vectores que especifican sus direcciones.

11.1 Definición. *Un **vector** $\mathbf{n}$ y una recta $\mathcal{L} = \{\mathbf{P}_0 + t\mathbf{a}\}$ se dice que son **ortogonales** si y sólo si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{n}$ son ortogonales. Dos **rectas** $\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{P}_0 + t\mathbf{a}\}$ y $\mathcal{L}_2 = \{\mathbf{Q}_0 + s\mathbf{b}\}$ se dice que son **ortogonales** si y sólo si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales.*

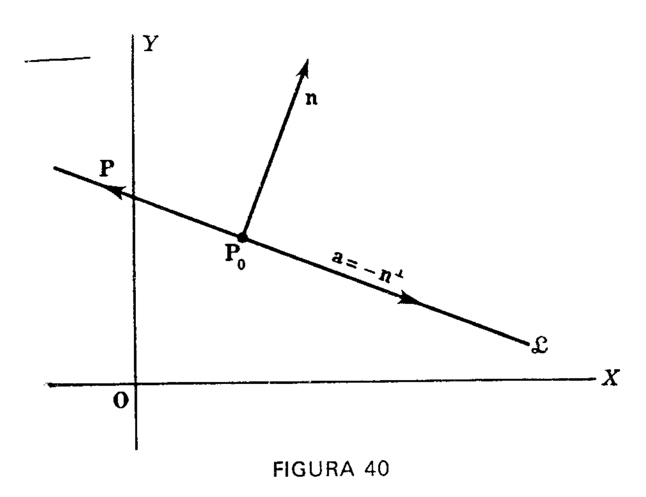


FIGURA 40

Aquí también necesitamos asegurarnos de que esta definición no depende del vector elegido para representar la dirección de la recta. Como los vectores que especifican la dirección de una recta son siempre no nulos, esta independencia es una consecuencia del teorema 7.14 (pág. 77).

Sea $\mathbf{P}_0$ un punto de R^2 y sea $\mathbf{n}$ un vector distinto de cero (figura 40). Entonces la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $\mathbf{P}_0$ paralela a $\mathbf{a} = -\mathbf{n}^{\perp}$ es una recta por $\mathbf{P}_0$ ortogonal a $\mathbf{n}$. El vector $\mathbf{n}$ es llamado *normal* a la recta. Cualquier otra recta que pasa por $\mathbf{P}_0$ ortogonal a $\mathbf{n}$ es paralela a $\mathbf{a} = -\mathbf{n}^{\perp}$. De donde $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por $\mathbf{P}_0$ ortogonal a $\mathbf{n}$. Según el corolario 9.3, pág. 90 (como $\mathbf{a}^{\perp} = \mathbf{n}$) $\mathcal{L}$ es el conjunto de todos los puntos $\mathbf{P}$ en R^2 que satisfacen

11.2
$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0) = 0\,;$$

$\mathcal{L} = \{\mathbf{P} \mid \mathbf{n}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0) = 0\}$. La ecuación 11.2 se dice que es una *ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $\mathbf{P}_0$ ortogonal a $\mathbf{n}$*.

11.3 Ejemplo. Determínese la recta $\mathcal{L}$ que pasa por (1, 5) ortogonal a la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por (1, 5) y (3, 8).

SOLUCIÓN 1. $\mathcal{L}_1$ es paralela a $(3, 8)-(1, 5) = (2, 3)$. La recta $\mathcal{L}$ es, por tanto, la recta que pasa por $(1, 5)$ paralela a $(2, 3)^\perp = (-3, 2)$; es decir,

$$\mathcal{L} = \{(1, 5)+t(-3, 2)\}.$$

Son ecuaciones paramétricas para $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}: \begin{array}{l} x = 1-3t \\ y = 5+2t. \end{array}$$

SOLUCIÓN 2. $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por $(1, 5)$ ortogonal a $(2, 3)$. Una ecuación para $\mathcal{L}$ es

$$\mathcal{L}: \quad (2, 3)\cdot(\mathbf{P}-(1, 5)) = 2(x-1)+3(y-5) = 0$$

o

$$\mathcal{L}: \quad 2x+3y = 17.$$

Consideremos ahora una ecuación de la forma

11.4 $$ax+by = c,$$

donde a, b, $c \in \mathrm{R}$ y $a^2+b^2 \neq 0$. Con $\mathbf{n} = (a, b)$ y $\mathbf{P} = (x, y)$ esta ecuación es equivalente a la ecuación

11.5 $$\mathbf{n}\cdot\mathbf{P} = c.$$

Dividiendo ambos miembros de esta ecuación por $|\mathbf{n}|$, obtenemos

11.6 $$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}}{|\mathbf{n}|} = \mathrm{Comp}_{\mathbf{n}}\, \mathbf{P} = \frac{c}{|\mathbf{n}|}.$$

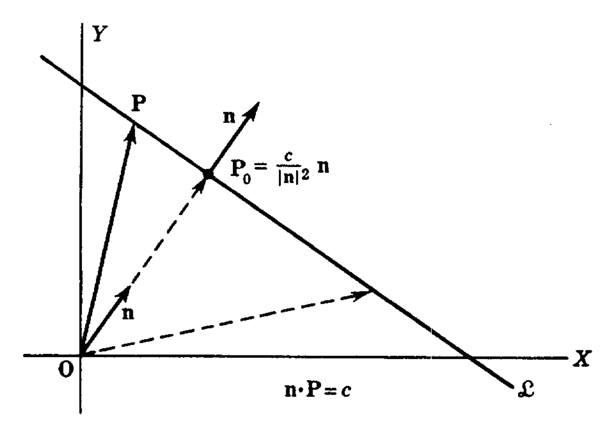


FIGURA 41

La ecuación 11.5 es, por tanto, equivalente a la afirmación de que el componente de **P** en la dirección de **n** es una constante, siendo la constante $c/|\mathbf{n}|$ (figura 41). Sea $\mathbf{P}_0 = \dfrac{c}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$. Entonces $\mathbf{n}\cdot\mathbf{P}_0 = c$, y la ecuación 11.5 es equivalente a la ecuación

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0) = 0.$$

El conjunto de todos los puntos P que satisfacen 11.4 u 11.5 es, por tanto, una recta ortogonal a **n**. Una ecuación de la forma 11.4 se llama *ecuación lineal.* Hemos demostrado, por tanto, que *toda ecuación lineal es la ecuación de una recta.*

La distancia de un punto **Q** *a una recta* $\mathcal{L}$ —denotada por $d(\mathbf{Q}, \mathcal{L})$— es la distancia de **Q** a $\mathcal{L}$ medida a lo largo de una recta ortogonal a $\mathcal{L}$

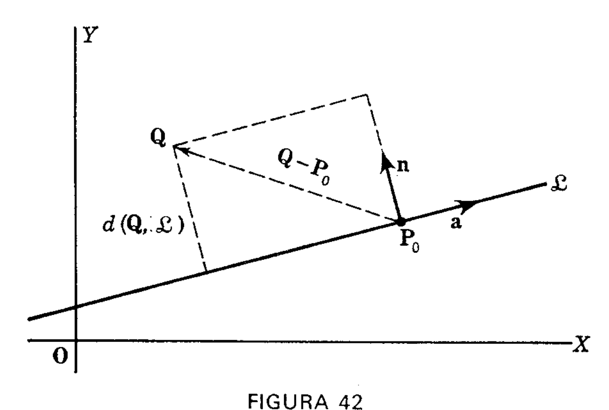


FIGURA 42

(figura 42); es decir, $d(\mathbf{Q}, \mathcal{L})$ es la distancia más corta de **Q** a $\mathcal{L}$. Sea $\mathcal{L}$ la recta cuya ecuación es 11.5. El punto $\mathbf{P}_0 = \dfrac{c}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$ está sobre $\mathcal{L}$ y es la intersección de $\mathcal{L}$ con la recta que pasa por el origen paralela a **n**. Por tanto $|c|/|\mathbf{n}|$ es la distancia del origen a la recta $\mathcal{L}$. Si $c > 0$, la recta se alcanza yendo del origen la distancia $|c|/|\mathbf{n}|$ en la dirección de **n**. Si $c < 0$, la recta se alcanza recorriendo la distancia $|c|/|\mathbf{n}|$ en la dirección opuesta a la de **n**.

Sea $\mathcal{L}$ una recta cualquiera y sea **n** un vector no nulo cualquiera ortogonal a $\mathcal{L}$ (figura 42). Si $\mathcal{L}$ es paralela a **a**, podemos siempre elegir $\mathbf{n} = \mathbf{a}^{\perp}$. Sea $\mathbf{P}_0$ cualquier punto sobre $\mathcal{L}$. La distancia de **Q** a $\mathcal{L}$ es entonces (problema 5)

11.7 $$d(\mathbf{Q}, \mathcal{L}) = |\text{Comp}_{\mathbf{n}}(\mathbf{Q}-\mathbf{P}_0)| = \left|(\mathbf{Q}-\mathbf{P}_0)\cdot\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right|.$$

11.8 Ejemplo. Identifíquense las rectas

a) $\mathcal{L}_1$: $3x-4y = 0$
b) $\mathcal{L}_2$: $4x+y = 8$.

¿Cuál es la distancia de $\mathcal{L}_2$ al origen?

SOLUCIÓN. *a*) $\mathcal{L}_1$ es la recta que pasa por el origen ortogonal a $(3, -4)$.
b) $\mathcal{L}_2$ es la recta que pasa por el punto $(0, 8)$ ortogonal a $(4, 1)$.

$$d(\mathbf{0}, \mathcal{L}_2) = \frac{|c|}{|\mathbf{n}|} = \frac{8}{\sqrt{17}}.$$

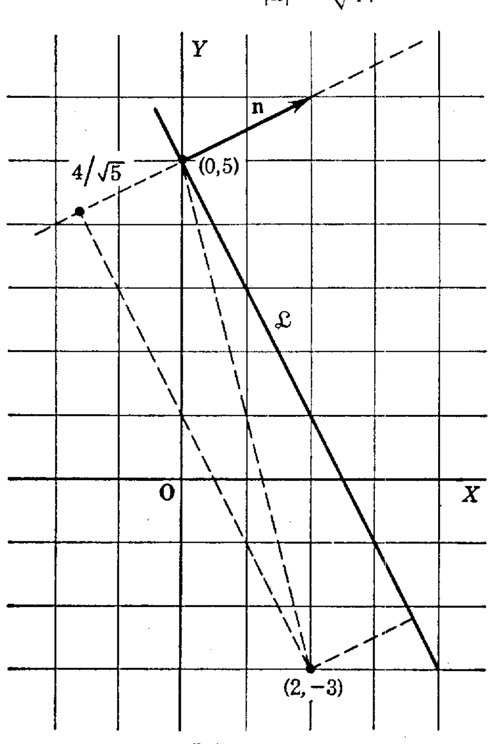


FIGURA 43

11.9 Ejemplo. Determínese la distancia del punto $(2, -3)$ a la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $(0, 5)$ y es paralela a $(1, -2)$.

SOLUCIÓN. (Figura 43.) $\mathcal{L}$ es ortogonal a $(2, 1)$. De donde

$$d((2, -3), \mathcal{L}) = \left|[(2, -3)-(0, 5)] \cdot \frac{(2, 1)}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|4-8|}{\sqrt{5}} = 4/\sqrt{5}.$$

El conjunto $\langle \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1 \rangle$ de puntos en R^2 definido por

11.10 $$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1 \rangle &= \{\mathbf{P}_0 + t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \mid t \in \langle 0, 1 \rangle\} \\ &= \{(1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \mid t \in \langle 0, 1 \rangle\} \end{aligned}$$

se llama *segmento rectilíneo abierto* de *puntos extremos* $\mathbf{P}_0$ *y* $\mathbf{P}_1$ (figura 44).

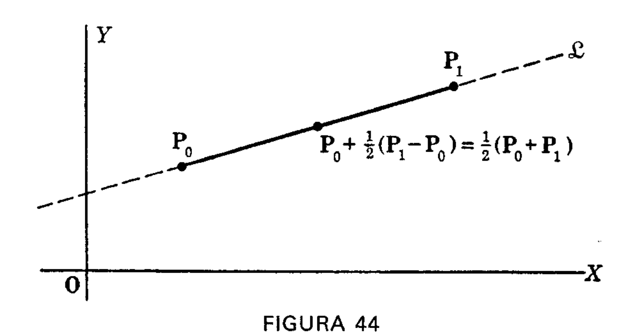


FIGURA 44

El conjunto $[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1]$ de puntos en R^2 definido por

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1] &= \{\mathbf{P}_0 + t(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \mid t \in [0, 1]\} \\ &= \{(1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \mid t \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

se llama *segmento rectilíneo cerrado* de *puntos extremos* $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$.

La *longitud* de un segmento rectilíneo se define como la distancia entre sus puntos extremos.

Los segmentos rectilíneos se encuentran en la recta que une sus puntos extremos. El segmento rectilíneo cerrado contiene sus puntos extremos. El segmento rectilíneo abierto no los contiene. El punto

$$\mathbf{P}_0 + \tfrac{1}{2}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1)$$

es equidistante de $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$ y se llama *punto medio* de $\langle \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1 \rangle$ y $[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1]$ (figura 44). La *mediatriz* de un segmento rectilíneo $[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1]$ (o $\langle \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1 \rangle$) es la recta que pasa por el punto medio de $[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1]$ ortogonal a la recta que pasa por $\mathbf{P}_0$ y por $\mathbf{P}_1$ (figura 45). Una ecuación para la mediatriz $\mathcal{L}$ de $[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1]$ es, por tanto,

11.11 $$(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) \cdot [\mathbf{P} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1)] = 0.$$

11.12 Ejemplo. Muéstrese que la mediatriz de un segmento rectilíneo es el conjunto de todos los puntos que equidistan de sus puntos extremos.

SOLUCIÓN. (Figura 45.) Sea $\mathcal{L}$ la mediatriz de $[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1]$, $\mathbf{P}_0 \neq \mathbf{P}_1$. La ecuación 11.11 es una ecuación de $\mathcal{L}$. Un punto $\mathbf{P}$ está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo

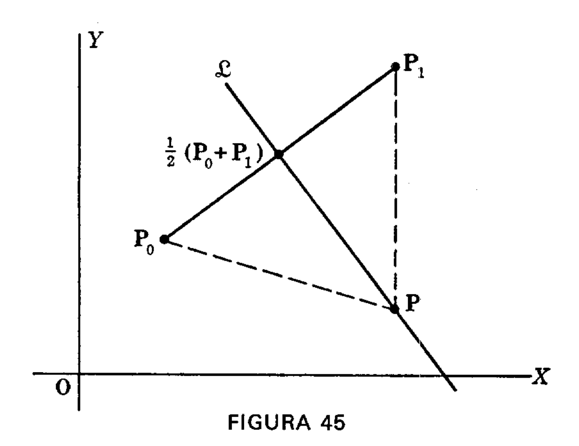


FIGURA 45

si $\frac{1}{2}(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)$ es ortogonal a $\mathbf{P}-\frac{1}{2}(\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_1)$. Según la definición 6.6 de ortogonalidad (pág. 72) esto significa que **P** está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si

$$|\tfrac{1}{2}(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)+[\mathbf{P}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_1)]| = |\tfrac{1}{2}(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)-[\mathbf{P}-\tfrac{1}{2}(\mathbf{P}_0+\mathbf{P}_1)]|\,;$$

es decir, si y sólo si

$$|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0| = |\mathbf{P}_1-\mathbf{P}|.$$

De donde $\mathcal{L}$ es el conjunto de todos los puntos equidistantes de $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$.

Problemas

1. Proporciónese una ecuación para cada una de las siguientes rectas:

a) La recta que pasa por $(2, -1)$ ortogonal a $(2, 8)$

b) La recta que pasa por $(2, -1)$ paralela a $(2, 8)$

c) La recta que une los puntos $(1, 3)$ y $(4, 2)$

d) La recta que pasa por el punto $(-2, 0)$ ortogonal a la recta definida en **b**

e) La recta que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ y $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$

f) La recta que pasa por el punto (x_0, y_0) paralela a $(1, m)$.

2. Sean

1) $\mathcal{L}_1$, la recta que pasa por $(1, 4)$ y $(2, -3)$

2) $\mathcal{L}_2$, la recta que pasa por el origen paralela a $(1, 7)$

3) $\mathcal{L}_3$, la recta $\{(2t-1, 3t+2)\}$

4) $\mathcal{L}_4$, la recta cuya ecuación es $2x+3y = 4$.

Determínense si los siguientes pares son o no ortogonales:

a) $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ *b*) $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_3$ *c*) $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_4$

d) $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_3$ *e*) $\mathcal{L}_4$ y $\mathcal{L}_3$ *f*) $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_4$.

3. Identifíquense las rectas cuyas ecuaciones son

a) $3x-2y = 0$ *b*) $2y+7x = 14$

c) $2(x-3)+4(y+2) = 0$ *d*) $y = 2x+7$.

4. Determínense las distancias al origen de las rectas a continuación dadas.

a) $\mathcal{L}_1$: $4x-3y = 10$
b) $\mathcal{L}_2$: $7x+5y = 18$
c) $\mathcal{L}_3$: la recta que pasa por $(1, 3)$ paralela a $(1, \frac{1}{2})$
d) $\mathcal{L}_4$: $x = 5-2t$
$y = -2+4t$.

5. Derívese la ecuación 11.7.
Sugerencia: Nótese que

$$\mathbf{Q}-\mathbf{P}_0 = \mathbf{Proy_a}(\mathbf{Q}-\mathbf{P}_0)+\mathbf{Proy_n}(\mathbf{Q}-\mathbf{P}_0).$$

Por tanto $\mathbf{P}_0+\mathbf{Proy_a}(\mathbf{Q}-\mathbf{P}_0) = \mathbf{Q}-\mathbf{Proy_n}(\mathbf{Q}-\mathbf{P}_0)$.

6. Determínese la distancia del punto $(5, 2)$ a cada una de las rectas del problema 4.

7. Demuéstrese que $[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1]$ es el conjunto de todos los puntos $\mathbf{P}$ con la propiedad de que

$$|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|+|\mathbf{P}_1-\mathbf{P}| = |\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0|.$$

8. Determínese la mediatriz del segmento rectilíneo con puntos extremos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$.

a) $\mathbf{P}_0 = (a, 0)$ y $\mathbf{P}_1 = (b, 0)$
b) $\mathbf{P}_0 = (1, 0)$ y $\mathbf{P}_1 = (0, 1)$
c) $\mathbf{P}_0 = (2, 3)$ y $\mathbf{P}_1 = (-7, 5)$
d) $\mathbf{P}_0 = (13, -18)$ y $\mathbf{P}_1 = (28, 35)$
e) $\mathbf{P}_0 = (5, -8)$ y $\mathbf{P}_1 = (-3, 8)$.

9. Proporciónense ecuaciones paramétricas para cada una de las rectas del problema 3.

10. Demuéstrese que los puntos $\frac{2}{3}\mathbf{P}_0+\frac{1}{3}\mathbf{P}_1$ y $\frac{1}{3}\mathbf{P}_0+\frac{2}{3}\mathbf{P}_1$ trisectan el segmento rectilíneo $[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1]$.

11. Localícense los puntos que trisectan a $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$ donde:

a) $\mathbf{P}_0 = (0, 0)$ y $\mathbf{P}_1 = (3, 0)$
b) $\mathbf{P}_0 = (0, 0)$ y $\mathbf{P}_1 = (3, 3)$
c) $\mathbf{P}_0 = (3, -5)$ y $\mathbf{P}_1 = (-7, -12)$
d) $\mathbf{P}_0 = (5, 0)$ y $\mathbf{P}_1 = (13, -11)$.

12. Una *circunferencia* $\mathcal{C}(\mathbf{P}_0, r)$ *con centro* $\mathbf{P}_0$ y *radio* r ($r > 0$) es el conjunto de todos los puntos $\mathbf{P}$ cuya distancia a $\mathbf{P}_0$ es r; es decir

$$\mathcal{C}(\mathbf{P}_0, r) = \{\mathbf{P} \mid |\mathbf{P}-\mathbf{P}_0| = r\}.$$

Demuéstrese que si un par de circunferencias se intersecta en dos puntos, entonces la recta que une los centros de las circunferencias es ortogonal a la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias.

13. Sean $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0) = 0$ y $\mathbf{n}'\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{P}'_0) = 0$ ecuaciones de las rectas $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ respectivamente. Demostrar que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son paralelas si y sólo si $\mathbf{n}$ y $\mathbf{n}'$ son paralelos.

14. Demostrar que a través de tres puntos no colineales pasa una y sólo una circunferencia. (Puede usarse el teorema 12.6.)

15. Determínese tanto analítica como gráficamente el punto equidistante de:

a) (0, 0), (0, 2) y (1, 1)
b) (1, 0), (1, 4) y (3, 2)
c) (4, 6), (−3, −1) y (5, 5).

12. INTERSECCIÓN DE RECTAS. ECUACIONES LINEALES SIMULTÁNEAS

Antes de comenzar a considerar el problema de la intersección de rectas, ampliaremos el teorema 8.1 (pág. 80). Este teorema nos dice que todo vector $\mathbf{a}$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}^\perp$ ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$). Demostramos que este teorema es cierto si $\mathbf{b}$ y $\mathbf{b}^\perp$ se reemplazan por cualquier par de vectores no paralelos.

12.1 Definición. *Los vectores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *se dice que son* ***linealmente independientes*** *si* $s\mathbf{a}+t\mathbf{b} = \mathbf{0}$ *implica* $s = 0$ *y* $t = 0$. *Si* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *no son linealmente independientes, se dice que son* ***linealmente dependientes***.

La dependencia lineal de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es, por tanto, equivalente a la existencia de números s y t, no ambos cero, tales que $s\mathbf{a}+t\mathbf{b} = \mathbf{0}$. No es difícil ver que es una consecuencia directa de la definición de paralelismo entre vectores que los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son linealmente dependientes si y sólo si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos (problema 11). Probamos este resultado, pero hacemos uso del hecho de que en $\mathbb{R}^2$ los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b} = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^\perp = 0$. Hacemos esto porque este método de prueba es más cercano a los métodos que en esta sección se usan.

12.2 Teorema. *Los vectores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *son linealmente independientes si y sólo si* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *no son paralelos.*

PRUEBA. Supongamos que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son no paralelos y que $s\mathbf{a}+t\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b} = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^\perp \neq \mathbf{0}$, y

$$\mathbf{a}^\perp\cdot(s\mathbf{a}+t\mathbf{b}) = t(\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b}) = 0$$
$$\mathbf{b}^\perp\cdot(s\mathbf{a}+t\mathbf{b}) = s(\mathbf{b}^\perp\cdot\mathbf{a}) = 0.$$

De donde $s = 0$ y $t = 0$. Hemos demostrado por tanto que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ no paralelos implica $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ linealmente independientes. Supongamos ahora que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son

paralelos. Entonces, para algún número real r

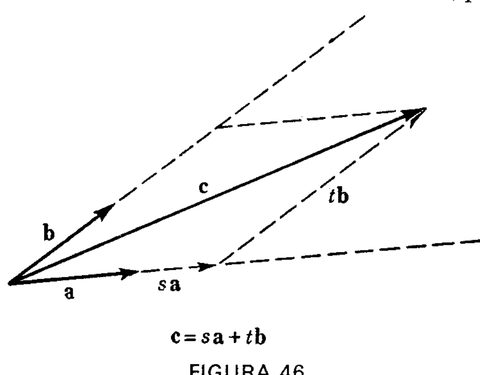
$$\mathbf{a} = r\mathbf{b} \quad \text{o} \quad \mathbf{b} = r\mathbf{a}.$$

De donde

$$\mathbf{a} - r\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{o} \quad r\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0};$$

es decir, existen números s y t, no ambos cero, tales que $s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ($s = 1$, $t = -r$ o $s = r$, $t = -1$), y $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son linealmente dependientes. Esto completa la prueba.

El siguiente teorema es una extensión del teorema 8.1, pág. 80 (figura 46).



$\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

FIGURA 46

12.3 Teorema. *Si* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *son linealmente independientes no (paralelos), entonces para cada vector* $\mathbf{c}$ *hay números únicos* s *y* t *tales que* $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.

PRUEBA. Supongamos que $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Entonces

$$\mathbf{a}^{\perp} \cdot \mathbf{c} = t\mathbf{a}^{\perp} \cdot \mathbf{b}$$
$$\mathbf{b}^{\perp} \cdot \mathbf{c} = s\mathbf{b}^{\perp} \cdot \mathbf{a}.$$

Como $\mathbf{a}^{\perp} \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}^{\perp} \cdot \mathbf{a} \neq 0$,

$$t = \frac{\mathbf{a}^{\perp} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{a}^{\perp} \cdot \mathbf{b}}$$

12.4

$$s = \frac{\mathbf{b}^{\perp} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{b}^{\perp} \cdot \mathbf{a}}.$$

Si s y t existen, son únicos y están dados por 12.4. Con $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, y $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, es inmediato verificar que éstas son soluciones (problema 4).

12.5 Ejemplo. Exprésese $\mathbf{c} = (7, \frac{17}{3})$ como una combinación lineal de $\mathbf{a} = (3, 1)$ y $\mathbf{b} = (1, 2)$.

SOLUCIÓN. (Figura 47.) Como $\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}=(-1,3)\cdot(1,2)=5$, los vectores no son paralelos, y sabemos que hay números únicos s y t tales que $\mathbf{c} = s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$.

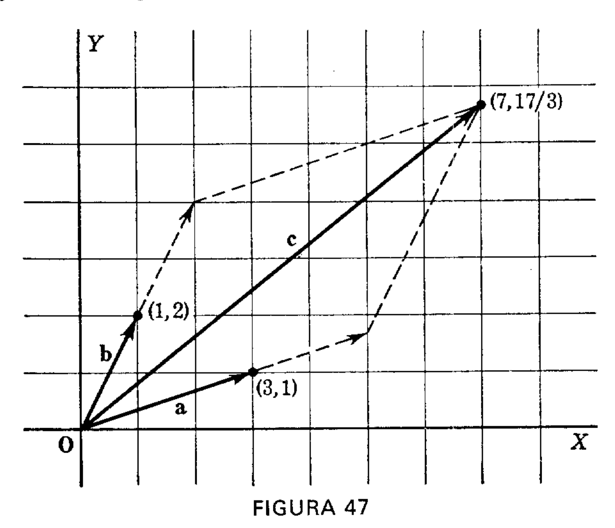


FIGURA 47

Tomando productos escalares de $\mathbf{c}$ con $\mathbf{a}^{\perp}$ y $\mathbf{b}^{\perp}$, obtenemos

$$t = \frac{\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}} = \frac{(-1,3)\cdot(7,\frac{17}{3})}{5} = 2$$

y

$$s = \frac{\mathbf{b}^{\perp}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}^{\perp}\cdot\mathbf{a}} = \frac{(-2,1)\cdot(7,\frac{17}{3})}{-5} = \frac{5}{3}.$$

COMPROBACIÓN

$$\tfrac{5}{3}(3,1)+2(1,2) = (7,\tfrac{5}{3}+4) = (7,\tfrac{17}{3}).$$

Sabemos que las rectas paralelas o no se intersectan o coinciden. Sabemos también que las rectas no paralelas se intersectan cuando más en un punto. Probaremos ahora que todo par de rectas no paralelas se intersecta. Así pues, si tenemos rectas distintas ($\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$), son paralelas y no se intersectan o no son paralelas y se intersectan en un y sólo en un punto.

12.6 Teorema. *Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son rectas no paralelas en el plano euclidiano* R^2, *entonces se intersectan en y solamente en un punto.*

PRUEBA. (Figura 48.) Sabemos que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tienen cuando más un punto de intersección. Mostraremos que, como consecuencia del teorema 12.3, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se intersectan. Sean $\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{P}_0+u\mathbf{a}\,|\,u\in R\}$ y $\mathcal{L}_2 = \{\mathbf{Q}_0+v\mathbf{b}\,|\,v\in R\}$.

$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no paralelas implica **a** y **b** no paralelas (linealmente independientes).

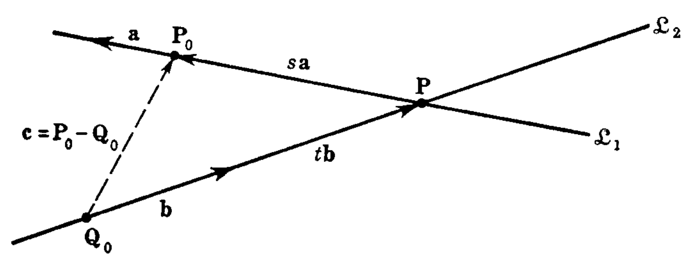


FIGURA 48

Entonces existen números s y t tales que (con $\mathbf{c} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{Q}_0$)

$$\mathbf{c} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{Q}_0 = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

De donde

$$\mathbf{P}_0 - s\mathbf{a} = \mathbf{Q}_0 + t\mathbf{b}.$$

Por tanto, el punto $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 - s\mathbf{a} = \mathbf{Q}_0 + t\mathbf{b}$ está tanto en $\mathcal{L}_1$ como en $\mathcal{L}_2$ y es el punto de intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$.

Los siguientes ejemplos ilustran métodos para la determinación de la intersección de rectas.

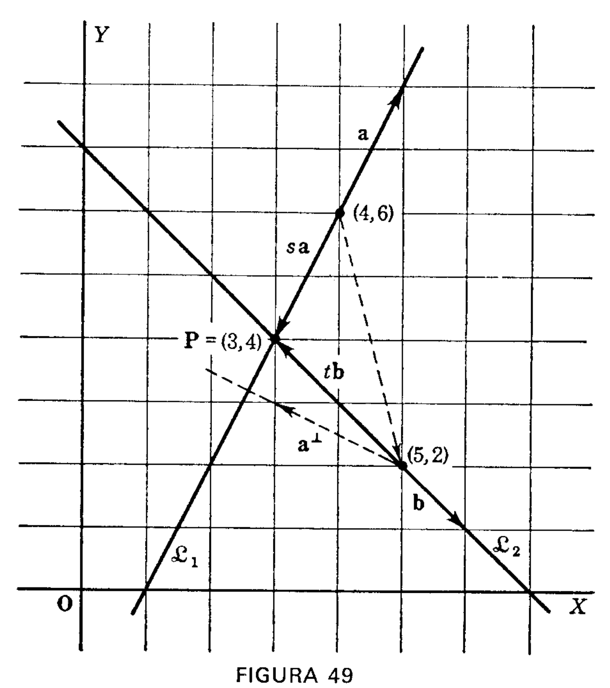


FIGURA 49

12.7 Ejemplo. Determínese la intersección de las rectas

$$\mathcal{L}_1 = \{(4, 6)+s(1, 2) \mid s \in \mathrm{R}\}$$

y

$$\mathcal{L}_2 = \{(5, 2)+t(1, -1) \mid t \in \mathrm{R}\}.$$

SOLUCIÓN 1. (Figura 49.) Como $(1, 2)^{\perp}\cdot(1, -1) = (-2, 1)\cdot(1, -1) = -3$, sabemos que las rectas no son paralelas, y la intersección es un punto **P**. Por tanto para algún s, $t \in \mathrm{R}$

$$\mathbf{P} = (4, 6)+s(1, 2) = (5, 2)+t(1, -1).$$

Por consiguiente

12.8 $$s(1, 2)-t(1, -1) = (1, -4).$$

Tomando el producto escalar de esta ecuación con el vector $(1, 2)^{\perp} = (-2, 1)$, obtenemos

$$-(-2, 1)\cdot(1, -1)t = (-2, 1)\cdot(1, -4),$$

de modo que

$$3t = -6,$$

y

$$t = -2.$$

De donde

$$\mathbf{P} = (5, 2)-2(1, -1) = (3, 4).$$

Para comprobar este resultado tomamos el producto escalar de la ecuación 12.8 con $(1, -1)^{\perp} = (1, 1)$. Obtenemos entonces

$$3s = -3, \quad s = -1,$$

y

$$\mathbf{P} = (4, 6)-(1, 2) = (3, 4).$$

SOLUCIÓN 2. La ecuación 12.8 puede también resolverse como sigue (recuérdese que sabemos que la ecuación tiene una solución):

$$s(1, 2)-t(1, -1) = (1, -4)$$

$$(s-t, 2s+t) = (1, -4)$$

$$\begin{cases} s-t = 1 \\ 2s+t = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = 1+t \\ 2(1+t)+t = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -2 \\ s = 1-2 = -1. \end{cases}$$

Calculando el punto de intersección y al mismo tiempo comprobando, obtenemos

$$\mathbf{P} = (4, 6)-(1, 2) = (5, 2)-2(1, -1) = (3, 4).$$

12.9 Ejemplo. Determínese la intersección de la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por $(0, 1)$ y $(2, 4)$ y la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por $(-2, 3)$ y $(2, 9)$.

SOLUCIÓN 1. $\mathcal{L}_1$ es paralela a $(2, 4)-(0, 1) = (2, 3)$ y $\mathcal{L}_2$ es paralela a $(2, 9)-(-2, 3) = (4, 6) = 2(2, 3)$. Luego $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas. Como $(0, 1)$ no está sobre $\mathcal{L}_2((0, 1)-(-2, 3) = (2, -2)$ y $(2, -2)$ no es paralelo a $(2, 3))$, las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no se intersectan.

SOLUCIÓN 2.

$$\mathcal{L}_1 = \{(0, 1)+s(2, 3)\}$$
$$\mathcal{L}_2 = \{(-2, 3)+t(2, 3)\}.$$

Supongamos que las rectas se intersectan; es decir, para ciertos s y t,

$$(0, 1)+s(2, 3) = (-2, 3)+t(2, 3).$$

Multiplicando por $(2, 3)^{\perp} = (-3, 2)$, obtenemos

$$(0, 1)\cdot(-3, 2) = (-2, 3)\cdot(-3, 2)$$

y

$$2 = 12.$$

La hipótesis de que las rectas se intersectan nos lleva a una contradicción. Por tanto, las rectas no se intersectan.

12.10 Ejemplo. Determínese la intersección de las rectas cuyas ecuaciones son

$$\mathcal{L}_1:\quad 2x-3y = 5$$

12.11

$$\mathcal{L}_2:\quad 4x+\ \ y = 8.$$

SOLUCIÓN. Las rectas son paralelas si y sólo si sus normales $(2, -3)$ $(4, 1)$ son paralelas

$$(2, -3)^{\perp}\cdot(4, 1) = (3, 2)\cdot(4, 1) = 14.$$

Por tanto, las rectas no son paralelas. El par de ecuaciones es equivalente a

$$(2x-3y, 4x+y) = x(2, 4)+y(-3, 1) = (5, 8).$$

[Nótese que los vectores $(2, 4)$ y $(-3, 1)$ están en columnas en la ecuación 12.11.]

De donde

$$(-1, -3)\cdot(2, 4)x = (-1, -3)\cdot(5, 8)$$
$$(-4, 2)\cdot(-3, 1)y = (-4, 2)\cdot(5, 8).$$

Por tanto

$$x = \frac{-5-24}{-2-12} = \frac{29}{14}$$

y

$$y = \frac{-20+16}{12+2} = \frac{-4}{14} = \frac{-2}{7}.$$

El punto de intersección es $(\frac{29}{14}, -\frac{2}{7})$.

COMPROBACIÓN.

$$2(\tfrac{29}{14})-3(-\tfrac{2}{7}) = \tfrac{35}{7} = 5$$
$$4(\tfrac{29}{14})-\tfrac{2}{7} = \tfrac{56}{7} = 8.$$

El siguiente teorema es una consecuencia directa del teorema 12.6.

12.12 Teorema. *Las ecuaciones lineales simultáneas*

$$a_1x+b_1y = c_1$$
$$a_2x+b_2y = c_2$$

tienen una solución única (x, y) *si y sólo si* (a_1, b_1) *y* (a_2, b_2) *no son paralelos* [*es decir, si y sólo si* $(a_1, b_1)^{\perp}\cdot(a_2, b_2) = a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$].

PRUEBA. Si consideramos estas ecuaciones como ecuaciones de rectas, entonces una solución (x, y) de las ecuaciones corresponde a un punto de intersección de las rectas. De aquí que las ecuaciones tengan una solución única si y sólo si las rectas no son paralelas; es decir, si y sólo si

12.13 $$(a_1, b_1)^{\perp}\cdot(a_2, b_2) = a_1b_2-a_2b_1 = (a_1, a_2)^{\perp}\cdot(b_1, b_2) \neq 0.$$

Esto completa la prueba.

La ecuación 12.13 expresa el hecho de que los vectores (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son paralelos (linealmente dependientes) si y sólo si los vectores (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son paralelos. La cantidad $a_1b_2-a_2b_1$ se denota a menudo por

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

y se llama "determinante".

Problemas

1. Exprésese $\mathbf{c}$ como una combinación lineal de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, cuando

a) $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (0, 1)$, $\mathbf{c} = (3, -2)$

b) $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$, $\mathbf{c} = (3, -2)$

c) $\mathbf{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, $\mathbf{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$, $\mathbf{c} = (3, -2)$

d) $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1)$, $\mathbf{c} = (3, 4)$

Ilústrese gráficamente.

2. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales y de longitud unitaria (dos vectores así relacionados se llaman a veces *vectores ortonormales*), demostrar que

$$\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}+(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}.$$

3. Demuéstrese que:

a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}^{\perp}$

b) $\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b} = -\mathbf{b}^{\perp}\cdot\mathbf{a}$

c) $(\mathbf{b}^{\perp}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}-(\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}$ es paralelo a $\mathbf{c}$.

4. Verifíquese que 12.4 da una solución de $\mathbf{c} = s\mathbf{a}+t\mathbf{b}$.

5. Determínese la intersección de:

a) $\{(-4, 0)+s(1, 2)\}$ y $\{(0, 1)+t(2, -3)\}$.

b) La recta que pasa por el punto $(2, 3)$ paralela a $(1, \frac{1}{3})$ y la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ paralela a $(1, -\frac{1}{3})$.

c) La recta que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y la recta que pasa por el origen paralela a $(1, 1)$.

d) La recta que pasa por los puntos $(3, 7)$ y $(9, 10)$ y la recta que pasa por $(2, -1)$ y $(11, 8)$.

e) La recta que pasa el punto $(4, 2)$ ortogonal al vector $(5, 3)$ y la recta que pasa por el punto $(-1, -1)$ paralela a la recta cuya ecuación es $10x-6y = 3$.

6. Determínense todas las soluciones de cada uno de los siguientes pares de ecuaciones lineales.

a) $x-y = 2$
$x+y = 2$

b) $3x+2y = 7$
$-x+4y = 3$

c) $6x-9y = 15$
$x-\frac{3}{2}y = 7$

d) $6x-9y = 15$
$x-\frac{3}{2}y = \frac{5}{2}$

e) $x-y = 0$
$x+y = 0$

f) $3x+2y = 0$
$x-2y = 0$

7. Las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y &= 0 \\ a_2x+b_2y &= 0 \end{aligned}$$

se dice que son *homogéneas*. La solución $x = 0$, $y = 0$ se dice que es la solución trivial. Demuéstrese que el par de ecuaciones homogéneas tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$(a_1, a_2)^{\perp}\cdot(b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1, b_1)^{\perp}\cdot(a_2, b_2) = 0.$$

¿Cuál es el significado geométrico de este resultado?

8. ¿Cuáles son las soluciones no triviales, si existen, de los siguientes pares de ecuaciones homogéneas?

a) $3x-2y = 0$
$2x-3y = 0$

b) $4x+\frac{1}{2}y = 0$
$8x+y = 0$

c) $9x-27y = 0$
$-3x+9y = 0$

d) $-4x+5y = 0$
$3x+7y = 0$

9. ¿Para qué valores de λ tiene soluciones no triviales el siguiente par de ecuaciones?

$$3x-2y = \lambda x$$
$$-2x+3y = \lambda y.$$

¿Cuáles son las soluciones?

10. Si la velocidad $\mathbf{v}$ de una partícula es un vector constante y si la particula comienza en $\mathbf{P}_0$ en el instante t_0, la posición $\mathbf{P}$ de la partícula en el instante t es $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0+(t-t_0)\mathbf{v}$. La recta $\mathcal{L} = \{\mathbf{P}_0+(t-t_0)\mathbf{v} \mid t\in\mathrm{R}\}$ se llama *trayectoria* de la partícula. La partícula p_1 tiene una velocidad $\mathbf{v}_1 = (100, 30)$ y comienza en el origen en el tiempo $t = 0$. Una segunda partícula p_2 tiene una velocidad $\mathbf{v}_2 = (50, -30)$ y comienza en $(0, 270)$ en el tiempo $t = 0$. ¿Dónde se intersectan las trayectorias de las dos partículas? ¿Chocan las partículas? ¿En qué instante debe dejar la partícula p_1 el origen para que choque con p_2?

11. Pruébese directamente por la definición de paralelismo que **a** y **b** son linealmente dependientes si y sólo si **a** y **b** son paralelos.

12. Tres vectores **a**, **b**, y **c** se dice que son *linealmente independientes* si

$$r\mathbf{a}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

implica $r = s = t = 0$. Los vectores se dice que son *linealmente dependientes* si no son independientes. Muéstrese que en V_2 cualesquier tres vectores son linealmente dependientes; es decir, el máximo número de vectores linealmente independientes en V_2 es 2.

Sugerencia. Muéstrese primero que **a** y **b** linealmente dependientes implica **a**, **b**, y **c** linealmente dependientes.

13. PENDIENTE

La dirección de una recta se especifica por un vector distinto de cero. Si $\mathcal{L}$ es una recta paralela a un vector no nulo $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$† y si r es un número real distinto de cero, entonces la recta es también paralela a $r\mathbf{a} = (ra_1, ra_2)$. Es a menudo conveniente especificar la dirección de una recta que pasa por un solo número. Tal especificación es la "pendiente" m de una recta.

Si $\mathcal{L}$ es una vertical (es decir, $\mathcal{L}$ es una recta paralela al eje Y), entonces $a_1 = 0$ y $\mathbf{a} = (0, a_2)$. Si $\mathcal{L}$ es una recta no vertical, entonces $a_1 \neq 0$ y $\frac{1}{a_1}\,\mathbf{a} = (1, a_2/a_1)$ es el único vector de la forma $(1, m)$ paralelo a $\mathcal{L}$.

13.1 Definición. *La **pendiente** m de una recta no vertical $\mathcal{L}$ está definida por $m = \frac{a_2}{a_1}$ donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ es un vector no nulo paralelo a $\mathcal{L}$.*

Por tanto, si m es la pendiente de una recta $\mathcal{L}$, entonces $\mathcal{L}$ es paralela al vector $(1, m)$, y vemos que m es una medida de la inclinación de $\mathcal{L}$ (figura 50). La pendiente m de una recta $\mathcal{L}$ es el número de unidades que se eleva la

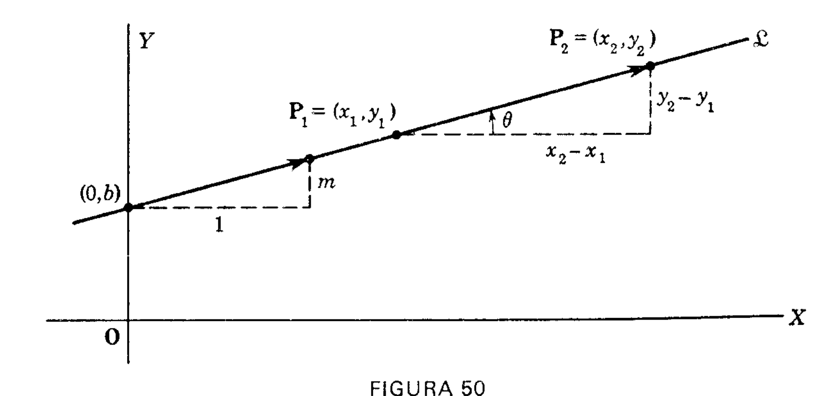


FIGURA 50

recta por unidad horizontal. Si m es positivo (negativo), la recta sube (baja) al ir de izquierda a derecha. Si $m = 0$, la recta es paralela al eje X y se dice que es *horizontal*.

Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ es un vector cualquiera paralelo a una recta no vertical, entonces, por definición, $m = a_2/a_1$. En particular, si se conocen dos puntos distintos de la recta $\mathcal{L}$, $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$, entonces $\mathcal{L}$ es paralela a $\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$; la recta es no

† Los números a_1, a_2 se llaman a menudo *números direccionales* de la recta.

vertical si $x_1 \neq x_2$, y

13.2 $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Posteriormente veremos que $m = \tan\theta$, donde θ es el ángulo que forma la recta con el eje X [el ángulo entre los vectores $(1, 0)$ y $(1, 0)$].

El símbolo "∞", leído "infinito", se adopta para designar la pendiente de una recta vertical. El símbolo no es un número. La proposición "$\mathcal{L}$ es una recta de pendiente ∞" ha de interpretarse por "$\mathcal{L}$ es una recta vertical". Decir que "$\mathcal{L}$ es una recta de pendiente $m \neq \infty$" es decir que "$\mathcal{L}$ es una recta no vertical". Con esta convención para rectas verticales, vemos que *dos rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.* Vemos también que una recta queda determinada si conocemos su pendiente y uno de sus puntos: Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ con pendiente m; si m es un número real, la recta es no vertical (es decir, $m \neq \infty$) y es paralela a $(1, m)$; de donde

13.3 $$\mathcal{L} = \{(x_0, y_0) + t(1, m) \mid t \in \mathrm{R}\};$$

si $m = \infty$, entonces la recta es vertical y

$$\mathcal{L} = \{(x_0, y_0) + t(0, 1) \mid t \in \mathrm{R}\}$$

o

13.4 $$\mathcal{L} = \{(x_0, y) \mid y \in \mathrm{R}\}.$$

Si $\mathcal{L}$ es una recta no vertical, entonces intersecta al eje Y. Sea $(0, b)$ el punto de intersección de $\mathcal{L}$ con el eje Y (figura 50). El número b se llama *intercepción con* Y o la *ordenada en el origen* de $\mathcal{L}$. Por tanto, si $\mathcal{L}$ es una recta de pendiente m e intercepción con Y b, entonces $\mathcal{L}$ es la recta por $(0, b)$ ortogonal a $(-m, 1)$. Por tanto $(-m, 1)\cdot((x, y) - (0, b)) = 0$, o

13.5 $$\mathcal{L}: \quad y = mx + b$$

es una ecuación de la recta de pendiente m y ordenada en el origen b.

13.6 Ejemplo. Determínese la pendiente m y la ordenada en el origen b de la recta $\mathcal{L} = \{(2t-3, 5t+7)\}$.

SOLUCIÓN. Como $(2t-3, 5t+7) = (-3, 7) + t(2, 5)$, la recta es paralela a $(2, 5)$. Luego $\mathcal{L}$ es paralela a $(1, \frac{5}{2})$ y $m = \frac{5}{2}$. La recta intersecta al eje Y cuando $2t - 3 = 0$; es decir, cuando $t = \frac{3}{2}$. El punto de intersección de $\mathcal{L}$ con el eje Y es, por tanto $(0, 5(\frac{3}{2}) + 7) = (0, \frac{29}{2})$, y $b = \frac{29}{2}$.

13.7 Ejemplo. Determínese la pendiente m y la intercepción con Y b de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $(3, 2)$ y $(1, 5)$

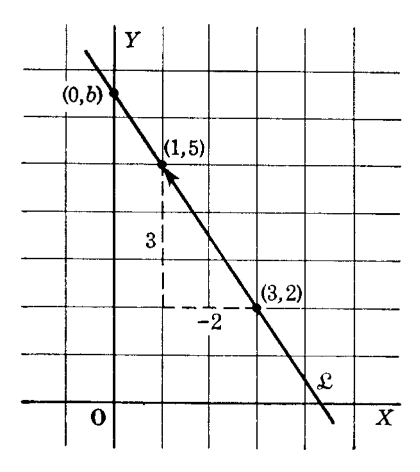


FIGURA 51

SOLUCIÓN. (Figura 51.) La recta es paralela a $(1, 5)-(3, 2) = (-2, 3)$, y

$$m = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

Por tanto $\mathcal{L} = \{(1, 5)+t(-2, 3)\}$. De donde $\mathcal{L}$ intersecta al eje Y cuando $1-2t = 0$ o en $t = \frac{1}{2}$; por tanto $(0, b) = (1, 5)+\frac{1}{2}(-2, 3) = (0, \frac{13}{2})$ y $b = \frac{13}{2}$.

13.8 Ejemplo. Determínese la recta que pasa por $(-2, 1)$ con pendiente $m = \infty$.

SOLUCIÓN 1. $\mathcal{L}$ es una recta vertical y por tanto

$$\mathcal{L} = \{(-2, 1)+t(0, 1)\} = \{(-2, 1+t)\}.$$

SOLUCIÓN 2. $\mathcal{L}$ es una recta vertical y por tanto

$$\mathcal{L} = \{(x_0, y) \mid y \in \mathrm{R}\}.$$

Como $(-2, 1)$ está sobre $\mathcal{L}$, $x_0 = -2$; de donde

$$\mathcal{L} = \{(-2, y) \mid y \in \mathrm{R}\}.$$

13.9 Ejemplo. Determínese la pendiente y la intercepción con Y de la recta cuya ecuación $2x+3y = 4$.

SOLUCIÓN. $\mathcal{L}$ es paralela a $(-3, 2)$. Por tanto $m = -\frac{2}{3}$. Para determinar la intercepción con Y tomamos $x = 0$ en la ecuación y encontramos que $y = \frac{4}{3}$. La intercepción de $\mathcal{L}$ con Y es, por tanto, $b = \frac{4}{3}$.

Problemas

1. Determínese la pendiente y la intercepción con Y de cada una de las siguientes rectas:

a) La recta que pasa por $(0, 3)$ y $(2, 6)$
b) La recta que pasa por $(-1, 5)$ y $(2, 7)$
c) La recta que pasa por $(-1, 2)$ paralela a la recta definida en (*a*)
d) La recta que pasa por $(2, 8)$ y $(2, -2)$
e) La recta que pasa por $(-5, 2)$ y $(5, 2)$
f) La recta cuya ecuación es $y = -2x+5$
g) La recta cuya ecuación es $3x-2y = 8$
h) La recta $x = 3s-2$
$y = -2s+5$.

2. Proporciónese una representación analítica de:

a) La recta con pendiente $-\frac{1}{2}$ e intercepción con Y $\frac{3}{2}$
b) La recta de pendiente 0 e intercepción con Y 5
c) La recta de pendiente ∞ que pasa por el punto $(7, 3)$
d) La recta de pendiente -1 que pasa por el punto $(1, 5)$
e) La recta que pasa por los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

3. Proporciónese una ecuación para:

a) La recta de pendiente -3 e intercepción con Y 4
b) La recta de pendiente ∞ que pasa por el punto $(3, -2)$
c) La recta de pendiente 0 que pasa por el punto $(3, -2)$
d) La recta de pendiente $-\frac{1}{2}$ que pasa por el punto $(5, -2)$
e) La recta de pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0).

4. Demuéstrese que las rectas no verticales $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ son ortogonales si y sólo si el producto de sus pendientes es -1 (es decir, $m_1 m_2 = -1$).

14. RESUMEN

En este capítulo hemos construido un modelo analítico de un plano euclidiano al que llamamos el plano euclidiano R^2. Hemos estudiado algunas de las propiedades básicas de R^2, y hemos visto por medio de ejemplos y problemas que tenemos a mano una herramienta poderosa para el estudio de la geometría. Aparte de colocar a la geometría euclidiana sobre una base analítica, mientras lo hacíamos hemos aprendido el álgebra básica de los vectores bidimensionales. Nuestra imagen geométrica de un vector es la de una flecha. En física e ingeniería nos encontraremos con lo que se llaman "cantidades vectoriales", que son cantidades que poseen magnitud y dirección. Estas cantidades se representan geométricamente por flechas y analíticamente por pares ordenados de números reales.

Cuando llegue el momento en que el lector tenga que estudiar tales cantidades, encontrará que su álgebra vectorial es aplicable y que a través del álgebra vectorial puede traducir los problemas físicos a problemas de análisis. Esto ya ha sido ilustrado con unos cuantos problemas. Después de aprender más ciencia, pueden estudiarse otras aplicaciones más significativas.

La geometría analítica que aquí hemos aprendido sirve para otro propósito. En el próximo capítulo comenzamos un estudio de conceptos de análisis que en sí no tienen relación alguna con la geometría. Sin embargo, encontraremos útil interpretarlos geométricamente. En esta forma comenzaremos a alcanzar un entendimiento y apreciación del significado de los conceptos. Esta interpretación geométrica ayudará también en la elaboración de demostraciones y en la solución de problemas.

Más adelante, a lo largo de nuestro estudio, encontraremos que la geometría analítica plana de este capítulo puede extenderse sin dificultad a la dimensión tres, a la dimensión cuatro y a cualquier dimensión arbitraria **n**. Hemos aprendido aquí las ideas esenciales en la aplicación del análisis a la geometría, y tendremos poca dificultad en comprender el modelo analítico para espacios de dimensión más alta.

Problemas

1. Proporciónense tantas representaciones analíticas diferentes como se pueda de la recta que pasa por los puntos distintos $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ y $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ donde $x_0 \neq x_1$. ¿Cuáles de estas representaciones dependen de la hipótesis de que $x_0 \neq x_1$?

2. Considérense los conjuntos

$$\{(t, t^2) \mid t = -4, -3, \ldots, 4\} \text{ y } \{(t^2, t) \mid t = -4, -3, \ldots, 4\}.$$

Ilústrense estos conjuntos gráficamente.

3. Si **a** es un número distinto de cero, muéstrese que

$$\{\mathbf{P}_0 + s\mathbf{a} \mid s \in \mathrm{R}\} = \{\mathbf{P}_0 + (at+b)\mathbf{a} \mid t \in \mathrm{R}\}.$$

4. Sean $\mathfrak{L}_1$ y $\mathfrak{L}_2$ rectas paralelas. Demuéstrese que todos los puntos de $\mathfrak{L}_2$ están a la misma distancia de $\mathfrak{L}_1$.

5. Proporciónense ecuaciones para las rectas de pendiente 3 cuya distancia al origen es 2. Ilústrense las soluciones gráficamente.

6. Determínense todos los puntos cuya distancia al eje Y es igual a su distancia al punto (4, 0).

7. Determínense todos los números x, y, z que satisfacen

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ 2x-y+z &= 0 \\ x+2y-z &= 4. \end{aligned}$$

8. ¿Es cierto que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ y $a \neq 0$ implica $\mathbf{b} = \mathbf{c}$? Justifique su respuesta.

9. Sea p_i una partícula de masa m_i localizada en $\mathbf{P}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$. El *centro de masa* del sistema de partículas se define como el punto

$$\overline{\mathbf{P}} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{P}_1 + m_2\mathbf{P}_2 + \cdots + m_n\mathbf{P}_n).$$

a) Demuéstrese que el centro de masa de un par de partículas se encuentra sobre el segmento rectilíneo que une las partículas. (La masa es una cantidad no negativa.)

b) Demuéstrese que el centro de masa de un par de partículas de igual masa es el punto medio del segmento rectilíneo que une las partículas.

c) Si cada partícula de un sistema se mueve de $\mathbf{P}_i$ a $\mathbf{P}_i + \mathbf{a}$, demuéstrese que el nuevo centro de masa del sistema es $\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{a}$.

d) Localícese el centro de masa de tres partículas de igual masa situadas en (0, 0), (1, 0), (0, 1).

e) Localícese el centro de masa de cuatro partículas de igual masa situadas en (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1).

10. Determínese a de modo que (a, 5), (1, 3), y (−2, 1) sean colineales.

11. ¿Son colineales los puntos (2, 3), (4, 2) y (8, 6)?

12. Exprésese (6, 7) como una combinación lineal de (1, 0) y (12, 14).

13. Exprésese (6, 7) como una combinación lineal de (1, 0) y (12, 13).

14. Exprésese (x, y) como una combinación lineal de (1, 1) y (−1, 1).

15. Determínese el componente de (6, 7) en la dirección de (12, 13).

16. Determínese el componente de (x, y) en la dirección de (−1, 1).

17. Proporciónese una definición para la región (conjunto de puntos) entre dos rectas paralelas. ¿Se encuentra el punto (4, 5) entre las rectas paralelas cuyas ecuaciones son $3x-7y = 12$ y $3x-7y = 3$?

18. Proporciónese una definición para la distancia entre un par de rectas paralelas. Si $\mathcal{L}_1$ es la recta que pasa por $\mathbf{P}_0$ paralela a $\mathbf{a}$ y $\mathcal{L}_2$ es la recta que pasa por $\mathbf{Q}_0$ paralela a $\mathbf{a}$, derívese una fórmula para la distancia entre las dos rectas.

19. Demuéstrese que los puntos $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son linealmente dependientes si y sólo si $\mathbf{O}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ son colineales.

20. Si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, demuéstrese que las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

tienen la solución única

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Capítulo

$f = (n)$ 3

Funciones

1. INTRODUCCIÓN

La idea de función es uno de los conceptos más fundamentales de la matemática. Si a cada objeto de un conjunto corresponde un único objeto de un segundo conjunto, entonces esta correspondencia se llama "función". Por ejemplo, la correspondencia entre los automóviles de una marca determinada y su número de serie es una función. Es una correspondencia del conjunto de todos los automóviles de esa marca al conjunto de enteros.

Discutamos ahora un ejemplo de una función que podemos encontrar en un laboratorio. Supongamos que tenemos una caja con un circuito eléctrico y terminales de entrada y salida. Para cada valor de voltaje de entrada en un determinado intervalo (en un cierto sistema de medida) el voltaje de salida toma cierto valor. Esto nos da una correspondencia de un

conjunto de números reales a un conjunto de números reales. Esta correspondencia es una función.

El propósito de un informe de laboratorio es describir el comportamiento de este circuito. Para hacer esto anotamos los valores del voltaje de entrada y los correspondientes valores del voltaje de salida. Esto nos da un conjunto de pares ordenados de números. El primer elemento de cada par ordenado es un valor del voltaje de entrada y el segundo elemento es el valor correspondiente del voltaje de salida. Este conjunto finito de pares ordenados da una descripción parcial de la función. Un conjunto infinito de pares ordenados, uno para cada número real en el intervalo de voltaje prescrito, sería una descripción completa de la función. Es posible que seamos o no capaces de completar la descripción dando una fórmula que constituye una regla para la correspondencia. En cualquiera de los casos podíamos presentar los resultados del experimento trazando una gráfica de la función, esto es, tomando el conjunto finito de pares ordenados obtenidos experimentalmente como puntos en el plano R^2 y dibujando una curva lisa por esos puntos. Esto constituiría una descripción aproximada de la función. Nuestra justificación para aproximar la función mediante una curva "lisa" se basa en la hipótesis física de que el proceso es "continuo". Esto hace surgir la cuestión de lo que entendemos por "lisa" y "continua". Cuestiones como éstas pertenecen al tema objeto del cálculo.

En este capítulo damos significados precisos a términos tales como función y gráfica de una función y definimos algunas de las operaciones básicas sobre funciones. Introducimos y estudiamos, además, algunas funciones especiales.

2. FUNCIONES

La idea básica de función es la de correspondencia de un conjunto $\mathcal{A}$ de objetos a un conjunto $\mathcal{B}$ de objetos. Ahora bien, una correspondencia de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ es equivalente a una colección $\mathcal{S}$ de pares ordenados (a, b) del producto cartesiano $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$: si el elemento b de $\mathcal{B}$ corresponde a a de $\mathcal{A}$, entonces el par ordenado (a, b) estará en $\mathcal{S}$, y si (a, b) está en $\mathcal{S}$, entonces b corresponde a a. Por otra parte, queremos que esta correspondencia sea tal que no exista ambigüedad alguna —un elemento y sólo un elemento de $\mathcal{B}$ ha de corresponder a cada elemento de $\mathcal{A}$. Esta limitación sobre una correspondencia se refleja en la colección de pares ordenados por la restricción de que ninguno de dos distintos pares ordenados puede tener un mismo primer elemento. Es pues, natural, además de conveniente, definir una función como un tipo especial de conjunto de pares ordenados.

2.1 Definición. *Una **función** es un conjunto de pares ordenados de elementos tales que ningunos dos pares distintos tienen el mismo primer elemento. El*

conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados se llama ***dominio*** *de la función, y el conjunto de los segundos elementos* ***rango*** *de la función.*

Las funciones se denotan usualmente por letras tales como f, g, h, F, G, H. Si f es una función, entonces $f(x)$, léase "f en x" o, simplemente, "$f\,x$", denota el segundo elemento del par ordenado cuyo primer elemento es x; $f(x)$ se llama *valor* de la función f en x. Si indicamos el dominio de f por $\mathcal{D}_f$, entonces podemos escribir $f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f\}$.

Damos ahora un ejemplo en el que la función es un conjunto finito de pares ordenados de números. Sea

$$f = \{(1, 3),\ (2, 4),\ (3, 5),\ (4, 6)\}.$$

El dominio de f es $\{1, 2, 3, 4\}$. El rango de f es $\{3, 4, 5, 6\}$. En este ejemplo $f(1) = 3$, $f(2) = 4$, etc.

Ilustramos esta correspondencia con el siguiente diagrama.

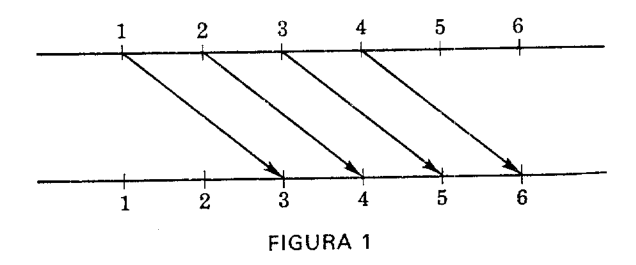


FIGURA 1

El conjunto de pares ordenados

$$\{(1, 3),\ (2, 4),\ (3, 5),\ (3, 6)\}$$

no es una función, ya que dos pares distintos tienen el mismo primer elemento; es decir, este conjunto de pares ordenados no determina una correspondencia sin ambigüedad de $\{1, 2, 3\}$ a $\{3, 4, 5, 6\}$ (figura 2).

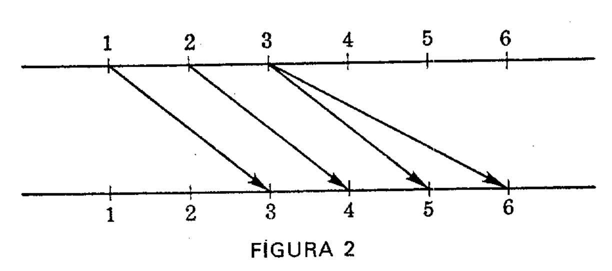


FIGURA 2

Si una función es un conjunto finito, entonces puede describirse desplegándola en la forma en que hemos exhibido la función f. Sin embargo, si una función es un conjunto infinito, no podemos desplegar cada uno de los pares ordenados. En tales casos, describimos la función dando su

dominio y una regla de correspondencia, es decir, una regla para encontrar para cada elemento del dominio el correspondiente segundo elemento del par ordenado. Nótese que la función f dada anteriormente puede escribirse

$$f = \{(x, x+2) \mid x \in \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

El dominio de f es, pues, el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ y la regla de correspondencia es $f(x) = x+2$, donde x denota cualquiera de los números 1, 2, 3, y 4.

El siguiente, es un ejemplo de una función que es un conjunto infinito de pares ordenados. Sea g la función con dominio el conjunto de todos los números reales y con regla de correspondencia: si x es un número real cualquiera, entonces $g(x) = x^2+2x+2$. Esto da una descripción completa de la función. La función es

$$g = \{(x, x^2+2x+2) \mid x \in \mathrm{R}\}.$$

Por ejemplo, hay un par ordenado con 2 como su primer elemento. Como $g(2) = 10$, el par ordenado es (2, 10).

Las funciones que se presentan en los problemas físicos se describen generalmente mediante una regla de correspondencia. Por ejemplo, una función tiempo-distancia s puede tener la regla de correspondencia "$s(t)$ es la distancia recorrida por una partícula en el tiempo t", y una función temperatura-presión p puede describirse por "$p(T)$ es la presión de un gas a temperatura T".

Para algunas funciones importantes, por ejemplo las funciones trigonométricas, es difícil calcular, partiendo de la regla de correspondencia, el número que corresponde a un número dado en el dominio de la función. Para muchas de tales funciones se han compilado tablas de valores. Estas tablas consisten en un número finito de pares ordenados de la función. Si la función tiene un conjunto infinito como dominio, el valor de la función para algún número que no esté en la lista de la tabla puede encontrarse aproximadamente por algún procedimiento de interpolación.

Las funciones anteriores son conjuntos de pares ordenados de números reales; tales funciones se llaman "funciones reales (o valuadas en los reales) de variable real". Aunque en este capítulo estamos interesados principalmente en funciones que tienen dominio y rango en R, el concepto de función es más general que esto. La definición habla de "un conjunto de pares ordenados de elementos" sin restricción alguna sobre lo que los elementos sean. Por ejemplo, la correspondencia del conjunto de estudiantes en una clase con el conjunto de pupitres por ellos ocupados da una función. Un par ordenado en esta función tiene como primer elemento un estudiante y como segundo elemento una silla —la silla en que se sienta el estudiante.

En el capítulo 2 consideramos muchos conjuntos de pares ordenados de números reales —rectas no verticales $\{(x, mx+b)\}$ y el círculo $\{(x, y) \mid x^2+y^2 = 1\}$, por ejemplo. El primero de éstos es una función, el segundo no. Si denotamos la función definida por la recta como

$f = \{x, mx+b) \mid x \in \mathrm{R}\}$, entonces la regla de correspondencia es $f(x) = mx + b$. Para ver que la anterior circunferencia no es una función, nótese que $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ contiene tanto a $(0, 1)$ como $(0, -1)$.

Problemas

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados son funciones? Para aquellos que sean funciones, proporciónense el dominio y el rango e ilústrense con un diagrama.

a) $\{(2, 1), (-1, 5), (0, 0), (6, 2)\}$
b) $\{(-3, 1), (-3, 0), (4, 2), (7, 5)\}$
c) $\{(-5, 2), (1, 2), (3, 2), (5, 2), (7, 2)\}$
d) $\{(0, \sqrt{2}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}), (\frac{1}{4}, 3)\}$.

2. Proporciónense el dominio y una fórmula sencilla para la regla de correspondencia de la función

$$f = \{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}.$$

3. Exhíbase el conjunto de pares ordenados que constituye la función f, si f tiene como dominio $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}, 1+\sqrt{2}\}$ y como regla de correspondencia $f(x) = x^2 - 2x$.

4. Si f es la función:

$$\{(-1, 4), (0, 2), (1, 4), (\tfrac{3}{2}, -\tfrac{4}{3}), (2, \sqrt{2})\},$$

encuéntrese $f(-1)$, $f(1)$, $f(\frac{3}{2})$.

5. Si f es la función que tiene como dominio el conjunto de todos los números reales y como regla de correspondencia $f(x) = x^3 - 3x + 2$, encontrar:

a) $f(2)$ *b*) $f(\frac{1}{2})$
c) $f(-\frac{4}{3})$ *d*) $f(\sqrt{2})$
e) $f(x+1)$ *f*) $f(x-2)$
g) $f(x+h)$ *h*) $f(a/5)$.

6. Si f es la función que tiene como dominio el intervalo cerrado $[-4, 5]$ y como regla de correspondencia

$$f(x) = x^2 - 3x \quad \text{si} \quad x \in [-4, 1\rangle$$

y

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x + 5 \quad \text{si} \quad x \in [1, 5],$$

encuéntrense $f(-2)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(\frac{3}{2})$, $f(4)$.

7. Si f es la función con R^2 como dominio y como regla de correspondencia

$$f(x, y) = xy, \text{ es decir, } f = \{((x, y), xy) \mid (x, y) \in \mathrm{R}^2\},$$

escríbanse los pares ordenados de elementos de f que tienen como primer elemento:

a) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{7})$ *b*) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
c) $(-\sqrt{3}, \sqrt{5})$ *d*) $(\sqrt{5}, \sqrt[3]{5})$
e) $(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$ *f*) $(3\sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{3}+2\sqrt{2})$.

8. Si f es la función con dominio R^2 y regla de correspondencia

$$f(x, y) = x+y, \text{ es decir, } f = \{((x, y), x+y) \mid (x, y) \in R^2\},$$

encuéntrese el valor de f en

a) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{7})$ *b*) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
c) $(\sqrt{3}, \sqrt{27})$ *d*) $(\sqrt{27}, \sqrt{\frac{1}{3}})$.

9. Determínese en cada uno de los siguientes casos si es una función o no el conjunto de pares ordenados:

a) $\{(x+2, x) \mid x \in R\}$
b) $\{(x^2+2, x) \mid x \in R\}$
c) $\{((x+1, y-3), (x, y)) \mid (x, y) \in R^2\}$
d) $\{((x, y^2), (x, y)) \mid (x, y) \in R^2\}$.

10. *a*) Exhíbase el conjunto de pares ordenados que constituye la función f, si f tiene como dominio $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y como regla de correspondencia $f(x) = x^2$;
b) hágase lo mismo para g si g tiene el mismo dominio que f y tiene como regla de correspondencia

$$g(x) = x^2 - \frac{7}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-5).$$

11. Determínese una función f (dada su regla de correspondencia) que tenga R como dominio y

a) $f(0) = 3$, $f(5) = 12$. (¿Hay más de una función tal?)
b) $f(-2) = \sqrt{3}$, $f(3) = 4$
c) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$
d) $f(-1) = 3$, $f(2) = 0$, $f(4) = 28$.

12. Determínense todas las funciones que tienen el conjunto $\{1, 2, 3\}$ como dominio y el conjunto $\{a, b\}$ como rango.

3. LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Además de un diagrama que ilustre la correspondencia, puede darse una representación gráfica de una función real de variable real como un

conjunto de puntos del plano. Esta representación, como un conjunto de puntos del plano, es más efectiva para ilustrar el comportamiento de una función tal.

Una función real de variable real es un conjunto de pares ordenados de números reales y puede, por tanto, considerarse como un conjunto de puntos en R^2. Tales funciones son conjuntos especiales en R^2 —conjuntos con la propiedad de que tienen, cuando más, una intersección con cada recta vertical.

3.1 Definición. *Si f es una función real de variable real, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados de f considerados como un conjunto de puntos de* R^2.

3.2 Ejemplo. Trácese la gráfica de la función

$$f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}.$$

SOLUCIÓN. La gráfica está ilustrada en la figura 3.

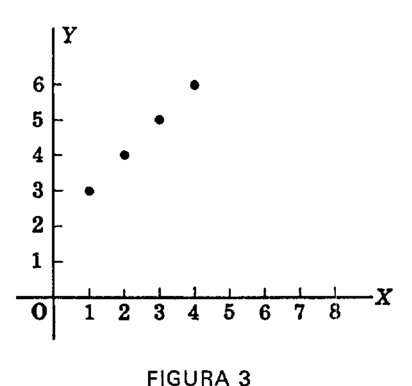


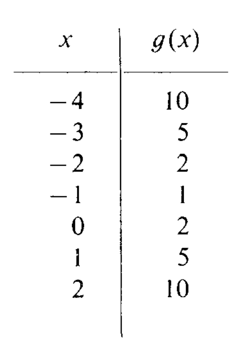
FIGURA 3

3.3 Ejemplo. Trácese la gráfica de la función g con dominio R y regla de correspondencia

$$g(x) = x^2+2x+2.$$

SOLUCIÓN. La gráfica de g consiste en un número infinito de puntos, uno para cada número real. Trazamos la gráfica de la función marcando cierto número de puntos de la gráfica y dibujando luego una curva lisa que pasa por estos puntos (figura 4). Como la curva que representa la función es de extensión infinita, podemos dibujar sólo una parte de ella. (Algunos de los pares ordenados de g se muestran en forma tabular.)

Como un ejemplo más, notemos que la recta de pendiente m e intercepción b con Y es la gráfica de la función $\{(x, mx+b) | x \in R\}$.



x	$g(x)$
-4	10
-3	5
-2	2
-1	1
0	2
1	5
2	10

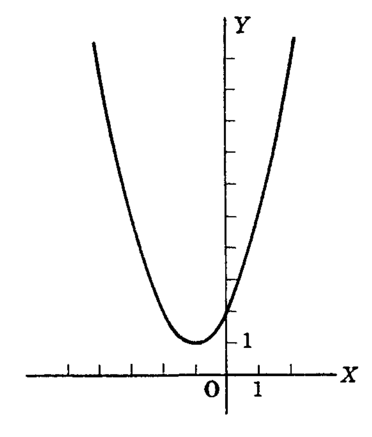


FIGURA 4

Los conceptos de "continuidad" y diferenciabilidad" de una función, que estudiaremos en detalle en el capítulo 8, se relacionan con la imagen geométrica de la función dada por su gráfica. Una función "continua" sobre un intervalo se representa por una curva que puede dibujarse continuamente sin rupturas o saltos sobre el intervalo. La curva de una función "diferenciable" no tiene esquinas y en cada uno de sus puntos hay una tangente. Cuando dibujamos una curva lisa que pasa por los puntos conocidos en la figura 4 estamos suponiendo que la función g es una función "continua" y "diferenciable".

Problemas

1. Ilústrese la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a) $\{(-2, 3), (-1, 1), (0, -1), (1, 2), (2, 3)\}$
b) $\{(-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$
c) $\{(0, 3), (\frac{1}{2}, 2), (\frac{3}{4}, 5), (1, -1), (\frac{4}{3}, 2)\}$.

2. Calcúlese una tabla de valores de f y trácese la gráfica de f, donde f es la función con regla de correspondencia y dominio $\mathfrak{D}_f$ que aparece en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(x) = x-1,\ \mathfrak{D}_f = [-2, 3]$
b) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x\in[-2, 1] \\ x^2-3x, & \text{si } x\in[3, 4] \end{cases},\ \mathfrak{D}_f = [-2, 1]\cup[3, 4]$
c) $f(x) = x^2-1,\ \mathfrak{D}_f = [-3, 3]$
d) $f(x) = x^3,\ \mathfrak{D}_f = \langle -\infty, \infty\rangle$
e) $f(x) = x^4,\ \mathfrak{D}_f = \langle -\infty, \infty\rangle$
f) $f(x) = \begin{cases} x^3-x, & \text{si } x\in\langle -\infty, 0] \\ x^4, & \text{si } x\in\langle 0, \infty\rangle \end{cases},\ \mathfrak{D}_f = \langle -\infty, \infty\rangle$

3. ¿Es una circunferencia la gráfica de una función?

4. Determínese gráficamente el máximo número δ tal que, para todo $x \in \langle 1-\delta, 1+\delta \rangle$, $3x \in \langle 2, 4 \rangle$.

5. Determínese gráficamente un número positivo δ tal que, para todo $x \in \langle 2-\delta, 2+\delta \rangle$, $x^2 \in \langle 3, 5 \rangle$.

4. FUNCIONES ESPECIALES

En esta sección definiremos algunas funciones reales de variable real que son de importancia por su frecuente ocurrencia en matemáticas o por su utilidad para ilustrar algunas propiedades particulares de funciones. Como aparecen con tanta frecuencia, a estas funciones se les asignan símbolos especiales. Por ejemplo, el símbolo $|\ |$ denota la función valor absoluto.

4.1 Definición. *La **función identidad,** denotada por I, es la función que tiene* R, *el conjunto de todos los números reales, como su dominio y como su regla de correspondencia $I(x) = x$.*

En esta función cada número real se corresponde consigo mismo. La gráfica de la función idéntica es la recta $\{(x, x) | x \in \mathrm{R}\}$: la recta de pendiente uno que pasa por el origen.

4.2 Definición. *Una **función constante** es una función con* R *como su dominio y con rango consistente en un solo número real.*

Si este solo número real es el número c, entonces denotamos a la función por c. La función constante c es el conjunto de pares ordenados $\{(x, c) | x \in \mathrm{R}\}$. La gráfica de esta función c es, pues, una recta horizontal con c como intercepción con Y.

Nótese que usamos el símbolo c para representar tanto el número real c como la función constante que tiene c como único elemento de su rango. Así pues, 2 puede denotar la función constante cuyo valor es 2 lo mismo que el número real 2. El contexto de la discusión prevendrá usualmente que este convenio sea causa de confusión.

4.3 Definición. *La **función valor absoluto,** denotada por $|\ |$, es la función con dominio* R *y regla de correspondencia*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Esta función y algunas de sus propiedades se estudiaron en el capítulo 1. La gráfica de la función se ilustra en la figura 5.

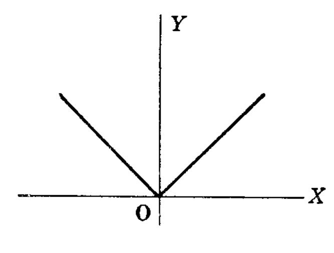


FIGURA 5

4.4 Definición. *La **función raíz cuadrada,** denotada por* $\sqrt{\ }$, *es la función con dominio el conjunto de todos los números reales no negativos y con regla de correspondencia:* $\sqrt{x}$ *es el número no negativo cuyo cuadrado es* x. (Recuérdese que en el capítulo 1 supusimos que para cualquier número real no negativo x existe un número real no negativo único cuyo cuadrado es x.)

Para cada par ordenado de la función raíz cuadrada, el segundo elemento es no negativo y su cuadrado es igual al primer elemento. Así pues,

$$\sqrt{\ } = \{(y^2, y) \mid y \geqslant 0\}.$$

Por ejemplo, $(0, 0)$, $(\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(.499849, .707)$, $(1.999396, 1.414)$, $(4, 2)$, etc., son pares ordenados de la función. La gráfica de la función raíz cuadrada está representada en la figura 6.

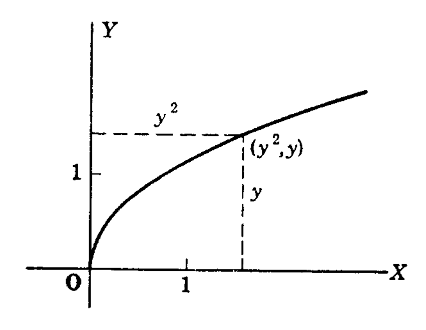


FIGURA 6

Obsérvese que $\sqrt{4} \neq \pm 2$, sino que $\sqrt{4} = 2$. Se tiene también que $\sqrt{x^2} = |x|$.

4.5 Definición. *La **función máximo entero,** denotada por* [ ], *es la función con dominio el conjunto de todos los números reales y con regla de correspondencia:* $[x]$ *es el máximo entero no mayor que* x.

Por ejemplo: $[2] = 2$, $[2.5] = 2$, $[-2] = -2$, $[-2.5] = -3$, $[\sqrt{2}] = 1$. En general, si k es un entero y $k \leqslant x < k+1$, entonces $[x] = k$, donde k es un entero. La gráfica de esta función está ilustrada en la figura 7.

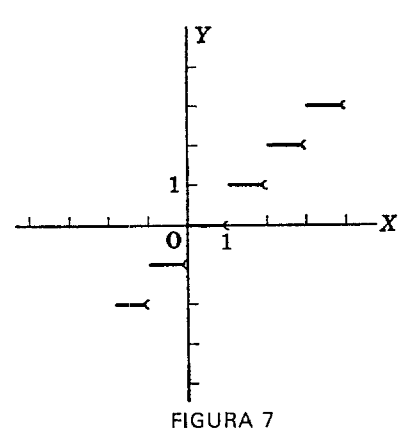


FIGURA 7

Nótese que al ilustrar la gráfica de la función raíz cuadrada hemos supuesto que es continua y diferenciable, esto que probaremos más adelante. Sin embargo, la función máximo entero no es continua, ya que la curva que representa su gráfica tiene rupturas. La función valor absoluto es continua ya que la curva que representa su gráfica no tiene interrupciones, pero no es diferenciable en 0 ya que la curva tiene un ángulo en (0, 0).

En la primera parte del cálculo trataremos usualmente de funciones reales de variable real —es decir, con funciones cuyo dominio y rango son conjuntos de números reales. Por razones de brevedad, definimos a menudo una función enunciando simplemente una regla de correspondencia para ella. En tal caso ha de entenderse que el dominio de la función consiste en todos los números reales para los que puede tener sentido aplicar la regla de correspondencia dada. Por ejemplo, si definiéramos f por $f(x) = 1/|x|$, habría de entenderse que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales distintos de cero.

Problemas

1. Proporciónense los valores de

a) $\sqrt{9}$	*b*) $\sqrt{(-4)^2}$
c) $[-0.5]$	*d*) $[\frac{5}{4}]$
e) $\|-3\|+[-1.5]$	*f*) $\sqrt{[4.3]}$.

2. Trácese la gráfica de la función idéntica I.

3. Trácese la gráfica de la función constante -3.

4. Trácese la gráfica de la función f si el dominio de f es $[-2, -1] \cup [1, 2]$ y la regla de correspondencia es

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si} \quad x \in [-2, -1] \\ 2, & \text{si} \quad x \in [1, 2]. \end{cases}$$

5. Trácese la gráfica de la función f que tiene como regla de correspondencia

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in \langle -\infty, 1] \\ \sqrt{x}, & \text{si} \quad x \in \langle 1, 4] \\ 2, & \text{si} \quad x \in \langle 4, \infty \rangle. \end{cases}$$

6. Trácese la gráfica de la función f que tiene como regla de correspondencia

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si} \quad x \in \langle -\infty, 1] \\ [x], & \text{si} \quad x \in \langle 0, 4] \\ 5, & \text{si} \quad x \in \langle 4, \infty \rangle. \end{cases}$$

7. Trácense las gráficas de las funciones:

a) $\{(x, x^2) \mid x \in \mathrm{R}\}$ *b*) $\{(x, x^3) \mid x \in \mathrm{R}\}$
c) $\{(y^3, y) \mid y \in \mathrm{R}\}$.

8. Trácense las gráficas de f y g si

$$f(x) = 2[x] \quad \text{y} \quad g(x) = [2x].$$

9. Compruébese que $[2x] - 2[x] = 0$ o 1.

10. Determínese un número positivo δ tal que, para todo

$$x \in \langle 4-\delta, 4+\delta \rangle, \ \sqrt{x} \in \langle 1, 3 \rangle.$$

11. ¿Hay un número positivo δ tal que para todo $x \in \langle 2-\delta, 2+\delta \rangle$, $[x] \in \langle 1, 3 \rangle$?

5. ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE FUNCIONES

Como en el caso de los números, podemos definir operaciones sobre funciones reales (de valores reales). Las operaciones básicas son: adición, multiplicación y composición. La composición, a menudo considerada como otra clase de multiplicación, se discute en la sección próxima.

Antes de definir operaciones sobre funciones enunciaremos en forma explícita lo que entenderemos por igualdad de funciones. Si $f = g$, entonces f y g tienen el mismo dominio $\mathfrak{D}$ y $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \mathfrak{D}$.

La terminología

$$f = g \ (\text{sobre } \mathcal{E})$$

donde $\mathcal{E} \subset \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g$, será usada para denotar que

$$f(x) = g(x), \text{ para toda } x \in \mathcal{E}.$$

5.1 Definición. *Si f y g son funciones reales con dominios $\mathcal{D}_f$ y $\mathcal{D}_g$ respectivamente, entonces $f+g$ y fg son funciones con dominio $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ y reglas de correspondencia:*

$$[f+g](x) = f(x)+g(x)$$
$$[fg](x) = f(x)\cdot g(x).$$

Es decir, el valor de $f+g$ en x es la suma de los valores de f y g en x, y el valor de fg en x es el producto de los valores de f y g en x. Así pues,

$$f+g = \{(x, f(x)+g(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\}$$

y

$$fg = \{(x, f(x)\cdot g(x)) \mid x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\}.$$

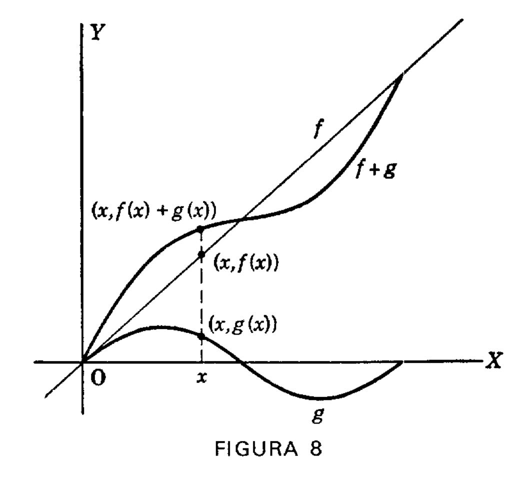


FIGURA 8

Una interpretación gráfica de la definición de adición de funciones está dada en la figura 8.

Como una ilustración simple de la adición de funciones consideramos funciones con sólo un número finito de elementos, tales como:

5.2 $$f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$$

y

5.3 $$g = \{(0, -3), (3, 2), (4, 1)\}.$$

Entonces

$$f+g = \{(3, 7), (4, 7)\}$$

y

$$fg = \{(3, 10), (4, 6)\}.$$

Nótese que la adición de funciones difiere de la adición de pares ordenados (vectores) considerada en el capítulo 2.

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las funciones reales de variable real. Las operaciones de adición y multiplicación de elementos de $\mathcal{S}$ tienen todas las propiedades postuladas para las operaciones correspondientes sobre números reales con excepción de la existencia de inversos únicos.

5.4 Teorema. *El conjunto $\mathcal{S}$ de las funciones reales de variable real con las operaciones antes definidas de adición y multiplicación, tiene las siguientes propiedades:*

A_1. *Para f y $g \in \mathcal{S}$ cualesquiera, $f+g \in \mathcal{S}$.*

A_2. *Para f y $g \in \mathcal{S}$ cualesquiera, $f+g = g+f$.*

A_3. *Para f, g y $h \in \mathcal{S}$ cualesquiera, $(f+g)+h = f+(g+h)$.*

A_4. *Hay un elemento y sólo un elemento en $\mathcal{S}$ denotado por* "0", *tal que para todo $f \in \mathcal{S}$, $f+0 = f$.*

M_1. *Para f y $g \in \mathcal{S}$ cualesquiera, $fg \in \mathcal{S}$.*

M_2. *Para f y $g \in \mathcal{S}$ cualesquiera, $fg = gf$.*

M_3. *Para f, g, y $h \in \mathcal{S}$ cualesquiera, $(fg)h = f(gh)$.*

M_4. *Hay un elemento y sólo un elemento en $\mathcal{S}$, denotado por* "1", *tal que para todo $f \in \mathcal{S}$, $f \cdot 1 = f$.*

D. *Para f, g, y $h \in \mathcal{S}$ cualesquiera, $f(g+h) = fg+fh$.*[1]

PRUEBA.

A_1. Se sigue esto de la definición 5.1 y del axioma A_1 de R.

A_2. La ley conmutativa de la adición se sigue de la definición 5.1 y de la ley conmutativa de la adición para números reales. Los dominios de $f+g$ y $g+f$ son $\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g$. Para cualquier $x \in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g$

$$[f+g](x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = [g+f](x).$$

Por tanto $f+g = g+f$, ya que ambas funciones tienen el mismo dominio y la misma regla de correspondencia.

A_3. La ley asociativa de la adición sigue en forma similar de la definición 5.1 y de la ley asociativa de la adición para los números reales.

A_4. Claramente $f+0 = f$, donde "0" denota la función constante 0. Que éste es el único elemento neutro con respecto a la adición puede mostrarse tomando como f la función constante c. Supongamos que g es una función neutra con respecto a la adición, entonces para todo $x \in R$

$$[c+g](x) = c(x)$$

luego

$$c+g(x) = c$$

[1] A_1 y M_1 son ciertos porque $\varnothing$ puede considerarse un elemento de $\mathcal{S}$. [N. del T.]

y por tanto

$$g(x) = 0.$$

Por tanto, $g = 0$.

Las pruebas de M_1, M_2, M_3, y M_4 son similares a las pruebas de A_1, A_2, A_3, y A_4 y se dejan para el estudiante (problema 3).

D. Las funciones $f(g+h)$ y $fg+fh$ tienen, ambas, como dominio $\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g \cap \mathfrak{D}_h$. Para cualquier $x \in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g \cap \mathfrak{D}_h$, se tiene:

$$\begin{aligned}[f(g+h)](x) &= f(x) \cdot [g+h](x) = f(x)[g(x)+h(x)] \\ &= f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x) = [fg](x) + [fh](x) = [fg+fh](x).\end{aligned}$$

Por tanto $f(g+h) = fg+fh$: la ley distributiva se verifica.

No es cierto que todo elemento de $\mathcal{S}$ tenga un inverso aditivo único ni que todo elemento distinto de cero en $\mathcal{S}$ tenga un inverso multiplicativo único. En realidad, si el dominio de una función f no es el total de R entonces para ninguna función g podemos tener $f+g = 0$ o $fg = 1$, puesto que el dominio de las funciones constantes 0 y 1 es R, pero $\mathfrak{D}_{f+g}$ y $\mathfrak{D}_{fg}$ no puede ser R. Sin embargo, podemos definir funciones a las que llamaremos $-f$ y $\frac{1}{f}$ tales que

$$f + (-f) = 0 \quad (\text{sobre } \mathfrak{D}_f)$$

y

$$f \cdot \frac{1}{f} = 1 \quad (\text{sobre } \{x \mid x \in \mathfrak{D}_f \text{ y } f(x) \neq 0\}).$$

Consideremos el problema: Dadas $f \in \mathcal{S}$, encontrar una función g tal que $\mathfrak{D}_g = \mathfrak{D}_f$ y para todo $x \in \mathfrak{D}_f$

$$[f+g](x) = 0.$$

Entonces

$$g(x) = -f(x).$$

Es, pues, razonable definir $-f$ como sigue:

5.5 Definición. *Si f es una función real, $-f$ es la función con dominio $\mathfrak{D}_f$ y regla de correspondencia*

$$[-f](x) = -f(x).$$

Es decir, $-f = (-1)f$.

Nótese que cualquier otra función g tal que $g(x)$ coincida con $-f(x)$ para todo $x \in \mathfrak{D}_f$ también satisfará

$$f + g = 0 \quad (\text{sobre } \mathfrak{D}_f).$$

Nótese también que $f + (-f) = 0$ si y sólo si el dominio de f es R.

Pasamos ahora a definir la sustracción de funciones reales.

5.6 Definición. *Si f y g son funciones reales, entonces*

$$f-g = f+(-g).$$

Así pues, si f y g son las funciones definidas en 5.2 y 5.3

$$-g = \{(0, 3), (3, -2), (4, -1)\}$$

y

$$f-g = \{(3, 3), (4, 5)\}.$$

Consideremos ahora el problema: Dada $f \in \mathcal{S}$, encontrar una función g tal que $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_f$ y para toda $x \in \mathcal{D}_f$

$$[fg](x) = 1.$$

Si para algún $x_0 \in \mathcal{D}_f$, $f(x_0) = 0$, entonces no hay forma alguna de definir g en x_0 de forma que satisfaga la anterior ecuación, Sin embargo, para toda $x \in \mathcal{D}_f$ tal que $f(x) \neq 0$, tenemos

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

De donde definimos $\frac{1}{f}$ como sigue:

5.7 Definición. *Si f es una función real, entonces $\frac{1}{f}$ es la función con dominio los elementos $x \in \mathcal{D}_f$ tales que $f(x) \neq 0$ y regla de correspondencia*

$$\left[\frac{1}{f}\right](x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Nótese que $f \cdot \frac{1}{f} = 1$ si y sólo si el dominio de f es R y el rango de f no contiene el cero.

5.8 Definición. *Si f y g son funciones reales, entonces*

$$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}.$$

Para las funciones f y g dadas en 5.2 y 5.3 tenemos

$$\frac{1}{g} = \{(0, -\tfrac{1}{3}), (3, \tfrac{1}{2}), (4, 1)\}$$

y

$$\frac{f}{g} = \{(3, \tfrac{5}{2}), (4, 6)\}.$$

La notación f^{-1} se usa también para $\frac{1}{f}$. Sin embargo, f^{-1} debe leerse "f a la menos uno" pues el término "inversa de f" se reserva para la inversa de f respecto a la composición (escrito f^*).

Como en el caso de los números reales, puesto que son válidas las leyes asociativas, están bien definidos la suma y el producto de cualquier número finito de funciones,

5.9 $$f_1+f_2+\cdots+f_n$$

y

5.10 $$f_1 f_2\cdots f_n.$$

Si en 5.9 todas las funciones son la misma función, llamémosla f, entonces 5.9 puede escribirse

$$f+f+\cdots+f = f\cdot 1+f\cdot 1+\cdots+f\cdot 1 = f(1+1+\cdots+1) = nf.$$

Si en 5.10 todas las funciones son la misma función, llamémosla f, entonces representamos el producto por f^n. Así, $f\cdot f = f^2$ y $f\cdot f\cdot f = f^3$. Evidentemente, si n y m son enteros positivos entonces $f^n f^m = f^{n+m}$. Si definimos $f^0 = 1$ y $f^{-n} = \frac{1}{f^n}$, donde $n > 0$, entonces la fórmula

$$f^n f^m = f^{n+m} \quad (\text{sobre } \mathfrak{D}_{f^n}\cap\mathfrak{D}_{f^m})$$

se verificará para todos los enteros n y m. La restricción sobre la igualdad de las dos funciones es necesaria en el caso de que n y m sean de signo diferente, $n+m$ sea positivo, y f tome el valor cero. Por ejemplo, $I^2 I^{-1} \neq I$ ya que el dominio de $I^2 I^{-1}$ no contiene cero, mientras que el dominio de I es R. Sin embargo, podemos decir

$$I^2 I^{-1} = I \quad (\text{sobre } \{x \mid x \neq 0\}).$$

Una función de la forma

$$a_0+a_1 I+a_2 I^2+\cdots+a_n I^n,$$

donde $a_k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ es una función constante e I es la función identidad, se llama una *función polinomial* o simplemente un *polinomio*. Una función polinomial

$$p = a_0+a_1 I+a_2 I^2+\cdots+a_n I^n$$

es, pues, una función con dominio R y regla de correspondencia

$$p(x) = a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n.$$

En esta regla de correspondencia a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ denota ahora un número real.

El cociente de dos funciones polinomiales se llama *función racional*.

Por ejemplo, la función

$$r = \frac{3I^2+4}{I-1}$$

es una función racional. Su dominio es el conjunto de todos los números reales excepto 1 y su regla de correspondencia es

$$r(x) = \frac{3x^2+4}{x-1}.$$

La clase de las funciones racionales es el conjunto de todas las funciones que pueden construirse partiendo de la función idéntica y las funciones constantes usando las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división.

Problemas

1. Determínense 1) $f+g$, 2) fg, 3) f^2, 4) f^2+3g, 5) $[f+g](2)$, 6) $[fg](2)$, 7) $[f^2+3g](2)$ si

a) $f = \{(-3, 2), (0, 0), (2, 4), (3, -1), (4, 3)\}$
$g = \{(2, 0), (3, 4), (4, 7), (6, 2)\}$

b) $f = \{(0, \sqrt{2}), (1, \sqrt{2}+\sqrt{5}), (2, 0)\}$
$g = \{(0, \sqrt{8}), (2, \frac{1}{2}), (4, \sqrt{3})\}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{si } x \in [0, 2] \\ 3, & \text{si } x \in [3, 5] \end{cases}$
$g(x) = \sqrt{x}, \ \mathfrak{D}_g = [1, 4]$

d) $f(x) = |x|$
$g(x) = x$

e) $f(x) = x$
$g = \{(-1, 2), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), (2, -3), (4, \sqrt{2})\}$.

2. Pruébese la ley asociativa de la adición para funciones reales.

3. Pruébense M_1, M_2, M_3, y M_4 del teorema 5.4.

4. Proporciónense el dominio y la regla de correspondencia para $f-g$ y f/g.

5. Determínense 1) $f-g$, 2) $g-f$, 3) f/g, 4) g/f para las funciones que aparecen en el problema 1.

6. Pruébese que

$$f+(-f) = 0 \quad (\text{sobre } \mathfrak{D}_f).$$

7. Pruébese que

$$f \cdot \frac{1}{f} = 1 \quad (\text{sobre } \{x \mid x \in \mathfrak{D}_f \text{ y } f(x) \neq 0\}).$$

8. Muéstrese que $[5I^3+3I^2-2](x) = 5x^3+3x^2-2$.

9. Determínense el dominio y la regla de correspondencia de 1) $f+g$, 2) $f-g$, 3) $g-f$, 4) fg, 5) f/g, 6) g/f si

a) $f = I^2+2I-8$ y $g = I^2-2I+1$

b) $f = I^3+3I^2+2I$ y $g = I^4-4I^2-5$

c) $f = \dfrac{I^2+2}{I-1}$ y $g = \dfrac{I^3-8}{I+1}$

d) $f = \dfrac{I^2+I-6}{I^2+5I+6}$ y $g = \dfrac{I^2+7I+10}{I^2+I-6}$.

10. Determínese el valor de las funciones $f+g$, $f-g$, fg, f/g, g/f en -3, cuando f y g son las funciones dadas en el problema 9.

11. Determínense gráficamente las curvas que representan $f+g$ y $g-f$ si f y g son

a) las funciones en el problema 1*d*,

b) las funciones en el problema 1*e*,

c) $f(x) = x$, $\mathfrak{D}_f = \langle -\infty, \infty \rangle$
$g(x) = [x]$, $\mathfrak{D}_g = [-2, 3]$.

12. Si se define un espacio vectorial como un conjunto de elementos que satisfacen las propiedades enumeradas en el teorema 3.8 del capítulo 2 (pág. 58), demuéstrese que el conjunto $\mathcal{S}$ de todas las funciones reales y dominio fijo $\mathfrak{D}$ es un espacio vectorial bajo las operaciones de adición y multiplicación mediante funciones constantes.

6. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Además de la adición y la multiplicación sobre las funciones hay otra operación básica llamada composición. Esta operación se considera, a veces, como otra multiplicación de funciones.

6.1 Definición. *La **composición** de f con g, denotada por $f \circ g$ y que se lee "f circulo g" o "f composición g", es la función cuyo dominio consiste en los elementos $x \in \mathfrak{D}_g$ tales que $g(x) \in \mathfrak{D}_f$ y cuya regla de correspondencia es*

$$[f \circ g](x) = f(g(x)).$$

Nótese que para que esté definido $f \circ g$ no es necesario que f y g sean funciones reales de variable real. Si g tiene dominio en el conjunto $\mathcal{A}$ y rango en $\mathcal{B}$ y f tiene dominio en $\mathcal{B}$ y rango en $\mathcal{C}$, entonces $f \circ g$ tiene dominio en $\mathcal{A}$ y rango en $\mathcal{C}$. La figura 9 da un diagrama esquemático de $f \circ g$.

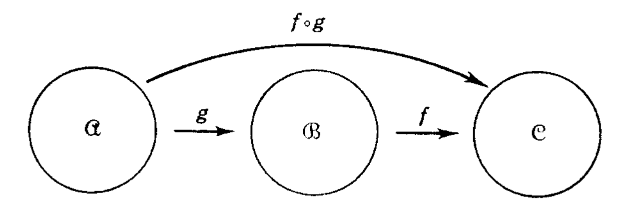


FIGURA 9

6.2 Ejemplo. Determínense $f \circ g$ y $g \circ f$ cuando

$$f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$$

y

$$g = \{(0, -3), (3, 2), (4, 1)\}.$$

SOLUCIÓN

$$f \circ g = \{(3, 4), (4, 3)\}$$

y

$$g \circ f = \{(1, 2), (2, 1)\}.$$

La función $f \circ g$ está ilustrada como una correspondencia o mapeo en la figura 10.

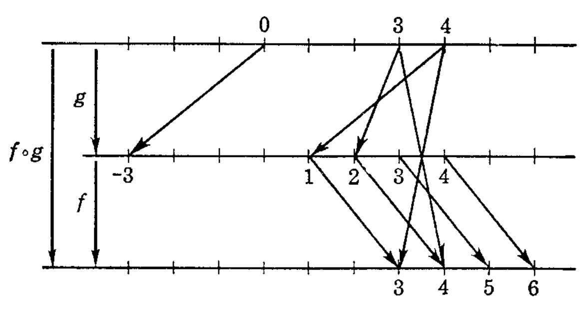


FIGURA 10

Adviértase que, para las funciones del ejemplo 6.2, $f \circ g \neq g \circ f$. La composición de funciones no es, pues, en general, conmutativa.

6.3 Ejemplo. Si f es una función con dominio R y regla de correspondencia $f(t) = (1+2t, -3+t)$ y g es una función con dominio R^2 y regla de correspondencia $g(x, y) = (x-2, y+4)$, determínese $g \circ f$.

SOLUCIÓN. Observemos primero que el rango de f es una recta en R^2 que pasa por el punto $(1, -3)$ y paralela a $(2, 1)$; la función g mueve cada

punto en R^2 a una nueva posición dos unidades a la izquierda y cuatro unidades arriba de su posición original (figura 11). Para cualquier $t \in R$

$$[g \circ f](t) = g(f(t)) = g(1+2t, \ -3+t) = (-1+2t, \ 1+t).$$

Así pues, $g \circ f$ mapea cada punto de R en un punto sobre la recta en R^2 que pasa por el punto $(-1, 1)$ y paralela a $(2, 1)$.

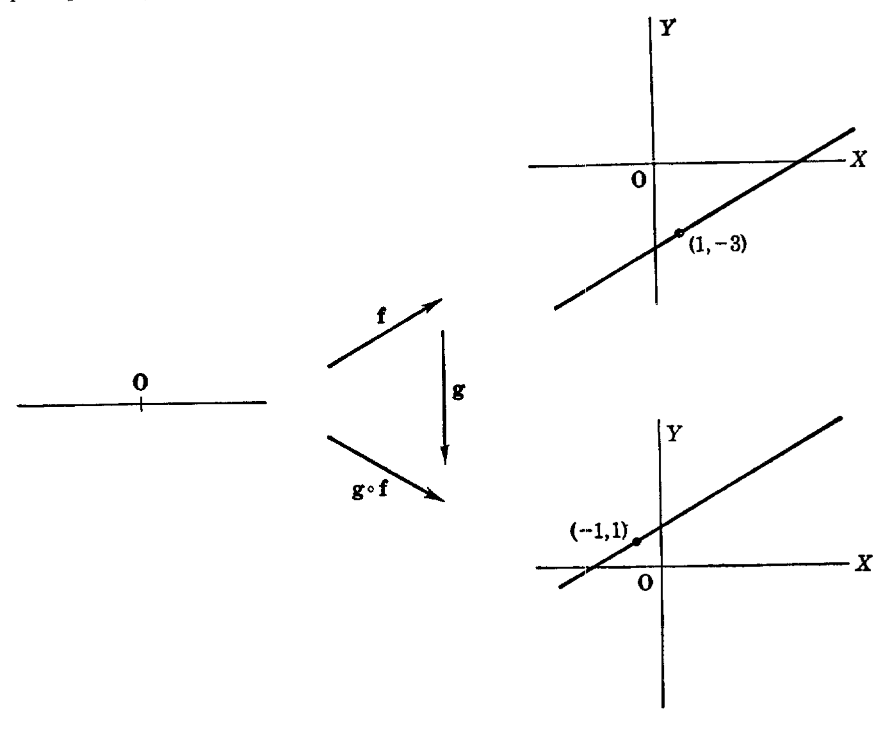


FIGURA 11

Si f y g son funciones reales de variable real, entonces la gráfica de $f \circ g$ puede construirse partiendo de las gráficas de f y g como sigue (figura 12): Tómese un número cualquiera $x \in \mathfrak{D}_g$. Trácese la recta vertical que pasa por $(x, 0)$. Esta recta intersecta a la gráfica de g en el punto $(x, g(x))$. La recta horizontal que pasa por $(x, g(x))$ intersecta a la recta $\{(x, x) \mid x \in R\}$ en el punto $(g(x), g(x))$. Si $x \in \mathfrak{D}_{f \circ g}$ entonces $g(x) \in \mathfrak{D}_f$ y la recta vertical que pasa por $(g(x), g(x))$ intersectará a la gráfica de f en el punto $(g(x), f(g(x)))$. Entonces, el punto $(x, f(g(x)))$ se obtiene como el punto de intersección de la recta horizontal que pasa por $(g(x), f(g(x)))$ y la recta vertical que pasa por $(x, 0)$.

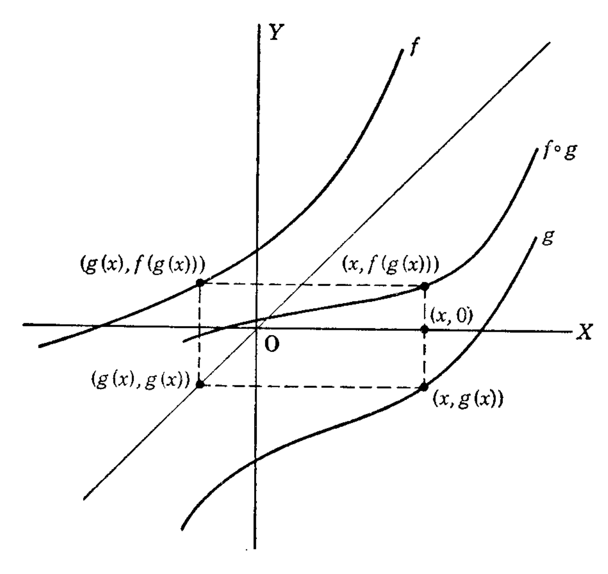


FIGURA 12

6.4 Ejemplo. Si f y g son las funciones definidas por las reglas $f(x) = x^2$ y $g(x) = x+2$, determínense $f \circ g$ y $g \circ f$.

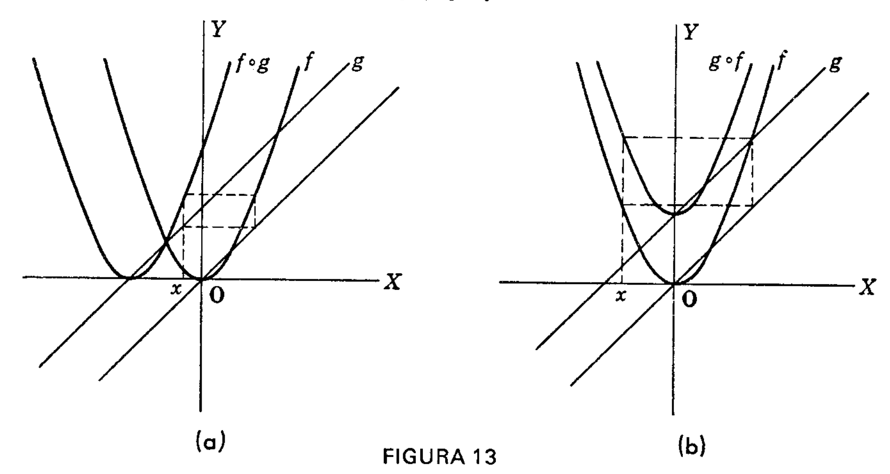


FIGURA 13

SOLUCIÓN. Como $\mathfrak{D}_f = \mathfrak{D}_g = \mathrm{R}$, tenemos $\mathfrak{D}_{f \circ g} = \mathfrak{D}_{g \circ f} = \mathrm{R}$. Las reglas de correspondencia de estas funciones son:

$$[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2$$

y

$$[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2+2.$$

En la figura 13 se construyeron las gráficas de $f \circ g$ y $g \circ f$.

En los problemas físicos, se encuentra frecuentemente la composición de funciones. Por ejemplo, como sabemos que la longitud de una varilla metálica depende de la temperatura de la varilla, podemos definir una función temperatura-longitud l por la regla: $l(T)$ es la longitud de la varilla a la temperatura T. Si la temperatura varía con el tiempo, tenemos una función tiempo-temperatura g con regla: $g(t)$ es la temperatura de la varilla en el tiempo t. Así pues, obtenemos una relación tiempo-longitud dada por la función $\hat{l}$ con regla: $\hat{l}(t)$ es la longitud de la varilla en el tiempo t. Esta función $\hat{l}$ es la composición de l con g, es decir, $\hat{l} = l \circ g$ y $\hat{l}(t) = l(g(t))$.

Damos ahora un teorema en que se formula lo que puede decirse respecto a las propiedades fundamentales de la operación de composición de funciones reales de variable real.

6.5 Teorema. *Si $\mathcal{S}$ es el conjunto de todas las funciones reales de variable real, entonces:*

C_1. *Para todo f y $g \in \mathcal{S}$, $f \circ g \in \mathcal{S}$.*

C_2. *La composición no es conmutativa.*

C_3. *Para todo f, g, y $h \in \mathcal{S}$, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.*

C_4. *Hay un elemento y sólo un elemento en $\mathcal{S}$, denotado por I, tal que para todo $f \in \mathcal{S}$, $f \circ I = f = I \circ f$.*

D_1. *Para todo f, g, y $h \in \mathcal{S}$, $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$.*

D_2. *Para todo f, g, y $h \in \mathcal{S}$, $(fg) \circ h = (f \circ h)(g \circ h)$.*

PRUEBA

C_1. Esto es una consecuencia inmediata de la definición 6.1.

C_2. Cuando decimos que la composición no es conmutativa queremos decir que no es cierto que $f \circ g = g \circ f$ para todas las funciones f y g. Hemos demostrado esto en el ejemplo 6.2. Desde luego, puede suceder que $f \circ g = g \circ f$ para ciertas funciones f y g.

$$
\begin{aligned}
C_3. \quad \mathfrak{D}_{(f \circ g) \circ h} &= \{x \mid x \in \mathfrak{D}_h \text{ y } h(x) \in \mathfrak{D}_{f \circ g}\} \\
&= \{x \mid x \in \mathfrak{D}_h,\ h(x) \in \mathfrak{D}_g, \text{ y } g(h(x)) \in \mathfrak{D}_f\} \\
&= \{x \mid x \in \mathfrak{D}_{g \circ h} \text{ y } [g \circ h](x) \in \mathfrak{D}_f\} \\
&= \mathfrak{D}_{f \circ (g \circ h)}.
\end{aligned}
$$

Para cualquier x que pertenezca al dominio común de estas funciones tenemos:

$$[(f \circ g) \circ h](x) = [f \circ g](h(x)) = f(g(h(x))) = f([g \circ h](x)) = [f \circ (g \circ h)](x).$$

Por lo tanto, la composición de funciones es asociativa.

Nota. En ninguna parte en la prueba de C_3 usamos el hecho de que f, g, y h son funciones reales de variable real. Así pues, la ley asociativa para la composición de funciones se verifica para funciones en general.

C_4. La función neutra con respecto a la composición es la función identidad I. Como la composición de funciones no es conmutativa debemos mostrar que $f \circ I = f$ y también que $I \circ f = f$. Los dominios de $f \circ I$ e $I \circ f$ son ambos $\mathfrak{D}_f$. Para cualquier $x \in \mathfrak{D}_f$

$$[f \circ I](x) = f(I(x)) = f(x)$$

e

$$[I \circ f](x) = I(f(x)) = f(x).$$

Por tanto $f \circ I = f = I \circ f$.

Para demostrar que I es el único elemento neutro con respecto a la composición, supongamos que I' es también un elemento neutro. Entonces $I' = I' \circ I = I$.

D_1.
$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{(f+g)\circ h} &= \{x \mid x \in \mathfrak{D}_h \text{ y } h(x) \in \mathfrak{D}_{f+g}\} \\ &= \{x \mid x \in \mathfrak{D}_h \text{ y } h(x) \in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g\} \\ &= \{x \mid x \in \mathfrak{D}_h \text{ y } h(x) \in \mathfrak{D}_f\} \cap \{x \mid x \in \mathfrak{D}_h \text{ y } h(x) \in \mathfrak{D}_g\} \\ &= \mathfrak{D}_{f\circ h + g\circ h}. \end{aligned}$$

Para cualquier x en el dominio común de las funciones tenemos:

$$\begin{aligned} [(f+g)\circ h](x) &= [f+g](h(x)) = f(h(x)) + g(h(x)) = [f \circ h](x) + [g \circ h](x) \\ &= [f \circ h + g \circ h](x). \end{aligned}$$

Luego la primera ley distributiva se verifica.

D_2. La prueba de esta segunda ley distributiva es análoga a la prueba de D_1 y se deja para el estudiante.

Esto completa la prueba del teorema 6.5.

Nota. Como la composición de funciones no es conmutativa, no se pueden inferir las leyes distributivas $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$ y $f \circ (gh) = (f \circ g)(f \circ h)$ de D_1 y D_2. En realidad, estas fórmulas no son en general correctas. Por ejemplo, $3 \circ (I+I) = 3$ mientras que $3 \circ I + 3 \circ I = 3+3 = 6$ y $3 \circ (II) = 3$, pero $(3 \circ I)(3 \circ I) = 3 \cdot 3 = 9$.

No toda función en $\mathcal{S}$ tiene inversa respecto a la composición. Sin embargo, para cada f de una cierta clase de funciones —funciones univalentes—[1] podemos definir una función f^* que es, en un sentido restringido, la inversa de f respecto a la composición.

6.6 Definición. *Una función f se llama* ***univalente*** *(uno-uno) si* $f(x_1) = f(x_2)$ *implica* $x_1 = x_2$.[1]

Una función es, pues, univalente si ninguno de dos pares ordenados distintos de la función tienen el mismo segundo elemento. Por ejemplo, la

[1] Estas funciones suelen también llamarse funciones "uniformes" y, cada vez más funciones "inyectivas" o, simplemente, "inyecciones". [N. del T.]

función f definida por $f(x) = x+2$ es univalente: Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1+2 = x_2+2$ y $x_1 = x_2$. Sin embargo, la función I^2 no es univalente: $(-2, 4)$ y $(2, 4)$ pertenecen a I^2. Gráficamente, una función univalente está caracterizada por la propiedad de que toda recta horizontal intersecta a la gráfica de f en, cuando más, un punto.

Si f es una función univalente, entonces el conjunto $\{(f(x), x) \mid x \in \mathfrak{D}_f\}$ es una función: Es un conjunto de pares ordenados tales que ninguno de dos pares ordenados distintos tienen el mismo primer elemento.

6.7 Definición. *Si f es univalente, la función $\{(f(x), x) \mid x \in \mathfrak{D}_f\}$ se llama* ***inversa*** *de f y se denota por f^*.*

La inversa de f es el conjunto de pares ordenados obtenido al intercambiar el primero y el segundo elemento en cada par ordenado de f.

Nótese que f^* está definida solamente para funciones f que son univalentes. Obsérvese que si dos pares ordenados de f tienen el mismo segundo elemento, entonces, después de intercambiar los primeros con los segundos elementos de los pares, dos pares ordenados tendrían el mismo primer elemento y, por tanto, el conjunto de los pares de orden invertido no constituiría una función.

Como f^* está definido por

$$f^* = \{(f(x), x) \mid x \in \mathfrak{D}_f\},$$

es evidente que el dominio de f^* es el rango de f, $\mathfrak{R}_f$, y el rango de f^* es el dominio $\mathfrak{D}_f$ de f.

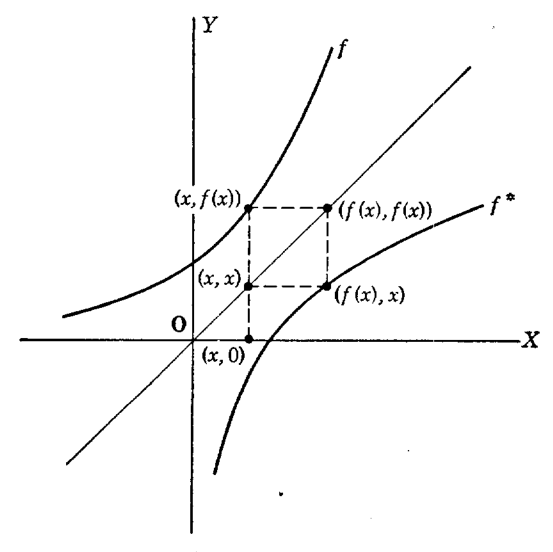


FIGURA 14

Si f es una función real de variable real, entonces podemos construir la gráfica de f^* partiendo de la gráfica de f de la siguiente manera (figura 14). Tómese un número $x \in \mathfrak{D}_f$. Dibújese la recta vertical que pasa por $(x, 0)$. Esta recta intersecta a la recta $\{(x, x) | x \in R\}$ en el punto (x, x) e intersecta a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$. La recta horizontal que pasa por $(x, f(x))$ intersecta a $(x, x) | x \in R$ en el punto $(f(x), f(x))$. Luego, el punto $(f(x), x)$ es el punto de intersección de la recta vertical por $(f(x), f(x))$ y la recta horizontal que pasa por (x, x). Como las diagonales de un cuadrado se bisectan mutuamente y son ortogonales, el punto $(f(x), x)$ es la imagen refleja de $(x, f(x))$ en la recta $\{(x, x) | x \in R\}$. Por tanto, la gráfica de f^* es el conjunto de las imágenes reflejas en $\{(x, x) | x \in R\}$ de los puntos de la gráfica de f.

Nótese que f^* es una función univalente: como f es una función ninguno de dos pares ordenados distintos en f tiene el mismo primer elemento y de aquí que ninguno de dos pares ordenados distintos de f^* tengan el mismo segundo elemento. Así pues, f^* tiene un inverso, llamémoslo f^{**}. Como $f^* = \{(f(x), x) | x \in \mathfrak{D}_f\}$, se tiene

$$f^{**} = \{(x, f(x)) | x \in \mathfrak{D}_f\} = f.$$

Demostraremos ahora que f^* puede considerarse como el inverso de f en el siguiente sentido, con respecto a la composición:

6.8 $$f^* \circ f = I \quad (\text{sobre } \mathfrak{D}_f)$$

6.9 $$f \circ f^* = I \quad (\text{sobre } \mathfrak{D}_{f^*} = \mathfrak{R}_f).$$

Para cualquier $x \in \mathfrak{D}_f$

$$[f^* \circ f](x) = f^*(f(x)) = x = I(x).$$

Esto prueba 6.8. Usaremos 6.8 y el hecho de que $f^{**} = f$ para probar 6.9. Para cualquier $x \in \mathfrak{D}_{f^*}$,

$$[f \circ f^*](x) = f(f^*(x)) = f^{**}(f^*(x)) = x = I(x).$$

La propiedad de f^* dada en 6.8 y 6.9 justifica que llamemos a f^* el inverso de f.

6.10 Ejemplo. Si

$$f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\},$$

determínense: *a*) f^*, *b*) $f^* \circ f$, *c*) $f \circ f^*$.

SOLUCIÓN. Observemos primero que f es univalente y tiene, por tanto, una inversa.

a) $f^* = \{(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\}$.
b) $f^* \circ f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.
c) $f \circ f^* = \{(3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.

Si ilustramos f como un mapeo, entonces la univalencia se corresponde con el hecho de que solamente llega una flecha a cada punto del rango de f (figura 15). El mapeo f^* se obtiene invirtiendo la dirección de las flechas.

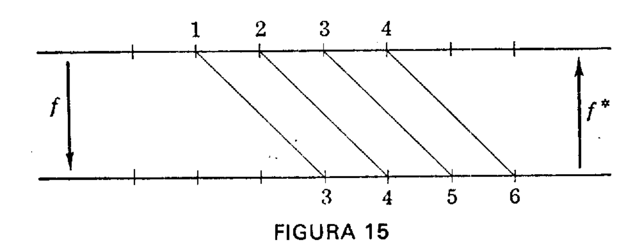


FIGURA 15

Si f es una función univalente y $y = f(x)$, entonces $f^*(y) = f^*(f(x)) = x$. Así pues, si una función es descrita por una fórmula $y = f(x)$, es decir,

$$f = \{(x, y) \mid y = f(x),\ x \in \mathfrak{D}_f\}$$

podemos intentar determinar f^* resolviendo la fórmula para x. Este procedimiento mostrará si f es univalente o no y, si conseguimos obtener la solución, ésta nos dará una regla de correspondencia para f^*. Esto queda ilustrado en el siguiente ejemplo.

6.11 Ejemplo. Si f y g son funciones definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ y } g(x) = 2x+3,$$

determínense

a) $f \circ g$, *b*) $g \circ f$, *c*) f^*, *d*) g^*.

SOLUCIÓN. De acuerdo con nuestra convención respecto al dominio de una función descrita por sólo una regla de correspondencia, tenemos: $\mathfrak{D}_f = [0, \infty\rangle$ y $\mathfrak{D}_g = \mathfrak{R}$.

a) $[f \circ g](x) = f(g(x)) = f(2x+3) = \sqrt{2x+3}$ y $\mathfrak{D}_{f \circ g} = [-\frac{3}{2}, \infty\rangle$.

b) $[g \circ f](x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}+3$ y $\mathfrak{D}_{g \circ f} = [0, \infty\rangle$.

c) Sea $y = f(x) = \sqrt{x}$, donde $x \in [0, \infty\rangle$. Entonces

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2.$$

Así pues, f es univalente: si $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$,

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = y_1^2 = y_2^2 = x_2.$$

Además, $f^*(y) = y^2$ y $\mathfrak{D}_{f^*} = \mathfrak{R}_f = [0, \infty\rangle$.

Podemos determinar f^* en otra forma. Como

$$f = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in [0, \infty\rangle\}$$
$$f^* = \{(\sqrt{x}, x) \mid x \in [0, \infty\rangle\}.$$

Si hacemos $y = \sqrt{x}$, entonces

$$f^* = \{(y, y^2) \mid y \in [0, \infty\rangle\}.$$

d) Sea $y = g(x) = 2x+3$, donde $x \in \mathrm{R}$. Entonces,

$$y = 2x+3 \Leftrightarrow x = \tfrac{1}{2}(y-3).$$

Es claro que g es univalente. La regla de correspondencia para g^* es $g^*(y) = \frac{1}{2}(y-3)$ y $\mathcal{D}_{g^*} = \mathrm{R}$.

Las gráficas de f^* y g^* están construidas en la figura 16.

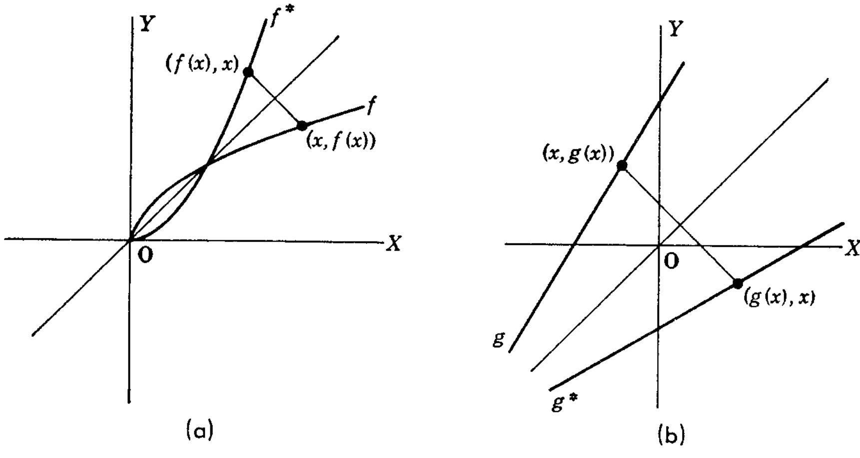


FIGURA 16

6.12 Ejemplo. Restrínjase el dominio de I^2 de tal forma que la función así obtenida sea univalente y encuéntrese la función inversa.

SOLUCIÓN. De la gráfica de I^2, ilustrada en la figura 17, puede deducirse que obtendríamos una función univalente restringiendo el dominio a $\langle -\infty, 0]$ y a $[0, \infty\rangle$. Sea

$$I_+^2 = \{(x, x^2) \mid x \in [0, \infty\rangle\} \quad \text{e} \quad I_-^2 = \{(x, x^2) \mid x \in \langle -\infty, 0]\}.$$

Para encontrar la inversa de I_+^2, sea $y = x^2$. Entonces

$$y = x^2 \quad \text{y} \quad x \in [0, \infty\rangle \Leftrightarrow x = \sqrt{y}.$$

Por tanto, I_+^2 es univalente y su inversa es la función raíz cuadrada $\{(y, \sqrt{y}) \mid y \in [0, \infty\rangle\}$. La inversa de I_-^2 se obtiene en forma similar:

$$y = x^2 \quad \text{y} \quad x \in \langle -\infty, 0] \Leftrightarrow x = -\sqrt{y}.$$

Así pues, I_-^2 es univalente y su inversa es la negativa de la función raíz cuadrada.

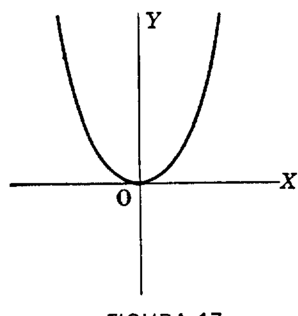


FIGURA 17

Problemas

1. Determínense $f \circ g$ y $g \circ f$ e ilústrense como mapeos:

a) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$
$g = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$

b) $f = \{(1, 2), (0, 1), (3, 10), (4, 17), (-1, 2)\}$
$g = \{(0, 1), (1, 0), (3, 3), (-1, 4), (2, 7)\}$

c) $f = \{(1, -2), (2, -5), (3, 0), (4, -1)\}$
$g = \{(0, 1), (1, 0), (3, 3), (-1, 4), (2, 1)\}$.

2. Determínense $f \circ g$ y $g \circ f$ cuando

a) $f = I^2+3$ y $g = I-6$

b) $f(x) = x^2-4$ y $g(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $\mathcal{D}_f = \langle -\infty, \infty \rangle$

$g(x) = 2x-3$, $\mathcal{D}_g = [0, 5]$

d) $f = \{(x, \sqrt{x-1}) | x \in [1, \infty\rangle\}$ y $g = (x, 3-x) | x \in \langle -\infty, \infty)$

e) $f = \{(x, \sqrt{x}) | x \in [0, \infty\rangle\}$
$g = \{(0, 1), (2, -3), (4, 7), (8, -1), (3, 1)\}$

f) $f = I^2-3I+5$ y $g = 3$

g) $f = I^3+4$ y $g = 3I+1$

h) $f = \dfrac{I^2+1}{I-1}$ y $g = I^2-2I$

i) $f = \dfrac{3I-2}{I^2}$ y $g = \dfrac{I-1}{4I^3}$.

3. Constrúyanse las gráficas de $f \circ g$ y $g \circ f$ partiendo de las gráficas de f y g cuando f y g son las funciones en

a) Problema 2*a*
b) Problema 2*b*
c) Problema 2*f*
d) Problema 2*g*.

4. Pruébese D_2 del teorema 6.5.

5. Determínense f^* y g^* (si existen) para las funciones en:

a) Problema 1*a*
b) Problema 1*b*
c) Problema 2*a*
d) Problema 2*c*
e) Problema 2*d*
f) Problema 2*f*
g) Problema 2*g*
h) Problema 2*h*.

6. Constrúyanse las gráficas de f^* y g^* (cuando existan) partiendo de las gráficas de f y g cuando f y g son las funciones en

a) Problema 2*a*
b) Problema 2*b*
c) Problema 2*c*
d) Problema 2*g*.

7. Determínense f^* (si existe) si

a) $f = \{(x, x^2) | x \in [0, 2]\}$
b) $f = \{(x, x^2) | x \in [-2, 2]\}$.

8. Si f y g son funciones univalentes, demuéstrese que $f \circ g$ es univalente y que $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

7. ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Hemos visto que el conjunto $\mathcal{S}$ de todas las funciones reales de variable real con las operaciones de adición, multiplicación y composición tiene muchas de las propiedades algebraicas fundamentales del sistema de los números reales (teoremas 5.4 y 6.5). Como las reglas desarrolladas en el álgebra para la operación de los números reales se basan sobre estas propiedades fundamentales, es de esperar que sean aplicables reglas semejantes para la operación de funciones. Sin embargo, debe tenerse cuidado cuando interviene la composición, pues esta operación no es conmutativa.

En esta sección consideraremos algunos ejemplos de operación de funciones que pueden obtenerse efectuando operaciones sobre la función identidad y las funciones constantes. Recuérdese que las funciones polinomiales son funciones que pueden construirse partiendo de estas funciones básicas mediante las operaciones de adición y multiplicación. Si la operación de división es también permisible, entonces obtenemos la clase de las funciones racionales.

Aparte de las propiedades básicas de las funciones reales enunciadas en los teoremas 5.4 y 6.5, usamos las siguientes propiedades de la función identidad:

7.1 $I^n \cdot I^m = I^{n+m}$, donde n y m son enteros positivos.

7.2 $I^n \circ I^m = I^{nm}$, donde n y m son enteros positivos.

7.3 $I^n \circ (f+g) = (f+g)^n$, donde n es un entero positivo.

La fórmula 7.1 es un caso especial de la fórmula más general $f^n \cdot f^m = f^{n+m}$ que vimos en la sección 5. La fórmula 7.2 puede probarse como sigue: es evidente que tanto $I^n \circ I^m$ como I^{nm} tienen R como dominio, y para cualquier $x \in \text{R}$, $[I^n \circ I^m](x) = I^n(I^m(x)) = I^n(x^m) = (x^m)^n = x^{nm} = I^{nm}(x)$. Dejamos al estudiante la prueba de 7.3 (problema 2).

7.4 Ejemplo. Dadas las funciones polinomiales

$$f = I^3 + 8I$$
$$g = I^2 + 2I$$

determínense: *a*) $f+g$, *b*) fg.

SOLUCIÓN.

a) $f+g = (I^3+8I)+(I^2+2I)$

$= I^3+I^2+8I+2I$ [5.4 A_3, A_2]

$= I^3+I^2+(8+2)I$ [5.4 D]

$= I^3+I^2+10I$

b) $fg = (I^3+8I)(I^2+2I)$

$= I^3(I^2+2I)+8I(I^2+2I)$ [5.4 D]

$= I^3I^2+I^3 2I+8II^2+8I2I$ [5.4 D, M_3]

$= I^3I^2+2I^3I+8II^2+16II$ [5.4 M_2]

$= I^5+2I^4+8I^3+16I^2$ [7.1]

Nótese que los resultados son los mismos que los que se tendrían si I representase un número real en vez de una función. En general, en expresiones que implican tan solo operaciones de adición, sustracción, y multiplicación de funciones podemos operar exactamente como si las funciones se reemplazasen por números reales. Sin embargo, como antes señalamos, debemos tener algún cuidado en la división de funciones. Por ejemplo, $\frac{2I}{I} \neq 2$, ya que las dos funciones no tienen el mismo dominio.

En el siguiente ejemplo justificamos solamente aquellos pasos en que aparece alguna composición.

7.5 Ejemplo. Dadas las funciones polinomiales

$$f = I^3+8I+3$$
$$g = I^2-2I$$

determínense: *a*) $f \circ g$, *b*) $g \circ f$.

SOLUCIÓN.

a) $f \circ g = (I^3+8I+3) \circ (I^2-2I)$

$= I^3 \circ (I^2-2I)+8I \circ (I^2-2I)+3 \circ (I^3-2I)$ [6.5 D_1]

$= (I^2-2I)^3+8(I^2-2I)+3$ [7.3]

$= I^6-6I^5+12I^4-8I^3+8I^2-16I+3$

$$\begin{aligned} b)\ g\circ f &= (I^2-2I)\circ(I^3+8I+3) \\ &= I^2\circ(I^3+8I+3)-2I\circ(I^3+8I+3) && [6.5\ D_1) \\ &= (I^3+8I+3)^2-2(I^3+8I+3) && [7.3] \\ &= I^6+16I^4+6I^3+64I^2+48I+9-2I^3-16I-6 \\ &= I^6+16I^4+4I^3+64I^2+32I+3. \end{aligned}$$

Consideremos ahora el problema de determinar la inversa de

$$I^n = \{(x, x^n) \mid x\in \mathrm{R}\},$$

donde n es un entero positivo. Si n es un entero impar, I^n es univalente y tiene por ello una inversa. Si denotamos la inversa de I^n por $I^{1/n}$, entonces

$$I^{1/n} = \{(x^n, x) \mid x\in\mathrm{R}\} = \{(x, \sqrt[n]{x}) \mid x\in\mathrm{R}\} \quad (n \text{ impar}).$$

Es decir, si n es impar, entonces $I^{1/n}$ es una función con dominio R y regla de correspondencia $I^{1/n}(x) = \sqrt[n]{x}$. Nótese que estamos usando el hecho de que si n es un entero impar, entonces hay un número real único, al que representamos con $\sqrt[n]{x}$, tal que $(\sqrt[n]{x})^n = x$. Por el momento, este hecho lo admitimos sin demostración; más adelante lo probaremos basándonos en el axioma del supremo.

Si n es un entero par, entonces la función I^n no es univalente, pues contendrá los pares ordenados $(-1, 1)$ y $(1, 1)$. Sin embargo, partiendo de la I^n podemos obtener una función univalente por restricción del dominio. Sea

$$I_+{}^n = \{(x, x^n) \mid x\in[0, \infty\rangle\}.$$

Entonces $I_+{}^n$ es univalente y tiene, por tanto, inversa. Si n es un entero par, entonces denotamos a la inversa de $I_+{}^n$ por $I^{1/n}$. Por tanto

$$I^{1/n} = \{(x^n, x) \mid x\in[0, \infty\rangle\} = \{(x, \sqrt[n]{x}) \mid x\in[0, \infty\rangle\} \quad (n \text{ par}),$$

donde $\sqrt[n]{x}$ es el único número real no negativo tal que $(\sqrt[n]{x})^n = x$. Nótese que esta definición para $I^{1/2}$ es la misma que la definición previamente dada para la función raíz cuadrada (definición 4.4, pág. 132).

Hemos definido así, para cualquier entero positivo n, la función raíz n-ésima $I^{1/n}$. La clase de funciones que pueden obtenerse a partir de la identidad y las funciones constantes efectuando las operaciones de adición, multiplicación, división y extracción de raíces se llama clase de *funciones algebraicas simples*.

Como para n impar, $I^{1/n}$ es la inversa de I^n, tenemos (usando 6.8 y 6.9):

7.6 $$I^{1/n}\circ I^n = I = I^n\circ I^{1/n} \quad (n \text{ impar}).$$

Sin embargo, para n par, $I^{1/n}$ no es la inversa de I^n. Las fórmulas que corresponden a 7.6 para este caso, son:

7.7 $$I^{1/n}\circ I^n = |\ \ | \quad \text{y} \quad I^n\circ I^{1/n} = I_+ \quad (n \text{ par}).$$

Tanto $I^{1/n} \circ I^n$ y la función valor absoluto, $|\ |$, tienen R como dominio. Para cualquier $x \in R$, tenemos:

$$[I^{1/n} \circ I^n](x) = I^{1/n}(I^n(x)) = I^{1/n}(x^n) = \sqrt[n]{x^n} = |x|.$$

Adviértase que $\sqrt[n]{x^n} = |x|$. Como $\sqrt[n]{x^n}$ es el número no negativo que, cuando es elevado a la n-ésima potencia nos da x^n, $\sqrt[n]{x^n}$ debe ser x o $-x$, aquel de los dos que sea no negativo.

Para probar la segunda parte de 7.7, obsérvese que $I^n \circ I^{1/n}$ e I_+ tienen ambos como dominio a $[0, \infty\rangle$. Además, para cualquier $x \in [0, \infty\rangle$,

$$[I^n \circ I^{1/n}](x) = I^n(I^{1/n}(x)) = I^n(\sqrt[n]{x}) = (\sqrt[n]{x})^n = x = I_+(x).$$

7.8 Ejemplo. Si $f = I^4 + 2I^2 + 4$ y $g = I^{1/2}$, determínese

a) $f \circ g$ y *b)* $g \circ f$.

Solución

a)
$$\begin{aligned} f \circ g &= (I^4 + 2I^2 + 4) \circ I^{1/2} \\ &= I^4 \circ I^{1/2} + 2I^2 \circ I^{1/2} + 4 \circ I^{1/2} \\ &= (I^2 \circ I^{1/2})(I^2 \circ I^{1/2}) + 2I^2 \circ I^{1/2} + 4 \\ &= I_+{}^2 + 2I_+ + 4. \end{aligned}$$

Es decir, $f \circ g$ es la función con dominio $[0, \infty\rangle$ y regla de correspondencia

$$[f \circ g](x) = x^2 + 2x + 4.$$

b) $g \circ f = I^{1/2} \circ (I^4 + 2I^2 + 4)$.

Así pues, $g \circ f$ es la función con regla de correspondencia

$$[g \circ f](x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 4}$$

y dominio el conjunto de todos los números reales, ya que $x^4 + 2x^2 + 4$ es positiva para todo los números reales x.

Es interesante observar que

$$|\ | = I_+ \cup (-I_-)$$

donde

$$I_- = \{(x, x) \mid x \in \langle -\infty, 0]\}.$$

Problemas

1. Determínense $f+g$ y fg si

a) $f = 3I^2 + 4I - 4$, $g = I^2 - 2I + 5$
b) $f = I^3 - 3I - 9$, $g = I^2 + 7$
c) $f = I^5 - 4I^3 + 3I$, $g = I^4 + I^3 + 4$
d) $f = 4I^7 - 5I^4 + 6I^2 + 5$, $g = 5I^4 - 6I^2 - 3I$.

2. Demuéstrese que $I^n \circ (f+g) = (f+g)^n$ donde n es un entero positivo.

3. Determínense $f \circ g$ y $g \circ f$ si

a) $f = I+2,\ g = I^2$

b) $f = 3I^2+4,\ g = I-3$

c) $f = I^2+2I-3,\ g = I^2+4$

d) $f = I^3,\ g = I^2-3I$.

4. Determínense el dominio y la regla de correspondencia de las siguientes funciones:

a) $I^{1/2} \cdot I^{1/2}$

b) $I^{1/2} \circ I^{1/2}$

c) $I^{1/2} \circ I^2$

d) $I^{1/3} \cdot I^{1/2}$

e) $I^2 \circ (I+I^{1/2})$

f) $(I+I^{1/2}) \circ I^2$

g) $(I^3+I^2) \circ I^{1/3}$

h) $(I^3+I^2) \cdot I^{1/3}$.

8. RESUMEN

En este capítulo se introdujeron las funciones y las operaciones algebraicas sobre las funciones. Se definió una función como un conjunto de pares ordenados de elementos tal que ninguno de dos pares ordenados distintos tenía el mismo primer elemento. Esto equivale a decir que una función es una correspondencia o mapeo del dominio al rango de la función.

Si una función es una función real de variable real, es decir, un conjunto de pares ordenados de números reales, entonces la gráfica de la función es el conjunto de pares ordenados de números considerado como un conjunto de puntos en R^2. La representación de la gráfica como un conjunto de puntos en el plano es un procedimiento adecuado para dar una imagen de la función tanto cualitativa como cuantitativamente. Sin embargo, sólo después de que hayamos estudiado cálculo tendremos a nuestra disposición herramientas adecuadas para trazar las gráficas de la mayor parte de las funciones. Como hemos visto por algunos ejemplos, el procedimiento de marcar unos cuantos puntos de la gráfica y dibujar después una curva lisa que pasa por estos puntos, no siempre da una buena representación de la gráfica de una función.

Después de haber definido las operaciones de adición, multiplicación y composición, probamos que el conjunto de las funciones reales de variable real con estas operaciones tiene la mayor parte de las propiedades algebraicas del sistema de los números reales (teoremas 5.4 y 6.5). Las excepciones son que algunas funciones tienen una inversa con respecto a estas operaciones sólo en un sentido restringido o, en el caso de la composición, no tienen inversa alguna, y que la composición no es conmutativa. Por ello, teniendo presente siempre estas excepciones, podemos manipular las funciones casi como si fueran números reales.

Como en la primera parte del cálculo sólo nos ocupamos de funciones reales de variable real, en este capítulo hemos subrayado tal tipo de

funciones. Aparte de algunas funciones reales de variable real especiales, obtuvimos la importante clase de funciones algebraicas simples. Esta clase de funciones incluye a las funciones polinomiales y racionales como casos especiales.

Problemas de repaso

1. Si f es la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} [2x], & x \in [0, 3] \\ 2[x], & x \in \langle 3, 5], \end{cases}$$

determínense $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{2}{3})$, $f(\frac{3}{2})$, $f(4)$, $f(\frac{10}{3})$. Trácese la gráfica de f.

2. Trácese la gráfica de $I^{1/3}$.

3. Si $f = I^{1/3}(2I^2+3I)$, determínese $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{4})$.

4. Si

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \in [0, 2] \\ -x+1, & x \in \langle 2, 5] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 3\rangle \\ 4, & x \in [3, 6], \end{cases}$$

determínense $f+g$, fg, $f \circ g$, y $g \circ f$ en los puntos 1, $\frac{5}{2}$, 4. Trácense las gráficas de f, g, y $f+g$.

5. Determínese una función univalente que mapee $\langle 0, 4\rangle$ sobre $\langle 0, 1\rangle$. Como una función tal da una correspondencia uno-uno entre los intervalos $\langle 0, 4\rangle$ y $\langle 0, 1\rangle$, podemos decir que estos intervalos tienen el mismo número de puntos.

6. Determínese una función univalente que mapee $\langle a, b\rangle$ sobre $\langle 0, 1\rangle$, donde $a < b$.

7. Si una partícula está en el punto $(1, 3)$ de R^2 en el tiempo $t = 0$ y se mueve en la dirección $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ a una velocidad constante de 5 unidades por segundo, determínese una función que describa la posición de la partícula en cualquier tiempo positivo.

8. Si $f = I^2-3$ y $g = I^3+4I^2+I$, determínense $f+g$, $f-g$, f^2, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$. También proporciónense el dominio y la regla de correspondencia de cada una de estas funciones.

9. Pruébese que

a) $[x+m] = [x]+m$, si m es un entero

b) $[x]+[-x] = 0$ o -1

c) $[x]+[y] \leqslant [x+y]$.

Capítulo

T(c) 4

Transformaciones rígidas

1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior, aunque dimos una definición general de función, nos ocupamos fundamentalmente de las unciones freales de variable real. En este capítulo estudiaremos funciones cuyo dominio es el plano euclidiano R^2 y cuyo rango está en R^2. Tales funciones son llamadas "transformaciones". Una transformación T es un conjunto de pares ordenados de puntos de R^2. $T \doteq \{(\mathbf{P}, T(\mathbf{P}) | \mathbf{P} \in R^2\}$, con ninguno de dos distintos pares de T con el mismo primer elemento. Una transformación T asigna a cada punto $\mathbf{P}$ la nueva posición $\mathbf{P}' = T(\mathbf{P})$ y es un conjunto de instrucciones para mover R^2.

Las transformaciones "rígidas" son las transformaciones que preservan la distancia. En general, las transformaciones estiran el plano o le dan

vuelta sobre sí mismo o lo deforman de algún otro modo. Bajo una transformación rígida, el plano se mueve sin deformación como si fuese un cuerpo rígido. El plano no es estirado ni contraído, ni ninguna parte del plano se dobla sobre sí misma. Al pensar en esto podemos concebir sólo tres tipos de transformación rígida: traslaciones, rotaciones alrededor de un punto, y una rotación de 180° del plano alrededor de una recta del plano. Esta última transformación se llama "reflexión" alrededor de la recta. Veremos cómo se representan estas transformaciones analíticamente y también que, básicamente, éstas son los únicos tipos de transformaciones rígidas. Queremos, también en este capítulo, identificar las propiedades del plano euclidiano que permanecen sin cambio en las transformaciones rígidas.

2. TRANSFORMACIONES

En la introducción señalamos que una transformación del plano euclidiano R^2 es una función con dominio R^2 y rango en R^2.

2.1 Definición. *Una función T con dominio* R^2 *y rango en* R^2 *se llama* ***transformación del plano euclidiano*** R^2.

Por ejemplo,

$$T(\mathbf{P}) = 3\mathbf{P}, \text{ para todo } \mathbf{P} \in R^2,$$

es una regla que define la transformación $T = \{(\mathbf{P}, 3\mathbf{P}) | \mathbf{P} \in R^2\}$. La regla puede también expresarse por un par de ecuaciones: $T(x, y) = (x', y')$ donde

$$x' = 3x$$
$$y' = 3y.$$

Así pues, $T(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$, $T(1, 0) = (3, 0)$, $T(2, 5) = (6, 15)$, $T(-1, 3) = (-3, 9)$ y así sucesivamente (figura 1). Esta transformación agranda el plano por el factor 3.

$$|T(\mathbf{P}_1) - T(\mathbf{P}_2)| = |3\mathbf{P}_1 - 3\mathbf{P}_2| = 3|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2|.$$

FIGURA 1

2.2 Ejemplo. Sean $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ y $\mathbf{P}_1'$, $\mathbf{P}_2'$, $\mathbf{P}_3'$, vértices de un par de triángulos. Los triángulos se dice que son *semejantes* si

$$\frac{|\mathbf{P}_2'-\mathbf{P}_1'|}{|\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1|} = \frac{|\mathbf{P}_3'-\mathbf{P}_1'|}{|\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_1|} = \frac{|\mathbf{P}_3'-\mathbf{P}_2'|}{|\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_2|}.$$

Demuéstrese que la transformación definida por $T(\mathbf{P}) = a\mathbf{P}$ para cada $\mathbf{P} \in \mathrm{R}^2$, donde a es un número real distinto de cero, transforma un triángulo en un triángulo semejante. (Una transformación T de este tipo se llama transformación de *semejanza.*)

SOLUCIÓN. Lo que deseamos demostrar es que el triángulo con vértices $T(\mathbf{P}_1)$, $T(\mathbf{P}_2)$, $T(\mathbf{P}_3)$ es semejante al triángulo con vértices $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$. Tenemos, en efecto,

$$|T(\mathbf{P})-T(\mathbf{Q})| = |a\mathbf{P}-a\mathbf{Q}| = |a|\,|\mathbf{P}-\mathbf{Q}|,$$

y vemos que la razón de distancias después de la transformación a distancias antes de la transformación es la misma para todos los pares de puntos distintos. El triángulo $T(\mathbf{P}_1)\,T(\mathbf{P}_2)\,T(\mathbf{P}_3)$ es, por tanto, semejante al triángulo $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$.

2.3 Definición. *Una transformación de* R^2 *se dice que es* ***no singular*** *si 1) es univalente (uno-uno), y 2) su rango es* R^2. *Una transformación que no es no singular se dice que es* ***singular*** .

2.4 Ejemplo. ¿Es no singular la transformación definida por
$(T(x, y) = (x', y'))$?

$$T: \quad \begin{aligned} x' &= x+5 \\ y' &= y. \end{aligned}$$

SOLUCIÓN. Para cada punto $\mathbf{P}' = (x', y')$ de R^2, las ecuaciones que definen T tienen la solución única $(x, y) = T^*(x', y') = (x'-5, y')$;

$$T^*: \quad \begin{aligned} x &= x'-5 \\ y &= y'. \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es univalente y el rango de T es R^2. De donde T es no singular, y las anteriores ecuaciones son las ecuaciones para la transformación inversa T^*. Nótese que

2.5 $$T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}' = \mathbf{P}+\mathbf{a},$$

donde $\mathbf{a} = (5, 0)$. Todo punto del plano se mueve (desplaza) 5 unidades

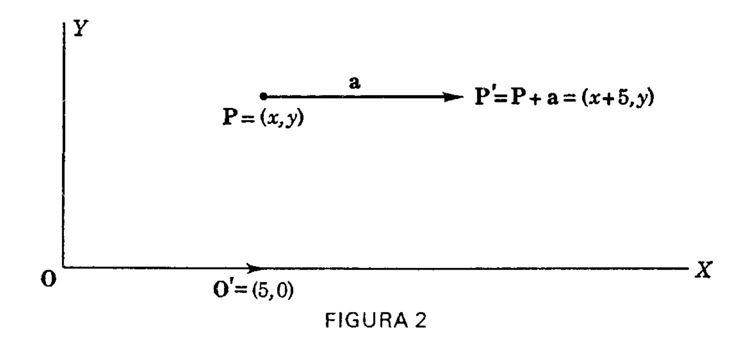


FIGURA 2

horizontalmente (figura 2). La transformación inversa T^* está definida por la regla

2.6 $$T^*(\mathbf{P}') = \mathbf{P}' - \mathbf{a}.$$

La transformación T^* mueve cada punto horizontalmente 5 unidades en la dirección opuesta.

La transformación definida por las ecuaciones

2.7 $$T: \begin{aligned} x' &= 0 \\ y' &= y \end{aligned}$$

es la "proyección ortogonal" de R^2 sobre el eje Y. Todos los puntos que se encuentran sobre la misma recta horizontal se transforman en el mismo punto sobre el eje Y (figura 3). La transformación no es univalente y es, por tanto, singular.

Las transformaciones no singulares están caracterizadas por dos propiedades. La primera de éstas, univalencia, nos dice que bajo la transformación ningún punto tiene más de un punto colocado encima de él; el plano no se dobla sobre sí mismo. La segunda propiedad es que el rango es R^2. Esto quiere decir que cada punto de R^2 tiene, al menos, un punto colocado encima de él por la transformación. Toda transformación no singular T, por ser univalente (uno-uno), tiene una inversa T^*. Como el

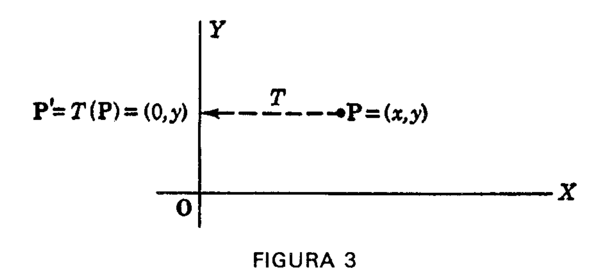


FIGURA 3

dominio y el rango de T es R^2, el dominio y el rango de T^* es también R^2. Por tanto, T^* es una transformación. Si $T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}'$, entonces $T^*(\mathbf{P}') = \mathbf{P}$; es decir, si T lleva $\mathbf{P}$ a $\mathbf{P}'$, entonces la transformación inversa T^* lleva de vuelta $\mathbf{P}'$ a $\mathbf{P}$.

2.8 Lema. *La inversa de una transformación no singular es una transformación no singular.*

PRUEBA. Como señalábamos anteriormente, si T es no singular, entonces T^* es una transformación con rango R^2 y dominio R^2. Como la inversa de una función univalente es una función univalente, T^* es univalente, y, por tanto, no singular.

Problemas

Considérense las siguientes transformaciones de R^2 definidas por las reglas:

1) $T_1(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+(1, 3)$

2) $T_2(x, y) = (x-1, y-3)$

3) $T_3(x, y) = (x', y')$
$x' = x+1$
$y' = y+3$

4) $T_4(x, y) = (x', y')$
$x' = |x|$
$y' = y$

5) $T_5(x, y) = x(2, 0)+y(0, 2)$

6) $T_6(x, y) = (x', y')$,
$x' = x$
$y' = x$

7) $T_7(x, y) = (x', y')$,
$x' = -y$
$y' = x$.

1. Determínese

a) $T_1(0, 0)$ *b*) $T_1(2, 5)$ *c*) $T_2(T_1(2, 5))$
d) $T_4(5, 3)$ *e*) $T_4(-5, 3)$ *f*) $T_5(-3, -2)$
g) $T_6(0, 5)$ *h*) $T_7(3, 8)$ *i*) $T_7(T_7(3, 8))$
j) $T_7(T_3(0, 1))$ *k*) $T_3(T_7(0, 1))$ *l*) $T_6(T_4(-5, 1))$.
m) $T_4(T_6(-5, 1))$

2. Proporciónese una descripción geométrica de cada una de las transformaciones $T_1, \ldots, T_7$.

3. Demuéstrese que:

a) $T_1 = T_3$ *b*) T_1 es no singular *c*) $T_1 = T_2$.

4. Demuéstrese que T_5 es no singular.

5. Determínese

a) $T_1^*(-1, -3)$ *b*) $T_1^*(0, 0)$ *c*) $T_1^*(1, 3)$
d) $T_5^*(2, 0)$ *e*) $T_5^*(0, 2)$ *f*) $T_5^*(2, 2)$.

6. Demuéstrese que T_7 es no singular, y proporciónese una regla para T_7^*.

7. Demuéstrese que T_4 y T_6 son singulares.

8. Encuéntrense todos los puntos **P** con la propiedad de que

a) $T_1(\mathbf{P}) = (1, 3)$
b) $T_1(\mathbf{P}) = (0, 0)$
c) $T_4(\mathbf{P}) = (1, 2)$
d) $T_4(\mathbf{P}) = (-1, 2)$
e) $T_5(\mathbf{P}) = (-2, 4)$
f) $T_6(\mathbf{P}) = (2, 2)$
g) $T_6(\mathbf{P}) = (-2, -2)$
h) $T_6(\mathbf{P}) = (-2, 2)$.

9. Demuéstrese que:

a) Toda transformación de semejanza es no singular (véase el ejemplo 2.2).

b) La inversa de una transformación de semejanza es una transformación de semejanza.

10. Proporciónese una descripción geométrica de:

a) Una transformación univalente que no sea no singular.

b) Una transformación de rango R^2 que no sea no singular.

***11.** Proporciónense representaciones analíticas para las transformaciones del problema 10.

3. TRANSFORMACIONES RÍGIDAS

En esta sección estudiaremos las transformaciones "rígidas" y aprenderemos cómo representarlas analíticamente.

En física, se entiende por un "cuerpo rígido" un sistema de partículas interconectadas de tal forma que las distancias entre las partículas no cambian. Por analogía, las transformaciones que preservan las distancias entre puntos se llaman transformaciones "rígidas".

3.1 Definición. *Una transformación T de R^2 se dice que es* ***rígida*** *si T preserva la distancia; es decir, si*

$$|T(\mathbf{P})-T(\mathbf{Q})| = |\mathbf{P}-\mathbf{Q}| \textit{ para todo } \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in R^2.$$

La transformación T definida por $T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+\mathbf{a}$ (ecuación 2.5) es un ejemplo de transformación rígida:

$$|T(\mathbf{P})-T(\mathbf{Q})| = |\mathbf{P}+\mathbf{a}-(\mathbf{Q}+\mathbf{a})| = |\mathbf{P}-\mathbf{Q}|$$

para todo $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in R^2$. La proyección ortogonal definida por 2.7 es un ejemplo de una transformación que no es rígida: Sea $\mathbf{P} = (0, 0)$ y $\mathbf{Q} = (1, 0)$; entonces $T(\mathbf{P}) = T(\mathbf{Q}) = (0, 0)$ y

$$|T(\mathbf{P})-T(\mathbf{Q})| = 0,$$

mientras que

$$|\mathbf{P}-\mathbf{Q}| = |(0, 0)-(1, 0)| = 1.$$

Ciertamente, es claro que ninguna transformación que lleva puntos distintos sobre un mismo punto puede preservar la distancia (problema 4).

Los tres tipos básicos de transformaciones rígidas son las "traslaciones", las "rotaciones", y las "reflexiones". La transformación definida por

3.2 $$T\colon\quad T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+\mathbf{a},$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ es un vector dado, se llama una *traslación* (figura 4).

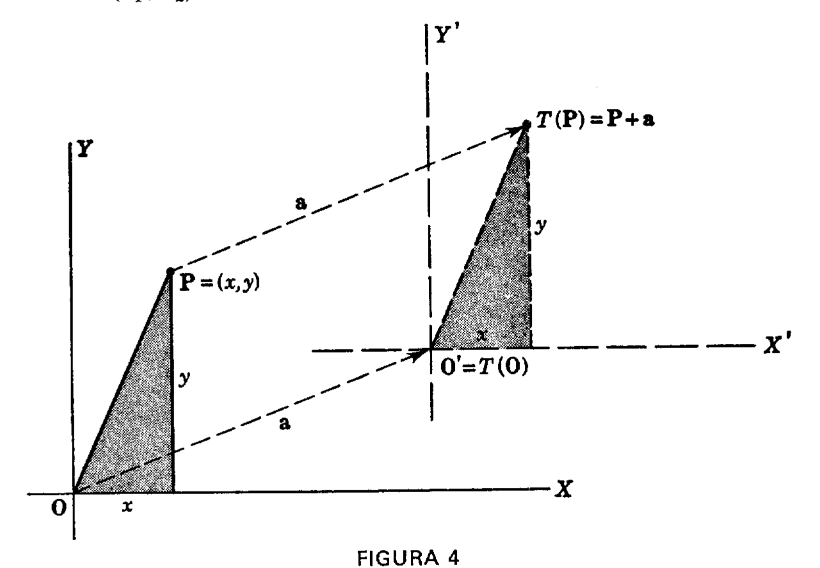


FIGURA 4

En lugar de la ecuación vectorial (3.2) podemos describir T por las ecuaciones componentes ($T(x, y) = (x', y')$)

3.3 $$T\colon\quad \begin{aligned} x' &= x+a_1 \\ y' &= y+a_2. \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ un vector de longitud la unidad ($u_1{}^2+u_2{}^2 = 1$). Entonces $\mathbf{u}^\perp = (-u_2, u_1)$.

La transformación U definida por

3.4 $$U\colon\quad U(x, y) = x\mathbf{u}+y\mathbf{u}^\perp, \quad |\mathbf{u}| = 1,$$

se llama *rotación alrededor del origen* o, simplemente, *rotación* (figura 5).

La transformación V definida por

3.5 $$V\colon\quad V(x, y) = x\mathbf{u}-y\mathbf{u}^\perp, \quad |\mathbf{u}| = 1,$$

se llama *reflexión alrededor de una recta que pasa por el origen* o, simplemente,

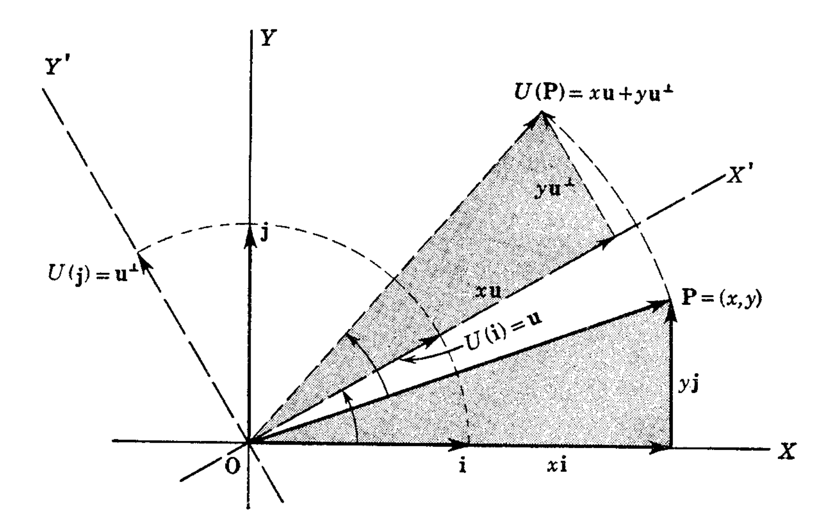


FIGURA 5

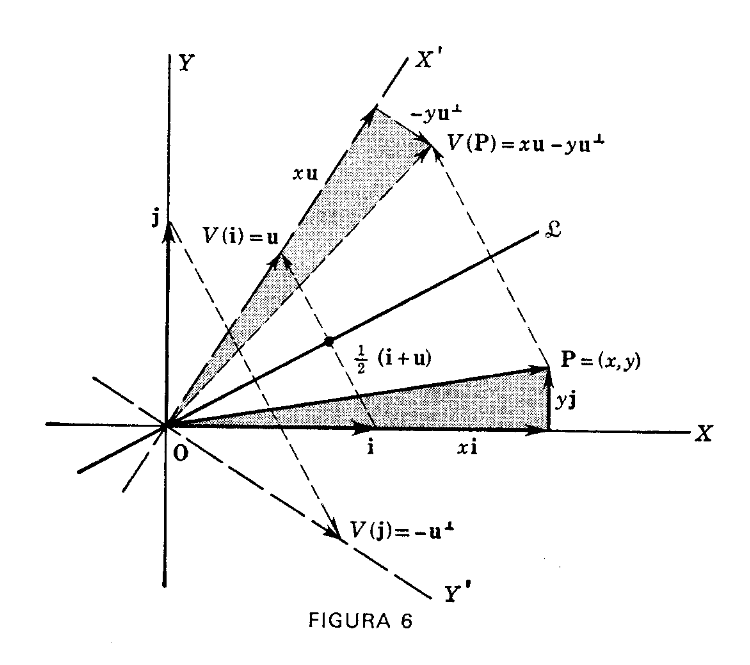


FIGURA 6

reflexión. La reflexión V definida por 3.5 es la reflexión alrededor de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el origen en la dirección $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{u} = (1 + u_1, u_2)$ (figura 6).

Sea $U(x, y) = (x', y')$. Entonces

$$\textbf{3.6} \qquad U: \begin{aligned} x' &= u_1 x - u_2 y, \\ y' &= u_2 x + u_1 y, \end{aligned} \qquad u_1{}^2 + u_2{}^2 = 1,$$

son ecuaciones de una rotación.

Sea $V(x, y) = (x', y')$. Entonces

$$\textbf{3.7} \qquad V: \begin{aligned} x' &= u_1 x + u_2 y, \\ y' &= u_2 x - u_1 y, \end{aligned} \qquad u_1{}^2 + u_2{}^2 = 1,$$

son ecuaciones de una reflexión.

La relación entre la descripción analítica (ecuación 3.2) y la imagen geométrica (figura 4) de una traslación T es sencilla. La traslación T desplaza cada punto **P** horizontalmente la distancia dirigida a_1 y verticalmente la distancia dirigida a_2; es decir, T desplaza cada punto **P** por $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.

La rotación U está ilustrada en la figura 5. De acuerdo con la ecuación 3.4

$$U(\mathbf{i}) = \mathbf{u} \quad \text{y} \quad U(\mathbf{j}) = \mathbf{u}^\perp, \quad |\mathbf{u}| = 1,$$

y

$$U(\mathbf{P}) = U(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}) = xU(\mathbf{i})+yU(\mathbf{j}) = x\mathbf{u}+y\mathbf{u}^\perp.$$

Es la figura 5 la que sugiere la representación analítica de las rotaciones.

La reflexión V alrededor de una recta $\mathcal{L}$ que pasa por el origen está ilustrada en la figura 6. Aquí

$$V(\mathbf{i}) = \mathbf{u} \quad \text{y} \quad V(\mathbf{j}) = -\mathbf{u}^\perp, \quad |\mathbf{u}| = 1$$

y

$$V(\mathbf{P}) = V(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}) = xV(\mathbf{i})+yV(\mathbf{j}) = x\mathbf{u}-y\mathbf{u}^\perp.$$

La recta $\mathcal{L}$ es la mediatriz del segmento rectilíneo que une a i y $V(\mathbf{i}) = \mathbf{u}$ y es, por tanto, la recta que pasa por el origen y el punto medio $\frac{1}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{u})$ del segmento rectilíneo; es decir, $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por el origen paralela a $\mathbf{c} = (\mathbf{i}+\mathbf{u})$. La figura 6 sugiere la representación analítica 3.5 de una reflexión V alrededor de $\mathcal{L}$, y no es difícil demostrar que 3.5 implica que $V(\mathbf{P})$ es la imagen refleja respecto a $\mathcal{L}$ de **P** (problema 12).

3.8 Ejemplo. Identifíquense cada una de las siguientes transformaciones y determínese la inversa de cada transformación

1) $T_1(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+(-3, 1)$.

2) $T_2(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(-2x-3y, 3x-2y)$.

3) T_3: $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2x+3y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3x-2y). \end{cases}$

SOLUCIÓN. 1) T_1 es una traslación; $\mathbf{a} = (-3, 1)$. Correspondiendo a cada $\mathbf{P}'$, la solución única de

$$\mathbf{P}' = T_1(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+(-3, 1)$$

es $\mathbf{P} = \mathbf{P}'-(-3, 1)$. De aquí que $T_1{}^*$ es la traslación

$$T_1{}^*(\mathbf{P}') = \mathbf{P}'+(3, -1).$$

2) $$T_2(x, y) = x\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) + y\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}\right)$$

$$= x\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right) + y\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)^{\perp}.$$

Por tanto, como $\left|\left(\dfrac{-2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)\right| = 1$, T_2 es la rotación con

$$\mathbf{u} = T_2(\mathbf{i}) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3).$$

Resolviendo

$$\mathbf{P}' = (x', y') = T_2(\mathbf{P}) = x\mathbf{u}+y\mathbf{u}^{\perp}, \ \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3),$$

obtenemos

$$x = \mathbf{P}'\cdot\mathbf{u} = (x', y')\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}(-2x'+3y')$$

y

$$y = \mathbf{P}'\cdot\mathbf{u}^{\perp} = (x', y')\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}(-3, -2)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{13}}(3x'+2y').$$

Por tanto

$$T_2^*(\mathbf{P}') = x' \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, -3) + y' \frac{1}{\sqrt{13}}(3, -2)$$

$$= x' \mathbf{u}^* + y' \mathbf{u}^{*\perp},$$

donde

$$\mathbf{u}^* = T_2^*(\mathbf{i}) = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, -3).$$

La inversa T_2^* de la rotación T_2 es ella misma una rotación.

3) $$T_3(x, y) = \frac{x}{\sqrt{13}}(2, 3) + \frac{y}{\sqrt{13}}(3, -2)$$

$$= x\mathbf{u} - y\mathbf{u}^{\perp},$$

donde $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2, 3)$.

Como $|\mathbf{u}| = 1$, T_3 es la reflexión alrededor de la recta que pasa por el origen paralela a $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{u} = (0, 1) + \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2, 3) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2 + \sqrt{13}, 3)$. Para cada $\mathbf{P}' = (x', y')$, la solución única de

$$\mathbf{P}' = T_3(\mathbf{P}) = x\mathbf{u} - y\mathbf{u}^{\perp}$$

es

$$x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}' = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3) \cdot (x', y')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y')$$

$$y = -\mathbf{u}^{\perp} \cdot \mathbf{P}' = -\frac{1}{\sqrt{13}}(-3, 2) \cdot (x', y')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' - 2y').$$

Por tanto, $T_3^* = T_3$; ésta es una propiedad que esperamos tengan todas las reflexiones —que la inversa de una reflexión sea una reflexión (problema 7).

Deseamos ahora demostrar que las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones son transformaciones rígidas. Lo probamos para las rotaciones.

Al final de la sección aparecen como problemas resultados análogos en lo que respecta a traslaciones y reflexiones (problemas 5 y 7).

3.9 Lema. *a) Las rotaciones alrededor del origen son transformaciones no singulares.*

b) La inversa de una rotación es una rotación.

c) Las rotaciones son transformaciones rígidas.

PRUEBA. Sea U la rotación

$$\mathbf{P}' = U(\mathbf{P}) = x\mathbf{u}+y\mathbf{u}^{\perp}, \quad |\mathbf{u}| = 1,$$
$$\mathbf{P} = (x, y), \quad \mathbf{P}' = (x', y'), \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2).$$

(a) y (b). Para cada $\mathbf{P}' \in \mathrm{R}^2$ sabemos que la ecuación $\mathbf{P}' = U(\mathbf{P})$ tiene la solución única

$$x = \mathbf{u}\cdot\mathbf{P}' = u_1 x' + u_2 y'$$
$$y = \mathbf{u}^{\perp}\cdot\mathbf{P}' = -u_2 x' + u_1 y'.$$

De donde U es no singular y

$$U^*(\mathbf{P}') = x'(u_1, -u_2)+y'(u_2, u_1)$$
$$= x'(u_1, -u_2)+y'(u_1, -u_2)^{\perp}.$$

U^* es una rotación y esto completa la prueba de (a) y (b).

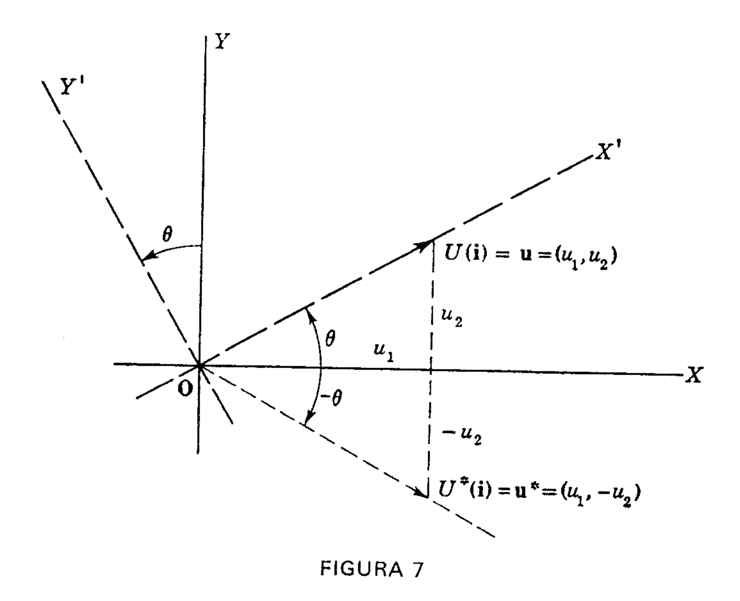


FIGURA 7

$c)$ Sea $\mathbf{P}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{P}_2 = (x_2, y_2)$.

Entonces

$$\begin{aligned}|U(\mathbf{P}_1)-U(\mathbf{P}_2)|^2 &= |(x_1-x_2)\mathbf{u}+(y_1-y_2)\mathbf{u}^\perp|^2\\ &= (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\ &= |\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2|^2.\end{aligned}$$

Por consiguiente, U preserva la distancia y es una transformación rígida.

En la prueba del anterior lema demostramos que, si U es la rotación con $U(\mathbf{i}) = \mathbf{u} = (u_1, u_2)$, entonces la inversa U^* es fácilmente obtenible: es la rotación con (figura 7)

3.10 $$U^*(\mathbf{i}) = \mathbf{u}^* = (u_1, -u_2).$$

Posteriormente veremos que esto significa que si U es la rotación de dirección contraria a la de las manecillas del reloj y de ángulo θ, entonces la inversa U^* es la rotación en dirección igual a la de las manecillas del reloj y de ángulo θ; es decir, U^* es la rotación contraria a la de las manecillas del reloj de ángulo $-\theta$.

3.11 Teorema. *Si U es una rotación, entonces*

a) $U(\mathbf{a})\cdot U(\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$
b) $\mathbf{a}\cdot U(\mathbf{b}) = U^*(\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$
c) $U(\mathbf{a}^\perp) = [U(\mathbf{a})]^\perp$.

PRUEBA. Sea $\mathbf{u} = U(\mathbf{i})$. Entonces $U(x, y) = x\mathbf{u}+y\mathbf{u}$.

a) Como $\mathbf{u}$ es un vector unitario,

$$\begin{aligned}U(\mathbf{a})\cdot U(\mathbf{b}) &= (a_1\mathbf{u}+a_2\mathbf{u}^\perp)\cdot(b_1\mathbf{u}+b_2\mathbf{u}^\perp)\\ &= a_1b_1\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}+(a_1b_2+a_2b_1)\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^\perp+a_2b_2\mathbf{u}^\perp\cdot\mathbf{u}^\perp\\ &= a_1b_1+a_2b_2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.\end{aligned}$$

b) Según el lema 3.9, U^* es una rotación. Por lo que según la parte (*a*) de este teorema

$$\mathbf{a}\cdot U(\mathbf{b}) = U^*(\mathbf{a})\cdot U^*(U(\mathbf{b})) = U^*(\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}.$$

c) $U(\mathbf{a}^\perp) = U(-a_2, a_1) = -a_2\mathbf{u}+a_1\mathbf{u}^\perp$.
Como $\mathbf{u}^{\perp\perp} = -\mathbf{u}$,

$$[U(\mathbf{a})]^\perp = (a_1\mathbf{u}+a_2\mathbf{u}^\perp)^\perp = a_1\mathbf{u}^\perp-a_2\mathbf{u} = U(\mathbf{a}^\perp).$$

La parte (*a*) del teorema 3.11 nos dice que el producto escalar no queda afectado por una rotación. Se dice por ello que el producto escalar es *invariante respecto a las rotaciones*. La propiedad enunciada en la parte (*b*) se demostró que era una consecuencia de la invariancia del producto escalar. Recíprocamente, vemos que la propiedad (*b*) implica que

$$U(\mathbf{a})\cdot U(\mathbf{b}) = U^*(U(\mathbf{a}))\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b};$$

es decir, la propiedad (*b*) es equivalente a la invariancia del producto

escalar. La propiedad (*c*) nos dice que la operación de hacer girar un vector en dirección contraria a la de las manecillas del reloj un ángulo de 90° es invariante respecto a las rotaciones. Es esta operación $\mathbf{a}^{\perp}$ sobre el vector **a** la que posteriormente nos permite distinguir entre una dirección dextrógira (igual a la de las manecillas del reloj) y una dirección levógira (contraria a la de las manecillas del reloj) sobre un círculo, y la invariancia de esta operación está relacionada al hecho de que una rotación no hace que el plano dé la vuelta sobre sí mismo. Si V es una reflexión, $V(\mathbf{a}^{\perp}) = -[V(\mathbf{a})]^{\perp}$ (problema 15*c*). El significado geométrico de esto es que, bajo una reflexión, el plano da una vuelta sobre sí mismo y lo que previamente aparecía como levógiro aparece ahora como dextrógiro.

3.12 Ejemplo. Determínese la traslación T que transforma el punto $\mathbf{P}_0$ en el punto $\mathbf{Q}_0$.

SOLUCIÓN. La regla para una traslación es

$$T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+\mathbf{a}.$$

Queremos que

$$T(\mathbf{P}_0) = \mathbf{P}_0+\mathbf{a} = \mathbf{Q}_0.$$

Esto es equivalente a

$$\mathbf{a} = \mathbf{Q}_0-\mathbf{P}_0\,;$$

es decir,

$$T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+(\mathbf{Q}_0-\mathbf{P}_0).$$

3.13 Ejemplo. Determínese la rotación U alrededor del origen que transforma

a) $(1, 0)$ en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

b) $(1, 0)$ en $(-1, \frac{1}{2})$.

c) $(2, 4)$ en $(4, 2)$.

SOLUCIÓN. *a*) Como $\mathbf{u} = U(1, 0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ y $\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\right| = 1$, la rotación deseada tiene la representación analítica

$$U(x,y) = \frac{x}{\sqrt{2}}(1,1) + \frac{y}{\sqrt{2}}(-1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y,\ x+y).$$

b) Toda rotación U alrededor del origen es una transformación rígida. Por tanto

$$|U(\mathbf{P})-U(\mathbf{O})| = |\mathbf{P}-\mathbf{O}|,$$

lo que significa (como $U(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$)

$$|U(\mathbf{P})| = |\mathbf{P}|.$$

Las rotaciones preservan las distancias de los puntos al origen. Como

$$|(1, 0)| = 1 \quad \text{y} \quad |(-1, \tfrac{1}{2})| = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

no hay ninguna rotación alrededor del origen con la propiedad

$$U(1, 0) = (-1, \tfrac{1}{2}).$$

c) Supongamos que una tal rotación existe. Entonces

$$U(x, y) = x(u_1, u_2) + y(-u_2, u_1), \quad {u_1}^2 + {u_2}^2 = 1$$

y

$$\begin{aligned}(4, 2) = U(2, 4) &= 2(u_1, u_2) + 4(-u_2, u_1)\\ &= u_1(2, 4) + u_2(-4, 2).\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos

$$u_1 = \frac{(2, 4)\cdot(4, 2)}{(2, 4)\cdot(2, 4)} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$u_2 = \frac{(-4, 2)\cdot(4, 2)}{20} = \frac{-12}{20} = \frac{-3}{5}.$$

Como ${u_1}^2 + {u_2}^2 = 1$, la rotación deseada es

$$\begin{aligned}U(x, y) &= x(\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5}) + y(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5})\\ &= \tfrac{1}{5}(4x + 3y, \ -3x + 4y).\end{aligned}$$

COMPROBACIÓN. $\quad U(2, 4) = \tfrac{1}{5}(20, 10) = (4, 2)$

y

$$(\tfrac{4}{5})^2 + (-\tfrac{3}{5})^2 = \frac{16+9}{25} = 1.$$

3.14 Ejemplo. Determínese la rotación U alrededor de $\mathbf{O}$ que transforma el eje X en $\mathcal{L} = \{t(1, 3)\}$.

SOLUCIÓN. Supongamos que U es una rotación tal. Entonces para alguna t

$$\mathbf{u} = U(1, 0) = t(1, 3).$$

Sin embargo, como $|U(1, 0)|^2 = 10t^2 = 1$, $t = \pm 1/\sqrt{10}$. (Figura 8.)

Las únicas rotaciones posibles corresponden a $\mathbf{u} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$; es decir,

$$U_1: \begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{10}}(x - 3y) \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{10}}(3x + y), \end{aligned} \qquad U_2: \begin{aligned} x' &= -\frac{1}{\sqrt{10}}(x - 3y) \\ y' &= -\frac{1}{\sqrt{10}}(3x + y). \end{aligned}$$

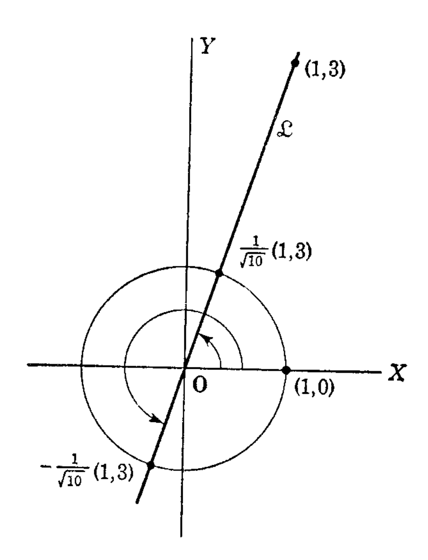


FIGURA 8

Es fácil verificar ahora que éstas son las rotaciones pedidas.

$$U_1(x, 0) = \frac{x}{\sqrt{10}}(1, 3) \in £$$

y

$$U_2(x, 0) = -\frac{x}{\sqrt{10}}(1, 3) \in £.$$

3.15 Ejemplo. Determínese la reflexión respecto de la recta £ de pendiente 1 que pasa por el origen.

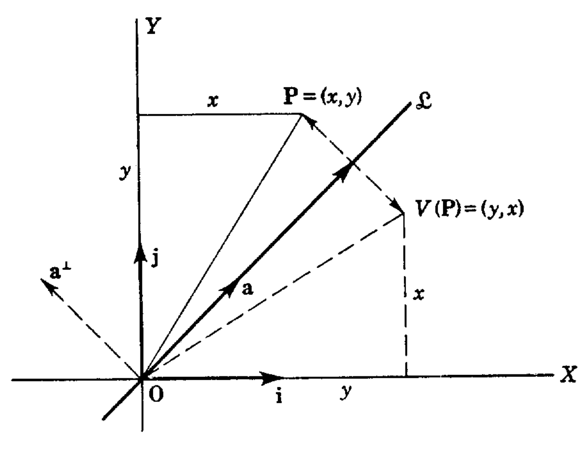


FIGURA 9

Solución. (Figura 9.) En esta solución usamos el hecho de que **P** y $V(\mathbf{P})$ son simétricos respecto a $\mathcal{L}$.

La recta $\mathcal{L}$ es paralela al vector unitario $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Como para cada punto **P**

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}^\perp)\mathbf{a}^\perp,$$

la regla de correspondencia para la reflexión V respecto de $\mathcal{L}$ es

$$\begin{aligned} V(\mathbf{P}) &= (\mathbf{P}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a} - (\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}^\perp)\mathbf{a}^\perp \\ &= \tfrac{1}{2}[(x+y)(1, 1) - (-x+y)(-1, 1)] \\ &= (y, x) = x\mathbf{j} - y\mathbf{j}^\perp. \end{aligned}$$

Vemos que ésta es la reflexión respecto de la recta que pasa por el origen paralela a $\mathbf{i}+\mathbf{j} = (1, 1)$.

Nota. Vemos, por el ejemplo 3.15, que la reflexión V respecto a la recta de pendiente 1 que pasa por el origen, intercambia las abscisas y las ordenadas (las coordenadas respecto a X con las coordenadas respecto a Y): $V(x, y) = (y, x)$. Sea f una función real de variable real. Si f es univalente, entonces la gráfica de f —la inversa de f^*— se obtiene a partir de la gráfica de f intercambiando las abscisas con las ordenadas. Significa esto que la gráfica de f puede obtenerse geométricamente de la gráfica de f^* por reflexión respecto de la recta de pendiente 1 que pasa por el origen.

3.16 Ejemplo. Determínese la rotación alrededor del origen que transforma $\mathbf{P}_0 \neq \mathbf{O}$ en un punto sobre la parte positiva del eje X.

SOLUCIÓN. Supongamos que U es la rotación pedida. Entonces $(\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0))$

$$U(\mathbf{P}_0) = |\mathbf{P}_0|\,\mathbf{i} = x_0\,\mathbf{u} + y_0\,\mathbf{u}^{\perp},$$

y

$$U\left(\frac{\mathbf{P}_0}{|\mathbf{P}_0|}\right) = \frac{x_0}{|\mathbf{P}_0|}\mathbf{u} + \frac{y_0}{|\mathbf{P}_0|}\mathbf{u}^{\perp} = \mathbf{i}.$$

De donde

$$\mathbf{u}^* = U^*(\mathbf{i}) = \frac{\mathbf{P}_0}{|\mathbf{P}_0|} = \frac{1}{|\mathbf{P}_0|}(x_0, y_0).$$

Por tanto, por 3.10

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{P}_0|}(x_0, -y_0).$$

Entonces es fácil verificar que la rotación U con

$$\mathbf{u} = U(\mathbf{i}) = \frac{(x_0, -y_0)}{|\mathbf{P}_0|}$$

es la rotación alrededor del origen que transforma $\mathbf{P}_0$ en un punto sobre la parte positiva del eje X:

$$U(\mathbf{P}_0) = x_0\,\mathbf{u} + y_0\,\mathbf{u}^{\perp} = \frac{1}{|\mathbf{P}_0|}({x_0}^2 + {y_0}^2, \; -x_0 y_0 + y_0 x_0)$$
$$= |\mathbf{P}_0|\,\mathbf{i}.$$

Problemas

1. Para cada transformación T determínese si T es 1) no singular, 2) rígido; si es no singular determínese la inversa T^*.

a) $T(x, y) = (-y, x)$

b) $T(x, y) = x(1, 1) + y(-1, 1)$

c) $T(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}(1, 1) + \dfrac{y}{\sqrt{2}}(-1, 1)$

d) $T(x, y) = (3x+2, y^2-1)$

e) $T(x, y) = (2x-4y, -x+2y)$

f) $T(x, y) = (y, x)$

g) $T(x, y) = (2y, 2x)$

h) $T(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y, x-y)$

i) $T(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y, x-y) + (3, 5).$

2. Identifíquense las traslaciones, rotaciones, y reflexiones del problema 1.

3. Trácese la gráfica de cada una de las funciones f. Demuéstrese que cada una de ellas es univalente y, por reflexión respecto de la recta $\{(x, x)\}$, trácese la gráfica de f^*, inversa de f, para cada f.

a) $f(x) = x^2$, $x \geqslant 0$. $(f^* = I^{1/2})$
b) $f(x) = x^2$, $x \leqslant 0$. $(f^* = -I^{1/2})$
c) $f = I^3$ $(f^* = I^{1/3})$
d) $f(x) = 3x - x^3$, $x \in [-1, 1]$.

4. Pruébese que: *toda transformación rígida es univalente.*

5. Pruébese que:

a) *Las traslaciones son transformaciones rígidas.*
b) *La inversa de una traslación es una traslación.*
c) *Las traslaciones son no singulares.*

6. Demuéstrese que: *toda transformación T de la forma*

$$T(x, y) = x\mathbf{a} + y\mathbf{b},$$

donde $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ *y* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, *es una transformación rígida.*

7. Pruébese que:

a) *Las reflexiones respecto a una recta que pasa por el origen son transformaciones rígidas.*
b) *Toda reflexión respecto a una recta que pasa por el origen es su propia inversa.*
c) *Las reflexiones son no singulares.*

8. Determínense cuatro traslaciones sabiendo que, respectivamente, llevan:

a) $(0, 0)$ a $(4, 3)$
b) $(4, 3)$ a $(0, 0)$
c) $(1, -3)$ a $(40, -23)$
c) $(-3, 2)$ a $(13, -7)$.

9. Determínense 1) cada una de las rotaciones alrededor del origen, 2) cada una de las reflexiones respecto a una recta que pasa por el origen, que transforman

a) $(1, 0)$ en $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$
b) $(0, 5)$ en $(3, 4)$
c) $(0, 1)$ en $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$
d) $(1, 0)$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$
e) $(1, 3)$ en $(-3, 1)$
f) $(1, 1)$ en $(1, 1)$
g) $(1, 3)$ en $(3, -1)$
h) $(3, -1)$ en $(1, 3)$.

10. Si $\mathcal{E}$ es un subconjunto de R^2 y T es una transformación de R^2, entonces $T(\mathcal{E})$ —llamado *transformado* de $\mathcal{E}$ por T— es el conjunto

$$T(\mathcal{E}) = \{T(\mathbf{P}) | \mathbf{P} \in \mathcal{E}\}.$$

Determínense:

a) $T(X)$; $T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+(0, 5)$
b) $T(Y)$; $T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+(0, 5)$
c) $T(\mathcal{C})$; $T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+(1, -2)$ y $\mathcal{C}$ es la circunferencia de radio 1 alrededor del origen
d) $L(X)$; $L(x, y) = x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$
e) $L(Y)$; $L(x, y) = x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$.

11. Determínense todas las rotaciones alrededor del origen que transforman la recta $\mathcal{L}_1$ en la recta $\mathcal{L}_2$.

a) $\mathcal{L}_1 = \{(x, x)\}$, $\mathcal{L}_2 = \{(x, -2x)\}$
b) $\mathcal{L}_1 = \{(x, -2x)\}$, $\mathcal{L}_2 = \{(x, x)\}$
c) $\mathcal{L}_1$: $2x-3y = 0$, $\mathcal{L}_2$: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \end{cases}$
d) $\mathcal{L}_1 = \{(0, y)\}$, $\mathcal{L}_2$: $y = -x$.

12. *Sea $\mathcal{L}$ la recta que pasa por el origen y es paralela al vector unitario* $\mathbf{a}$. Pruébese que: *la transformación V definida por*

$$V(\mathbf{P}) = (\mathbf{P}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}-(\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}^{\perp})\mathbf{a}^{\perp}$$

es la reflexión respecto a $\mathcal{L}$ (figura 9).

13. Determínese la reflexión respecto a la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el origen cuando:

a) $\mathcal{L}$ es el eje X
b) $\mathcal{L}$ es el eje Y
c) $\mathcal{L}$ es la recta de pendiente -1
d) $\mathcal{L}$ es la recta de pendiente 2.

14. Una transformación $\mathcal{L}$ se dice que es lineal si

$$L(a\mathbf{P}+b\mathbf{Q}) = aL(\mathbf{P})+bL(\mathbf{Q}) \text{ para todo } a, b\in\mathrm{R} \text{ y para todo } \mathbf{P}, \mathbf{Q}\in\mathrm{R}^2.$$

Muéstrese que: *las rotaciones alrededor del origen y las reflexiones respecto a una recta que pase por el origen, son transformaciones lineales.*

15. Muéstrese que: si V es una reflexión, entonces

a) $V(\mathbf{a})\cdot V(\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$
b) $\mathbf{a}\cdot V(\mathbf{b}) = V^*(\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$
c) $V(\mathbf{a}^{\perp}) = -[V(\mathbf{a})]^{\perp}$.

16. Muéstrese que: *las únicas transformaciones lineales que dejan invariante el producto escalar, son las rotaciones y las reflexiones.* (A éstas se les llama transformaciones lineales *ortogonales* porque preservan la ortogonalidad de los vectores.)

4. COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES

Tenemos, a menudo, oportunidad de aplicar una transformación U al plano euclidiano R^2 y luego continuar el proceso aplicando una segunda transformación T. Por ejemplo (figura 10) primero podemos hacer girar

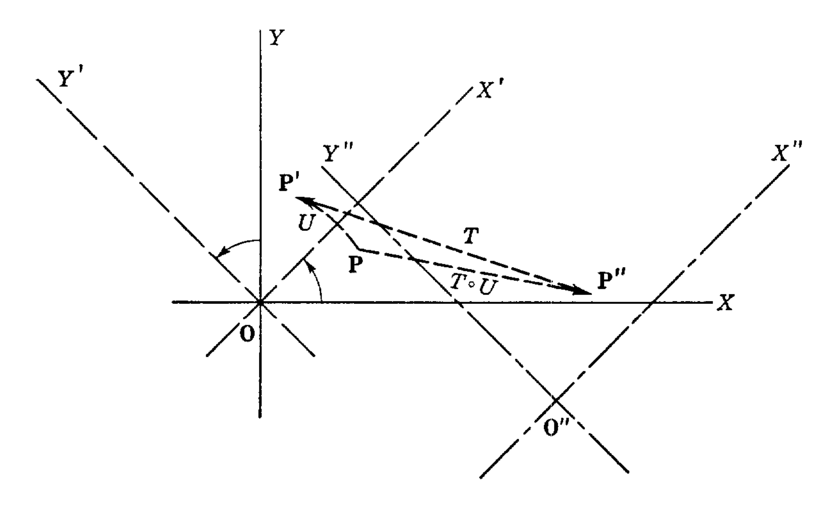


FIGURA 10

a R^2 y luego aplicar una traslación a R^2. Esta es la composición $T \circ U$ de T y U. La regla de correspondencia para $T \circ U$ es

4.1 $$[T \circ U](\mathbf{P}) = T(U(\mathbf{P})).$$

Primero, se aplica la transformación U que mueve $\mathbf{P}$ a $\mathbf{P}' = U(\mathbf{P})$. A continuación, la transformación T mueve $\mathbf{P}'$ a $\mathbf{P}'' = T(\mathbf{P}')$. La composición $T \circ U$ de las dos transformaciones lleva $\mathbf{P}$ a $\mathbf{P}''$. En el siguiente ejemplo, primero aplicamos una rotación de 45° a R^2, y luego una traslación.

4.2 Ejemplo. Determínese $T \circ U$, donde

$$U(x, y) = \frac{x}{\sqrt{2}}(1, 1) + \frac{y}{\sqrt{2}}(-1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y)$$

y

$$T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+(3, -1).$$

SOLUCIÓN. (Figura 10.)

$$[T \circ U](x, y) = T(U(x, y)) = T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y)+(3, -1).$$

Por ejemplo

$$[T \circ U](1, \tfrac{1}{2}) = T(U(1, \tfrac{1}{2})) = T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2})+(3, -1) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 3, \frac{3}{2\sqrt{2}} - 1\right).$$

Podemos representar la composición de transformaciones mediante diagramas tales como los de las figuras 11 y 12. Por ejemplo, la figura 12 ilustra la ley asociativa

4.3 $$S \circ [T \circ U] = [S \circ T] \circ U$$

para el producto de transformaciones. El diagrama representa el hecho de que

$$[S \circ (T \circ U)](\mathbf{P}) = S([T \circ U](\mathbf{P})) = S(T(U(\mathbf{P})))$$

y

$$[(S \circ T) \circ U](\mathbf{P}) = [S \circ T](U(\mathbf{P})) = S(T(U(\mathbf{P}))).$$

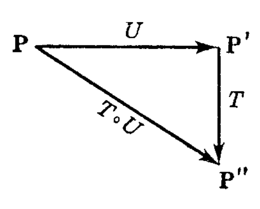


FIGURA 11

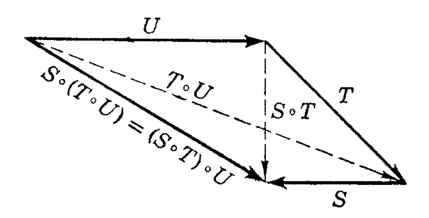


FIGURA 12

El siguiente ejemplo muestra que el producto de transformaciones rígidas no es, en general, conmutativo. En nuestro estudio de funciones reales de variable real vimos que $f \circ g$ no es en general lo mismo que $g \circ f$. Las operaciones no conmutativas son realmente comunes. No es lo mismo cortarse el pelo y ponerse (luego) el sombrero, que ponerse el sombrero y (luego) cortarse el pelo.

4.4 Ejemplo. Sea U la rotación $U(x, y) = (y, -x)$ y sea V la reflexión respecto al eje X. Determínense $V \circ U$ y $U \circ V$.

SOLUCIÓN. $V(x, y) = (x, -y)$. Entonces

$$V(U(x, y)) = V(y, -x) = (y, x).$$

Por tanto

$$[V \circ U](x, y) = (y, x),$$

y $V \circ U$ es la reflexión respecto a la recta $\{(x, x)\}$. Invirtiendo el orden de las transformaciones, obtenemos

$$U(V(x, y)) = U(x, -y) = (-y, -x).$$

Por tanto

$$[U \circ V](x, y) = -(y, x)$$

y $U \circ V$ es la reflexión respecto a la recta $\{(x, -x)\}$. $U \circ V \neq V \circ U$. En realidad, $U \circ V$ es igual a $V \circ U$ seguido de la rotación de 180° alrededor del origen.

Problemas

Considérense las transformaciones definidas por

1) $T_1(x, y) = -(x, y)$.

2) $T_2(x, y) = (x-2, y+3)$.

3) $T_3: \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y). \end{cases}$

4) $T_4(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}(1, 1) + \dfrac{y}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

5) $T_5(x, y) = \frac{1}{2}(x+\sqrt{3}y, -\sqrt{3}x+y)$.

6) $T_6(x, y) = (x-x_0, y-y_0)$.

7) $T_7(x, y) = x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ linealmente independientes.

1. Identifíquese cada una de las anteriores transformaciones. Hágase un esquema en que se muestre cómo se transforman los ejes X y Y.

2. Determínese cada transformación y provéase un esquema como en el problema 1.

a) $T_1 \circ T_2$	*b*) $T_2 \circ T_1$	*c*) $T_4 \circ T_5$.
d) $T_3 \circ T_4$	*e*) T_1^*	*f*) $T_5^* \circ T_5$
g) T_2^*	*h*) T_3^*	*i*) $(T_2 \circ T_3)^*$
j) $T_1 \circ T_6$	*k*) $T_6 \circ T_7$	*l*) $T_7 \circ T_6$.

3. Demuéstrese que:
a) *La composición de traslaciones es una traslación.*
b) *La composición de rotaciones alrededor del origen es una rotación alrededor del origen.*
c) *Si U_1 y U_2 son rotaciones, entonces $U_1 \circ U_2 = U_2 \circ U_1$.*

4. Demuéstrese que: *toda reflexión respecto a una recta que pasa por el origen, es la composición de una rotación alrededor del origen y una reflexión respecto al eje X.*

5. TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES

En las secciones precedentes hablábamos de transformaciones como transformaciones de puntos. Visualizábamos la situación como si el plano R^2 se moviese con respecto a él mismo y como si una transformación fuese un conjunto de instrucciones para mover el plano. Ésta es la interpretación

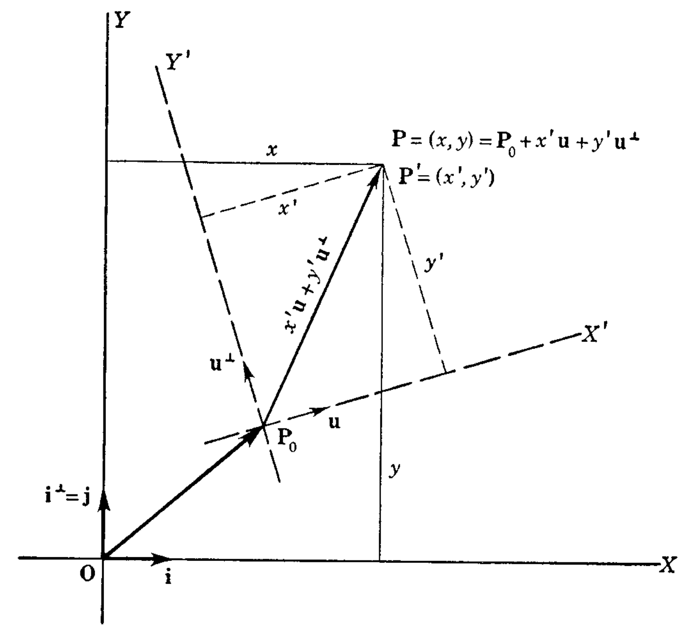


FIGURA 13

activa de una transformación. La transformación T mueve el punto $\mathbf{P}$ a la nueva posición $T(\mathbf{P})$. En esta sección consideraremos las transformaciones como si fueran transformaciones de coordenadas, y nos limitaremos a las rotaciones y a las traslaciones. (En la sección 9 se da una discusión más general de los sistemas de coordenadas.) Aquí, la interpretación de una transformación es pasiva. El plano R^2 no se mueve. La transformación define un nuevo juego de ejes coordenados y asigna un nuevo par de coordenadas a cada punto del plano.

Designemos con X, Y los ejes de coordenadas originales, y con X', Y' los nuevos ejes de coordenadas (figura 13). Suponemos que los ejes X', Y' se han obtenido por una rotación y una traslación de los ejes originales. Sea $\mathbf{u}$ el vector unitario en la dirección positiva del eje X', y sea $\mathbf{P}_0$ el origen del nuevo sistema de coordenadas. Entonces $\mathbf{u}^{\perp}$ es un vector unitario en la dirección positiva del eje Y'. El vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}$ es la descripción de $\mathbf{u}$ respecto a los ejes de coordenadas originales; u_1 y u_2 son los componentes de $\mathbf{u}$ respecto a los ejes de coordenadas originales. $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ y x_0, y_0 son las coordenadas del nuevo origen respecto a los ejes originales de coordenadas. Las nuevas coordenadas $\mathbf{P}' = (x', y')$ del punto cuyas coordenadas originales eran $\mathbf{P} = (x, y)$ están relacionadas con las coordenadas originales por

5.1 $$\mathbf{P} = (x, y) = T(\mathbf{P}') = x'\,\mathbf{u}+y'\,\mathbf{u}^{\perp}+\mathbf{P}_0\,;$$

es decir,

5.2 $$\begin{aligned} x &= u_1x'-u_2y'+x_0 \\ y &= u_2x'+u_1y'+y_0. \end{aligned}$$

El número x' es la distancia dirigida desde el eje Y' al punto y el número y' es la distancia dirigida desde el eje X' al punto. Estos números x', y' son las nuevas coordenadas del punto que en el sistema original de coordenadas tenía las coordenadas x, y. Con referencia al nuevo sistema de coordenadas denotamos al punto por $\mathbf{P}' = (x', y')$. Las nuevas coordenadas podían también ser descritas como los únicos números con la propiedad de que $\mathbf{P}-\mathbf{P}_0 = x'\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp}$. Los números son únicos puesto que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}^{\perp}$ son, ciertamente, linealmente independientes.

La transformación T representando el cambio de coordenadas es la composición de la traslación

$$S(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}+\mathbf{P}_0$$

y la rotación

$$U(x', y') = x'\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp}.$$

$T = S \circ U$. Primero se hacen girar los ejes, y luego se les traslada. Como los nuevos ejes de coordenadas son ortogonales, el nuevo sistema de

coordenadas se llama, también, sistema de coordenadas rectangular o cartesiano. Invirtiendo (5.1) obtenemos las ecuaciones para las nuevas coordenadas en términos de las coordenadas originales ($T^* = U^* \circ S^*$)

5.3 $$\mathbf{P}' = T^*(\mathbf{P}) = U^*(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0) = (x-x_0)\mathbf{u}^* + (y-y_0)\mathbf{u}^{*\perp}$$

donde $\mathbf{u}^* = (u_1, -u_2)$; es decir,

5.4 $$x' = u_1(x-x_0)+u_2(y-y_0)$$
$$y' = -u_2(x-x_0)+u_1(y-y_0).$$

5.5 Ejemplo. Descríbase geométricamente la transformación de coordenadas definida por

$$x = \frac{1}{\sqrt{10}}(x'-3y')+4$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x'+y')-3.$$

Solución. Vemos que $\mathbf{u} = U(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$ y $\mathbf{P}_0 = T(0, 0) = (4, -3)$.

Los nuevos ejes de coordenadas tienen la dirección $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$ y $\frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)$ respecto a los ejes originales, y en las coordenadas originales el nuevo origen es $(4, -3)$.

5.6 Ejemplo. Las coordenadas del punto $\mathbf{P} = (x, y)$ satisfacen la ecuación

$$x^2+xy+y^2 = 8.$$

Giramos los ejes de coordenadas y la dirección positiva del eje X' es $(1, 1)$. ¿Cuál es la ecuación satisfecha por las nuevas coordenadas del punto?

Solución. Aquí $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ y

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$$

$$x^2 = \tfrac{1}{2}(x'^2-2x'y'+y'^2)$$
$$xy = \tfrac{1}{2}(x'^2-y'^2)$$
$$y^2 = \tfrac{1}{2}(x'^2+2x'y'+y'^2).$$

Por tanto

$$x^2+xy+y^2 = \tfrac{3}{2}x'^2+\tfrac{1}{2}y'^2$$

y

$$x^2+xy+y^2 = 8$$

implica

$$3x'^2+y'^2 = 16.$$

5.7 Ejemplo. Consideremos la rotación U de coordenadas definida por

$$\mathbf{P} = (x, y) = U(\mathbf{P}').$$

Sea

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{P} = c$$

una ecuación en las coordenadas originales de una recta $\mathcal{L}$. Muéstrese que

$$U^*(\mathbf{n})\cdot\mathbf{P}' = c$$

es una ecuación en las nuevas coordenadas de $\mathcal{L}$.

SOLUCIÓN. Como el producto escalar es invariante respecto a las rotaciones,

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{P} = c \text{ si y sólo si } U^*(\mathbf{n})\cdot U^*(\mathbf{P}) = c$$

es decir,

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{P} = c \text{ si y sólo si } U^*(\mathbf{n})\cdot\mathbf{P}' = c.$$

Esto quiere decir que en las nuevas coordenadas la recta es ortogonal a $U^*(\mathbf{n})$.

Nota. La interpretación del ejemplo 7.5 en términos de una rotación de puntos en vez de una rotación de coordenadas es de interés. La rotación U^* lleva el punto $\mathbf{P}$ al punto $\mathbf{P}' = U^*(\mathbf{P})$. Si $\mathcal{L}$ es una recta, entonces tiene una ecuación de la forma

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{P} = c.$$

Bajo la rotación U^*, la recta $\mathcal{L}$ se transforma en el conjunto de puntos $\mathbf{P}'$ que satisfacen

$$U^*(\mathbf{n})\cdot\mathbf{P}' = c;$$

es decir, $U^*(\mathcal{L})$ es una recta. Las rotaciones transforman las rectas en rectas.

Problemas

1. Dibújense los ejes coordenados y descríbase cada uno de los cambios

de coordenadas abajo definidos.

$a)$ $x = x'+3$
$y = y'-2$

$b)$ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$
$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y')$

$c)$ $x = y'-1$
$y = -x'+2$

$d)$ $x' = \frac{1}{2}(x-\sqrt{3}\,y)-2$
$y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,x+y)-1.$

2. Para cada uno de los cambios de coordenadas del problema 1 proporciónense ecuaciones en las nuevas coordenadas para la recta cuya ecuación en las coordenadas originales es

$$2x-3y = 5.$$

3. Determínese la traslación de coordenadas bajo la cual la ecuación

$$2x^2+y^2-16x+4y = -35$$

se hace

$$2x'^2+y'^2 = 1.$$

4. ¿Qué rotaciones transforman la ecuación

$$2x^2+3xy+2y^2 = 4$$

en la ecuación

$$7x'^2+y'^2 = 8?$$

6. GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

Hemos visto ejemplos de sistemas con operaciones que son análogas a la adición y a la multiplicación de los números reales. Por ejemplo, la adición de vectores, la composición de funciones, la multiplicación y adición de funciones reales, todas tienen propiedades que son semejantes a las propiedades aditivas o multiplicativas del sistema de los números reales. En el álgebra moderna se presentan y estudian sistemas abstractos con operaciones de esta clase. Uno de los sistemas algebraicos básicos es el de grupo. El concepto de grupo nos permite subrayar la unidad de ideas y métodos que entran en el estudio de muchos tipos diferentes de sistemas y nos da un lenguaje sencillo con el que se pueden expresar resultados básicos en nuestro estudio de las transformaciones.

Considérese un conjunto $\mathcal{G}$ de elementos $a, b, c, \ldots$ Una función o de $\mathcal{G}\times\mathcal{G}$ en $\mathcal{G}$ se llama una *operación binaria* sobre $\mathcal{G}$; es decir, para cada a y b en $\mathcal{G}$ está asociado un elemento $o(a, b)$ de $\mathcal{G}$. En lugar de $o(a, b)$

escribimos $a \circ b$. Por ejemplo, $a+b$ y ab son operaciones binarias sobre el sistema de los números reales R. La adición $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ de vectores es una operación binaria sobre el espacio vectorial V_2. El producto escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ no es una operación binaria sobre V_2; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ es una función de $V_2 \times V_2$ en R. La adición $f+g$, la multiplicación fg, y la composición $f \circ g$ de funciones reales de variable real son operaciones binarias definidas en el conjunto de todas las funciones reales de variable real. La composición $U \circ T$ de transformaciones es la operación binaria que estudiamos en esta sección.

6.1 Definición. *Un conjunto $\mathcal{G}$ con una operación binaria o se llama* ***grupo bajo la operación*** *o si*

1. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ *para cualquier* $a, b, c \in \mathcal{G}$ (ley asociativa).
2. *Hay un (único) elemento $e \in \mathcal{G}$ con la propiedad de que*

$$a \circ e = e \circ a = a$$

para todo $a \in \mathcal{G}$. (a e se le llama ***identidad*** *o* ***elemento neutro****).*

3. *Para cada elemento $a \in \mathcal{G}$ hay un elemento (único) $a^* \in \mathcal{G}$ con la propiedad de que*

$$a \circ a^* = a^* \circ a = e$$

(a^* se llama ***inverso*** *de a).*

Si, además,

4. *$a \circ b = b \circ a$ para todo $a, b \in \mathcal{G}$ (ley conmutativa), el grupo $\mathcal{G}$ se dice que es* ***conmutativo.*** *Si la ley conmutativa no se verifica, decimos que el grupo es* ***no conmutativo.***

Nota. En 2 y 3 la palabra "único" está entre paréntesis porque puede omitirse y demostrarse que es (la unicidad) una consecuencia de los postulados. (Véase la prueba del teorema 6.2.)

Los axiomas A_1-A_5 para el sistema de los números reales, pág. 25, son equivalentes a decir que los números reales son un grupo conmutativo respecto a la adición. Los axiomas M_1-M_5 nos dicen que los números reales distintos de cero son un grupo conmutativo respecto a la multiplicación. En el teorema 3.8 del capítulo 2, pág. 58, las propiedades A_1-A_5 equivalen a mostrar que el espacio vectorial V_2 es un grupo conmutativo respecto a la adición. Mostramos ahora que el conjunto de todas las transformaciones no singulares es un grupo no conmutativo respecto a la composición. Así pues, la composición de las transformaciones no singulares de R^2 tiene, con excepción de la conmutatividad, las propiedades multiplicativas de los números reales distintos de cero.

6.2 Teorema. *El conjunto $\mathfrak{T}$ de todas las transformaciones no singulares es un grupo no conmutativo bajo la composición.*

PRUEBA. Demostraremos, primero, que la composición de transformaciones no singulares es una operación binaria en $\mathfrak{T}$. Esto quiere decir que debemos mostrar que la composición de un par de transformaciones no singulares es una transformación no singular. Como el rango y el dominio de un par de transformaciones no singulares U y T es R^2, el rango y el dominio de $U \circ T$ es también R^2. La composición de cualquier par de funciones univalentes es univalente, y, por tanto, $U \circ T$ es univalente. De donde $U \circ T$ es una transformación no singular de R^2. Probamos ahora una tras otra las restantes propiedades.

1. La ley asociativa es una propiedad general de la composición de funciones (véase también 4.3, pág. 180).

2. La transformación identidad es, ciertamente, una transformación no singular y $T \circ I = I \circ T = T$ para todas las transformaciones. La unicidad de la identidad es una propiedad general de los grupos: Supongamos que en un grupo $\mathcal{G}$ cualquiera hay un elemento e' tal que $e' \circ a = a$ para algún $a \in \mathcal{G}$. Entonces

$$e = a \circ a^* = (e' \circ a) \circ a^* = e' \circ (a \circ a^*) = e' \circ e = e'.$$

Así pues, una vez que demostremos que $\mathfrak{T}$ es un grupo, sabremos que I es la única identidad de $\mathfrak{T}$.

3. Hemos probado ya (lema 2.8, pág. 163) que la inversa T^* de una transformación no singular T es una transformación no singular. Así pues, para cada $T \in \mathfrak{T}$, T^* satisface 3. De nuevo la unicidad es una propiedad general de los grupos: Supongamos $a \circ a' = e$. Entonces

$$a^* = a^* \circ (a \circ a') = (a^* \circ a) \circ a' = e \circ a' = a'.$$

En un grupo el inverso de cada a es único.

El ejemplo 4.4, pág. 181, muestra que la ley conmutativa no se verifica. De donde $\mathfrak{T}$ resulta ser un grupo no conmutativo respecto a la composición. Y esto completa la prueba.

Hemos visto que 1) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ para números reales distintos de cero, 2) $-(a+b) = -b+(-a)$ para números reales, y 3) $-(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = -\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$ para vectores. Queremos demostrar que para transformaciones no singulares

6.3 $$(T \circ U)^* = U^* \circ T^*.$$

Estos resultados son casos particulares de la siguiente propiedad general de los grupos.

6.4 Teorema. *Si $\mathcal{G}$ es un grupo bajo una operación $\circ$, entonces*

$$(a \circ b)^* = b^* \circ a^*$$

para todo $a, b \in \mathcal{G}$.

PRUEBA. Se sigue, de la definición de grupo, que

$$\begin{aligned}(b^* \circ a^*) \circ (a \circ b) &= b^* \circ [a^* \circ (a \circ b)] \\ &= b^* \circ [(a^* \circ a) \circ b] \\ &= b^* \circ [e \circ b] = b^* \circ b = e.\end{aligned}$$

Por lo que, del problema 1 *c*, se sigue que $b^* \circ a^* = (a \circ b)^*$.

Concluimos esta sección demostrando que el conjunto de todas las rotaciones alrededor del origen es un grupo conmutativo. Este grupo conmutativo es un subgrupo importante del grupo $\mathfrak{T}$ de todas las transformaciones no singulares.

6.5 Teorema. *El conjunto $\mathfrak{R}$ de todas las rotaciones alrededor del origen es un grupo conmutativo respecto a la composición.*

PRUEBA. La transformación idéntica I es una rotación y está, por tanto, en $\mathfrak{R}$. Por el lema 3.9 (pág. 170) sabemos que $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{T}$ (toda rotación es no singular) y que $U \in \mathfrak{R}$ implica $U^* \in \mathfrak{R}$ (la inversa de una rotación es una rotación). Entonces, esto implica que las propiedades de grupo 1, 2, y 3 se satisfacen en $\mathfrak{R}$. Queda por demostrar que la composición de rotaciones es una rotación (es decir, que la composición es una operación binaria sobre $\mathfrak{R}$) y que las rotaciones conmutan. Sean

$$\begin{aligned}U_1(x, y) &= x(a_1, b_1) + y(a_1, b_1)^{\perp} \\ U_2(x, y) &= x(a_2, b_2) + y(a_2, b_2)^{\perp},\end{aligned}$$

donde $a_1^2 + b_1^2 = 1$ y $a_2^2 + b_2^2 = 1$, un par de rotaciones. Entonces

$$\begin{aligned}U_2(U_1(x, y)) &= U_2(a_1 x - b_1 y, b_1 x + a_1 y) \\ &= (a_1 x - b_1 y)(a_2, b_2) + (b_1 x + a_1 y)(-b_2, a_2) \\ &= x(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) \\ &\quad + y(-b_1 a_2 - a_1 b_2, -b_1 b_2 + a_1 a_2) \\ &= x\mathbf{u} + y\mathbf{u}^{\perp},\end{aligned}$$

donde $\mathbf{u} = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$. Como

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}|^2 &= a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 b_2 a_2 b_1 + a_2^2 b_1^2 \\ &= a_1^2(a_2^2 + b_2^2) + b_1^2(a_2^2 + b_2^2) \\ &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = 1,\end{aligned}$$

$U_2 \circ U_1$ es una rotación. El cálculo para $U_1 \circ U_2$ es el mismo con los subíndices 1 y 2 intercambiados. Vemos que esto da el mismo resultado que antes y, por tanto, $U_1 \circ U_2 = U_2 \circ U_1$. Esto completa la prueba.

Problemas

1. Pruébese que: *si $\mathcal{G}$ es un grupo respecto a $\circ$, entonces*

a) $(a^*)^* = a$ *para todo* $a \in \mathcal{G}$.

b) $a \circ x = c$ *si y sólo si* $x = a^* \circ c$.

c) $x \circ a = c$ *si y sólo si* $x = c \circ a^*$.

2. Demuéstrese que: *el conjunto de todas las traslaciones es un grupo conmutativo respecto a la composición.*

3. Es cierto que toda transformación rígida es no singular. Acéptese este resultado y demuéstrese que: *el conjunto de todas las transformaciones rígidas es un grupo no conmutativo respecto a la composición.* (A este grupo se le llama el *grupo euclidiano.*)

4. ¿El conjunto de todas las reflexiones respecto a una recta que pasa por el origen es un grupo respecto a la composición?

5. Demuéstrese que:

a) El conjunto de todos los enteros es un grupo respecto la adición.
b) El conjunto de todos los enteros pares es un grupo respecto la adición.
c) El conjunto de todos los números racionales es un grupo respecto la adición.
d) El conjunto de todos los números racionales distintos de cero es un grupo respecto a la multiplicación.

7. TRANSFORMACIONES ORTOGONALES

La experiencia geométrica nos induce a creer que las únicas transformaciones rígidas son las translaciones, las rotaciones, las reflexiones o alguna combinación de estas tres. Queremos ahora demostrar que esto es cierto, y comenzamos por estudiar las transformaciones rígidas que no mueven el origen. Estas se llaman transformaciones "ortogonales".

7.1 Definición. *Una transformación rígida T que deja el origen fijo —es decir, $T(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$— se llama* ***transformación ortogonal.***

Las rotaciones alrededor del origen y las reflexiones respecto a una recta que pasa por el origen, son transformaciones ortogonales. El siguiente teorema muestra que toda transformación rígida puede efectuarse aplicando primero una transformación ortogonal al plano y después una traslación.

7.2 Teorema. *Si T es una trasformación rígida, entonces $T = S \circ U$, donde S es una traslación y U es una transformación ortogonal, y esta descomposición de T es única.*

Prueba. (Figura 14.) Supongamos que existen una traslación S y una transformación ortogonal U tal que $T = S \circ U$. Esta hipótesis implica que $T(\mathbf{O}) = [S \circ U](\mathbf{O}) = S(\mathbf{O})$. S debe ser la traslación que mueve $\mathbf{O}$ hasta $T(\mathbf{O})$. Sea $\mathbf{P}_0 = T(\mathbf{O})$. Entonces $S(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}+\mathbf{P}_0$. $T = S \circ U$ implica también $U = S^* \circ S \circ U = S^* \circ T$. Así pues, si T puede descomponerse de esta forma, $U = S^* \circ T$ donde la traslación S está definida por

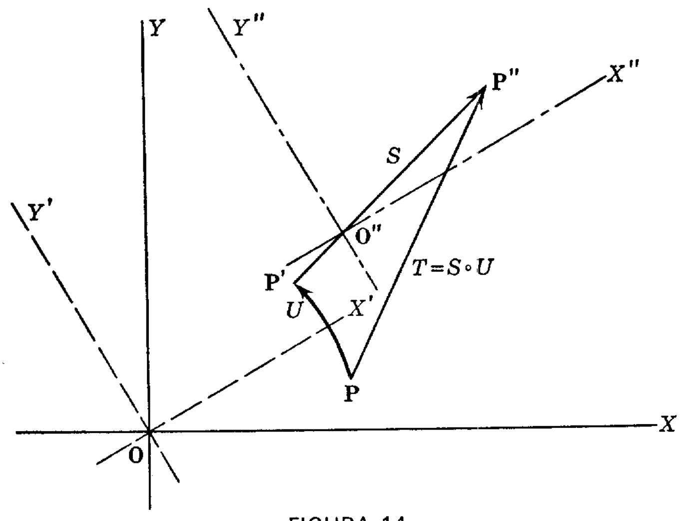


FIGURA 14

$S(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}+\mathbf{P}_0$ y $S^*(\mathbf{Q}') = \mathbf{Q}'-\mathbf{P}_0$. Queda entonces por demostrar que U es una transformación ortogonal. Esto se verifica fácilmente:

$$U(\mathbf{O}) = [S^* \circ T](\mathbf{O}) = S^*(\mathbf{P}_0) = \mathbf{O},$$

y U es rígida como composición de transformaciones rígidas. [Si T_1, T_2 son rígidas entonces $|T_1(T_2(\mathbf{P}))-T_1(T_2(\mathbf{Q}))| = |T_2(\mathbf{P})-T_2(\mathbf{Q})| = |\mathbf{P}-\mathbf{Q}|$.] Por tanto, U es ortogonal, y esto completa la prueba (en la figura 14, U es una rotación).

Este teorema simplifica el problema de caracterizar las transformaciones rígidas al problema de caracterizar las transformaciones ortogonales. Lo que sospechamos es que las transformaciones ortogonales son o bien rotaciones alrededor del origen o bien reflexiones respecto a una recta que pasa por el origen.

Una propiedad del plano euclidiano R^2 que no experimenta cambio por una transformación, se dice que es *invariante* (o que es un *invariante*) respecto la transformación o bajo la transformación. Por definición, la distancia entre un par de puntos es un invariante bajo las transformaciones rígidas. Para las transformaciones ortogonales el origen es fijo; luego, la distancia de un punto al origen es invariante bajo las transformaciones ortogonales. Sea U una transformación ortogonal. Para cualquier par ordenado (a_1, a_2) de números reales, está definido $U(a_1, a_2)$. Podemos pensar de $a = (a_1, a_2)$ y $U(a)$ como de vectores en V_2 y podemos pensar de U como en una transformación de V_2 o de R^2. La distancia de un punto al origen es invariante bajo las transformaciones ortogonales:

$$|U(\mathbf{P})| = |U(\mathbf{P})-U(\mathbf{O})| = |\mathbf{P}-\mathbf{O}| = |\mathbf{P}|.$$

Expresado en términos de vectores,

$$|U(\mathbf{a})| = |\mathbf{a}|\,;$$

la longitud de los vectores es invariante bajo las transformaciones ortogonales. Como una consecuencia directa de esta invariancia de longitud, tenemos

7.3 Teorema. *El producto escalar es invariante bajo las transformaciones ortogonales* [*es decir, si* U *es una transformación ortogonal, entonces* $U(\mathbf{a})\cdot U(\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$].

PRUEBA. Como

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$$

y

$$|U(\mathbf{a}) - U(\mathbf{b})|^2 = |U(\mathbf{a})|^2 - 2\,U(\mathbf{a})\cdot U(\mathbf{b}) + |U(\mathbf{b})|^2,$$

vemos que

$$\begin{aligned} 2\,U(\mathbf{a})\cdot U(\mathbf{b}) &= |U(\mathbf{a})|^2 + |U(\mathbf{b})|^2 - |U(\mathbf{a}) - U(\mathbf{b})|^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}. \end{aligned}$$

De donde $U(\mathbf{a})\cdot U(\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, y esto completa la prueba.

Una consecuencia inmediata de este teorema es que las transformaciones ortogonales preservan la ortogonalidad de los vectores.

7.4 Corolario. *La ortogonalidad de los vectores es invariante bajo las transformaciones ortogonales.*

PRUEBA. Como los vectores **a** y **b** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, se sigue inmediatamente del teorema 7.3 que si U es una transformación ortogonal y **a** y **b** son ortogonales, entonces $U(\mathbf{a})$ y $U(\mathbf{b})$ son ortogonales.

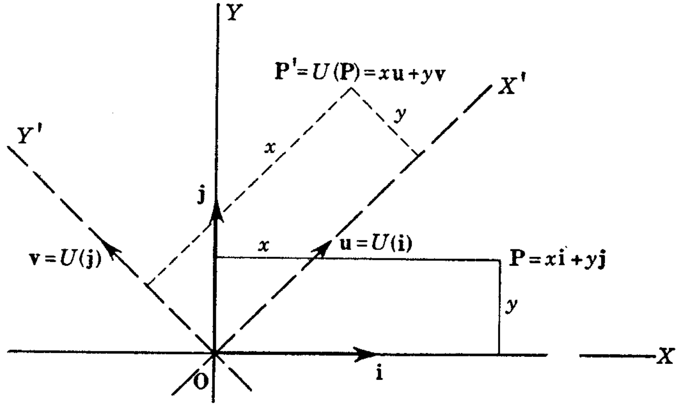


FIGURA 15

Es intuitivamente claro, si consideramos un plano rígido, que la posición del plano queda fija si fijamos tres puntos no colineales. Hablando en términos de transformaciones, esperamos que una transformación rígida T quede únicamente determinada por las imágenes (o transformadas) $T(\mathbf{P}_1)$, $T(\mathbf{P}_2)$, $T(\mathbf{P}_3)$ de tres puntos no colineales $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$. Ésta es la idea que está detrás de la prueba de que toda transformación ortogonal o es una rotación alrededor del origen o es una reflexión respecto a una recta que pasa por el origen. Si U es una transformación ortogonal, entonces U debe quedar únicamente determinada si conocemos $U(\mathbf{i})$ y $U(\mathbf{j})$ (figura 15).

7.5 Teorema. *Toda transformación ortogonal U es o una rotación alrededor del origen o una reflexión respecto a una recta que pasa por el origen.* [*Sea* $\mathbf{u} = U(\mathbf{i})$ *y* $\mathbf{v} = U(\mathbf{j})$. *Si* $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\perp}$, *entonces U es una rotación. Si* $\mathbf{v} = -\mathbf{u}^{\perp}$, *entonces U es una reflexión.*]

PRUEBA. (Figura 15.) Como $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son vectores unitarios ortogonales y como tanto la longitud como la ortogonalidad son invariantes bajo las transformaciones ortogonales, $\mathbf{u} = U(\mathbf{i})$ y $\mathbf{v} = U(\mathbf{j})$ son vectores unitarios ortogonales. De donde

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\perp} \quad \text{o} \quad \mathbf{v} = -\mathbf{u}^{\perp}.$$

Entonces, dado $\mathbf{Q} \in \mathrm{R}^2$, sabemos que

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' = U(\mathbf{P}) &= [U(\mathbf{P})\cdot\mathbf{u}]\mathbf{u} + [U(\mathbf{P})\cdot\mathbf{v}]\mathbf{v}\\ &= [U(\mathbf{P})\cdot U(\mathbf{i})]\mathbf{u} + [U(\mathbf{P})\cdot U(\mathbf{j})]\mathbf{v}\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{P} = (x, y)$ en R^2. Como el producto escalar es invariante bajo las transformaciones ortogonales,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}' = U(\mathbf{P}) &= [\mathbf{P}\cdot\mathbf{i}]\mathbf{u} + [\mathbf{P}\cdot\mathbf{j}]\mathbf{v}\\ &= x\mathbf{u} + y\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Si $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\perp}$, U es una rotación alrededor del origen (ecuación 3.4, pág. 165). Si $\mathbf{v} = -\mathbf{u}^{\perp}$, U es una reflexión respecto a una recta que pasa por el origen (ecuación 3.5, pág. 165). Esto completa la prueba.

Tenemos, como consecuencia directa de los teoremas 7.2 y 7.5,

7.6 Corolario. *Toda transformación rígida es o una traslación, o una rotación alrededor del origen, o una reflexión respecto a una recta que pasa por el origen, o la composición de una traslación y una rotación o la composición de una traslación y una reflexión.*

7.7 Corolario. *Toda transformación rígida es no singular.*

PRUEBA. Hemos demostrado que las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones son no singulares. Luego, según el corolario 7.6, toda transformación rígida es la composición de transformaciones no singulares y es, por tanto, no singular.

7.8 Teorema. *La inversa de una transformación rígida es una transformación rígida.*

PRUEBA. Sea T una transformación rígida. Entonces

$$|\mathbf{P}-\mathbf{Q}| = |T(T^*(\mathbf{P}))-T(T^*(\mathbf{Q}))| = |T^*(\mathbf{P})-T^*(\mathbf{Q})|.$$

7.9 Corolario. *La inversa de una transformación ortogonal es una transformación ortogonal.*

PRUEBA. Se sigue, del corolario 7.7, que si U es una transformación ortogonal, entonces U^* existe. De acuerdo con el teorema 7.8, U^* es una transformación rígida. Como $U(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ implica $U^*(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$, U^* es una transformación ortogonal.

Concluimos nuestro estudio de las transformaciones rígidas demostrando que el concepto de recta es un invariante respecto a las transformaciones rígidas. Si $\mathcal{E}$ es un subconjunto de R^2 y T es una transformación de R^2, $T(\mathcal{E})$ denota el conjunto de todos los puntos $T(\mathbf{P})$ donde $\mathbf{P}\in\mathcal{E}$; es decir,

$$T(\mathcal{E}) = \{T(\mathbf{P})|\mathbf{P}\in\mathcal{E}\}.$$

$T(\mathcal{E})$ se llama *transformado* de $\mathcal{E}$ por T. Decimos también que T *transforma* $\mathcal{E}$ *en* $T(\mathcal{E})$.

7.10 Teorema. *Si T es una traslación y $\mathcal{L}$ es una recta, entonces $T(\mathcal{L})$ es una recta paralela a $\mathcal{L}$.*

PRUEBA. Sea $\mathcal{L} = \{\mathbf{P}_0+t(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)\}$, y sea $T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+\mathbf{Q}_0$. Entonces

$$T(\mathbf{P}_0+t(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)) = \mathbf{P}_0+\mathbf{Q}_0+t(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0);$$

es decir, $T(\mathcal{L})\subset\mathcal{L}'$, donde $\mathcal{L}'$ es la recta que pasa por $T(\mathbf{P}_0) = \mathbf{P}_0+\mathbf{Q}_0$ paralela a $\mathcal{L}$. Como T^* es una traslación y $T^*(\mathbf{P}_0+\mathbf{Q}_0) = \mathbf{P}_0$, $T^*(\mathcal{L}')\subset\mathcal{L}$. Esto implica $T(T^*(\mathcal{L}')) = \mathcal{L}'\subset T(\mathcal{L})$. Por tanto, $T(\mathcal{L}) = \mathcal{L}'$.

7.11 Teorema. *Si U es una transformación ortogonal y $\mathcal{L}$ es una recta, entonces $U(\mathcal{L})$ es una recta.*

PRUEBA. Sea $\mathcal{L}$ la recta cuya ecuación es

$$\mathcal{L}: \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{P} = c,$$

y sea U una transformación ortogonal. Como U preserva el producto escalar, $\mathbf{P}\in\mathcal{L}$ implica

$$U(\mathbf{n})\cdot U(\mathbf{P}) = c.$$

Como $\mathbf{P}\in\mathcal{L}$ implica $\mathbf{P}' = U(\mathbf{P})\in\mathcal{L}'$, donde

$$\mathcal{L}': \quad U(\mathbf{n})\cdot\mathbf{P}' = c;$$

es decir, $U(\mathcal{L})\subset\mathcal{L}'$. Recíprocamente, si $\mathbf{P}'\in\mathcal{L}'$, entonces

$$U(\mathbf{n})\cdot\mathbf{P}' = \mathbf{n}\cdot U^*(\mathbf{P}') = c;$$

es decir, $U^*(\mathcal{L}')\subset\mathcal{L}$. Esto, a su vez, implica $\mathcal{L}'\subset U(\mathcal{L})$. De donde $\mathcal{L}' = U(\mathcal{L})$.

7.12 Corolario. *Las transformaciones rígidas transforman las rectas en rectas.*

PRUEBA. Ésta es una consecuencia inmediata de los teoremas 7.2, 7.10, y 7.11.

Problemas

1. Demuéstrese que: *el conjunto de todas las transformaciones ortogonales es un grupo respecto a la composición (grupo ortogonal).*

2. Demuéstrese que: *el conjunto de todas las transformaciones rígidas es un grupo respecto a la composición (grupo euclidiano).*

3. Una transformación $\mathcal{L}$ se dice que es *lineal* si para cualesquier $\mathbf{P}, \mathbf{Q}\in R^2$ y $a, b\in R$

$$L(a\mathbf{P}+b\mathbf{Q}) = aL(\mathbf{P})+bL(\mathbf{Q}).$$

Demuéstrese que: *toda transformación lineal es de la forma*

$$L(x, y) = x\mathbf{a}+y\mathbf{b}.$$

4. Demuéstrese que: *la transformación lineal*

$$L(x, y) = x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$$

es no singular si y sólo si $\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b} \neq 0$; *es decir, si y sólo si* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *son linealmente independientes.*

5. Demuéstrese que: *toda transformación lineal no singular transforma las rectas en rectas.*

6. Demuéstrese que: *toda transformación rígida T es de la forma*

$$T(x, y) = x\mathbf{u}+y\mathbf{v}+\mathbf{a}$$

donde $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 1$ *y* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

7. Determínense todas las transformaciones rígidas T con la propiedad de que

a) $T(\mathbf{O}) = (3, 5)$

b) $T(\mathbf{O}) = (3, 5)$, $T(\mathbf{i}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)+(3, 5)$

c) $T(\mathbf{O}) = (3, 5)$, $T(\mathbf{i}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)+(3, 5)$, y

$$T(\mathbf{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)+(3, 5)$$

d) $T(1, 1) = (2, -3)$, $T(\mathbf{i}) = (3, -3)$

e) $T(1, 1) = (2, -3)$, $T(\mathbf{i}) = (3, -3)$, $T(\mathbf{j}) = (2, -4)$

f) $T(1, 1) = (2, -3)$, $T(\mathbf{i}) = (3, -3)$, $T(\mathbf{j}) = \mathbf{O}$.

8. Demuéstrese que: *las transformaciones rígidas transforman las circunferencias en circunferencias.*

9. Demuéstrese que: *la pendiente es invariante bajo las traslaciones.*

10. Sea T una transformación no singular y sea $\mathcal{C} = \{\mathbf{P} \mid f(\mathbf{P}) = 0\}$ donde f es una función de R^2 en R. $f(\mathbf{P}) = 0$ se llama una *ecuación* de $\mathcal{C}$. Demuéstrese que: el transformado $\mathcal{C}' = T(\mathcal{C})$ tiene la ecuación

$$\mathcal{C}': \quad [f \circ T^*](\mathbf{P}') = f(T^*(\mathbf{P}')) = 0.$$

Sugerencia. $\mathbf{P}' \in \mathcal{C}'$ implica $\mathbf{P}' = T(\mathbf{P})$ para algún $\mathbf{P} \in \mathcal{C}$. $f(T^*(\mathbf{P})) = 0$ implica $\mathbf{P}' = T(\mathbf{P})$ para algún $\mathbf{P} \in \mathcal{C}$.

11. $\mathcal{C}$ es la gráfica de la ecuación y T es la transformación que abajo damos. Determínese, en cada caso, una ecuación de la transformada $\mathcal{C}' = T(\mathcal{C})$, y dibújese una gráfica de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$.

a) $\mathcal{C}$: $(y-2) = m(x-5)$
T: $\mathbf{P}' = T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}-(5, 2)$

b) $\mathcal{C}$: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$
T: $\begin{aligned} x' &= x-x_0 \\ y' &= y-y_0 \end{aligned}$

c) $\mathcal{C}$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$

T: $(x', y') = T(x, y) = \left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}\right)$

d) $\mathcal{C}$: $x^2 - y^2 = 2$

T: $T(x, y) = \frac{x}{\sqrt{2}}(1, 1) + \frac{y}{\sqrt{2}}(-1, 1)$

e) $\mathcal{C}$: $xy = 1$

T: $T(x, y) = \frac{x}{\sqrt{2}}(1, 1) + \frac{y}{\sqrt{2}}(-1, 1)$

f) $\mathcal{C}$: $y^2 = 4x$

T: T es la reflexión respecto al eje X

g) $\mathcal{C}$: $y^2 = 4x$

T: T es la reflexión respecto al eje Y

h) $\mathcal{C}$: $y^2 = 4x$

T: T es la reflexión respecto a la recta $\{(x, x)\}$

i) $\mathcal{C}$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

T: $T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}^{\perp}$

j) $\mathcal{C}$: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

T: T es la rotación con $T(\mathbf{i}) = \frac{1}{5}(3, 4)$

k) $\mathcal{C}$: $6x^2 + 4xy + 6y^2 - 16\sqrt{2}y + 4 = 0$

T: $T^*(x', y') = \frac{x'-2}{\sqrt{2}}(1, -1) + \frac{y'+1}{\sqrt{2}}(1, 1)$

l) $\mathcal{C}$: $ax + by = c$; $T(x, y) = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x - 2y, 2x + y)$.

12. Demuéstrese que:

a) Si $\mathbf{v} = \mathbf{P}_0 - \mathbf{Q}_0$, entonces $\mathbf{v} = T(\mathbf{P}_0) - T(\mathbf{Q}_0)$ para todas las traslaciones T. ¿Cuál es la significación geométrica de este resultado?

b) Si T es una transformación rígida y $\mathbf{v}$ es un vector entonces

$$T(\mathbf{P}_0 + \mathbf{v}) - T(\mathbf{P}_0) = T(\mathbf{P}_1 + \mathbf{v}) - T(\mathbf{P}_1)$$

para todo $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ en $\mathbf{R}^2$. ¿Cuál es la significación geométrica de este resultado?

Sugerencia. Establézcase la propiedad para transformaciones ortogonales y úsese luego la parte (*a*) y el hecho de que toda transformación rígida puede expresarse como la composición de una traslación y una transformación ortogonal.

13. Demuéstrese que: *las transformaciones rígidas transforman segmentos rectilíneos abiertos (cerrados) en segmentos rectilíneos abiertos (cerrados)*.

14. Demuéstrese que:

a) *Si U es una rotación alrededor del origen,*

$$[U(\mathbf{a})]^{\perp} \cdot U(\mathbf{b}) = \mathbf{a}^{\perp} \cdot \mathbf{b}.$$

b) *Si V es una reflexión respecto a una recta que pasa por el origen,*

$$[V(\mathbf{a})]^{\perp} \cdot V(\mathbf{b}) = -\mathbf{a}^{\perp} \cdot \mathbf{b}.$$

15. Demuéstrese que: *las transformaciones rígidas transforman rectas paralelas en rectas paralelas.*

16. Demuéstrese que: *las transformaciones rígidas transforman puntos no colineales en puntos no colineales.*

8. APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

El propósito de esta sección es el de seguir ilustrando la potencia y simplicidad de los métodos analíticos aplicados a la geometría. Podemos ya, a estas alturas de nuestro estudio, señalar lo siguiente. En la anterior sección hemos identificado algunas de las propiedades del plano euclidiano R^2 que son invariantes bajo las transformaciones rígidas. Se les llama *propiedades euclidianas* de R^2, y es el conjunto de estas propiedades lo que constituye el objeto de estudio de la geometría euclidiana. Piense el lector, por un momento, en su geometría de secundaria y recuerde algunos de sus teoremas. Advierta que todos ellos versaban sobre propiedades y conceptos invariantes bajo las transformaciones rígidas. En esta sección ilustramos las pruebas analíticas de algunos de estos teoremas.

Un triángulo es una figura consistente en tres puntos no colineales **A**, **B**, **C** llamados *vértices*, y tres segmentos rectilíneos $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$, $\langle \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle$, y $\langle \mathbf{C}, \mathbf{A} \rangle$ llamados *lados*. Denotamos al triángulo por **ABC** (figura 16). El lado que no tiene uno de los vértices como extremo se llama lado *opuesto* al vértice. Por ejemplo, el lado $\langle \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle$ que une **B** y **C** es el lado opuesto a **A**. El lado que tiene un determinado vértice como uno de sus extremos se dice que es *adyacente* al vértice. Las transformaciones rígidas transforman puntos no colineales en puntos no colineales y segmentos rectilíneos en segmentos rectilíneos. Todos los conceptos que aquí se introducen son, por tanto, invariantes bajo las transformaciones rígidas. Dos triángulos se dice que son *congruentes* si uno puede transformarse en el otro mediante una transformación rígida. Es evidente que si los triángulos son congruentes entonces, bajo alguna correspondencia existente entre los

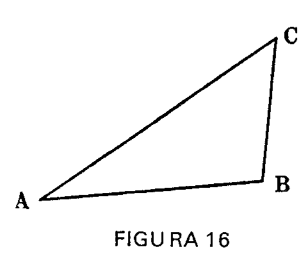


FIGURA 16

lados, las longitudes de los lados correspondientes son iguales. Recordemos que lo contrario es uno de los teoremas de Euclides, del que ahora daremos una prueba analítica.

8.1 Ejemplo. Demuéstrese que: *si las longitudes de los lados de un triángulo son iguales, respectivamente, a las longitudes de los lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.*

SOLUCIÓN. Denotemos los triángulos por **ABC** y **A′B′C′**. Nuestra hipótesis es que $|\mathbf{B}-\mathbf{A}| = |\mathbf{B}'-\mathbf{A}'|$, $|\mathbf{C}-\mathbf{B}| = |\mathbf{C}'-\mathbf{B}'|$, y $|\mathbf{A}-\mathbf{C}| = |\mathbf{A}'-\mathbf{C}'|$. Podemos suponer que $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ y que **B** está sobre la parte positiva del eje X, ya que esto puede lograrse por una transformación rígida que no afecta las longitudes de los lados. Luego, por una transformación rígida, podemos llevar **A′** en **O** y **B′** sobre la parte positiva del eje X. Esto coloca **B′** en **B**. Supongamos que **C′** se transforma en **D**. Sea $\mathbf{C} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{D} = (x_2, y_2)$ y $\mathbf{B} = (x_3, 0)$. Como $|\mathbf{C}| = |\mathbf{D}|$ y $|\mathbf{C}-\mathbf{B}| = |\mathbf{D}-\mathbf{B}|$, $x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2$ y $(x_1-x_3)^2+y_1^2 = (x_2-x_3)^2+y_2^2$. Estas ecuaciones implican

$$\begin{aligned} -2x_3x_1 &= -2x_3x_2 \\ y_1^2 &= y_2^2. \end{aligned}$$

De donde vemos que

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = -y_2. \end{cases}$$

Así pues, o $\mathbf{C} = \mathbf{D}$ o **D** puede llevarse al punto **C** por una reflexión alrededor del eje X. Los triángulos son, por tanto, congruentes.

Sean **A**, **B**, **C**, **D** cuatro puntos no colineales. A la figura consistente en los cuatro puntos **A**, **B**, **C**, **D** —llamados *vértices*— y los segmentos rectilíneos abiertos ⟨**A**, **B**⟩, ⟨**B**, **C**⟩, ⟨**C**, **D**⟩, ⟨**D**, **A**⟩ —llamados *lados*— se le llama *cuadrilátero* y se le denota por **ABCD**. De acuerdo con esta definición, todas las figuras que se muestran en la figura 17 son cuadriláteros. Los vértices unidos por un lado se llaman *vértices adyacentes*. Por ejemplo, **B** y **D** son adyacentes a **A**. **A** y **C** no son adyacentes y vértices tales se dice que

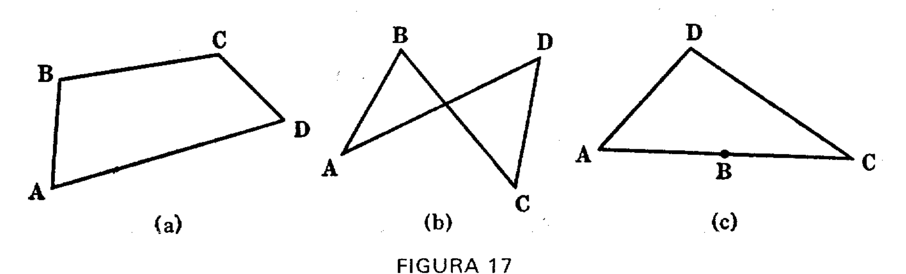


FIGURA 17

son *opuestos.* Los lados que no tienen un punto extremo en común se llaman *lados opuestos.* $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ es opuesto a $\langle \mathbf{C}, \mathbf{D} \rangle$ y $\langle \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle$ es opuesto a $\langle \mathbf{A}, \mathbf{D} \rangle$. Si los lados opuestos son paralelos, **ABCD** se llama *paralelogramo.* Los segmentos rectilíneos $\langle \mathbf{A}, \mathbf{C} \rangle$ y $\langle \mathbf{B}, \mathbf{D} \rangle$, que unen vértices opuestos se llaman *diagonales* del paralelogramo **ABCD** (figura 18).

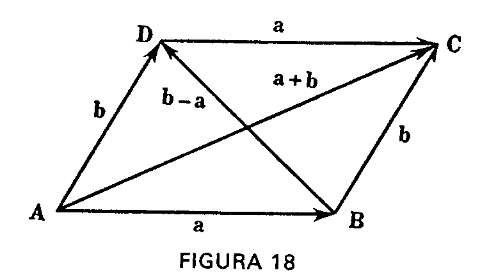


FIGURA 18

8.2 Ejemplo. Demuéstrese que: *si* **ABCD** *es un paralelogramo, entonces* $\mathbf{D}-\mathbf{A} = \mathbf{C}-\mathbf{B}$ *y* $\mathbf{B}-\mathbf{A} = \mathbf{C}-\mathbf{D}$.

SOLUCIÓN. Como los cuatro puntos no son colineales, $\mathbf{a} = \mathbf{B}-\mathbf{A}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{D}-\mathbf{A}$ no son paralelos (son vectores linealmente independientes). Como los lados opuestos son paralelos,

$$\mathbf{C}-\mathbf{B} = s\mathbf{b} \quad \text{y} \quad \mathbf{C}-\mathbf{D} = t\mathbf{a}.$$

Esto implica, como $\mathbf{B}-\mathbf{D} = \mathbf{a}-\mathbf{b}$, que $\mathbf{B}-\mathbf{D} = \mathbf{a}-\mathbf{b} = t\mathbf{a}-s\mathbf{b}$; es decir, $(t-1)\mathbf{a}+(1-s)\mathbf{b} = 0$. Recordando que **a** y **b** son linealmente independientes, concluimos que $t = 1$ y $s = 1$; es decir,

$$\mathbf{C}-\mathbf{B} = \mathbf{b} = \mathbf{D}-\mathbf{A} \quad \text{y} \quad \mathbf{C}-\mathbf{D} = \mathbf{a} = \mathbf{B}-\mathbf{A}.$$

Esto completa la prueba.

Probaremos ahora lo que se ilustra en la figura 18. $\mathbf{D}-\mathbf{A} = \mathbf{C}-\mathbf{B} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{B}-\mathbf{A} = \mathbf{C}-\mathbf{D} = \mathbf{a}$. Se sigue de ello que $\mathbf{C} = \mathbf{B}+\mathbf{b} = \mathbf{A}+\mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{D} = \mathbf{A}+\mathbf{b} = \mathbf{B}-\mathbf{a}+\mathbf{b}$. De donde $\mathbf{C}-\mathbf{A} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{D}-\mathbf{B} = \mathbf{b}-\mathbf{a}$. Esto está de acuerdo con nuestra imagen geométrica de la adición y sustracción de vectores.

El anterior ejemplo prueba, desde luego, que los lados opuestos de un paralelogramo son de igual longitud. Usamos ahora este ejemplo para derivar otra propiedad elemental de los paralelogramos.

8.3 Ejemplo. Demuéstrese que: *las diagonales de un paralelogramo se bisectan mutuamente.*

SOLUCIÓN. (Figura 19.) Mediante una traslación, que ciertamente deja nuestro problema invariante, podemos llevar **A** hasta el origen. (Esto no

cambia la prueba en forma esencial, pero simplifica su escritura.) Entonces, $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, $\mathbf{B} = \mathbf{a}$, $\mathbf{D} = \mathbf{b}$, y $\mathbf{C} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$. Como $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ no son paralelos [si $\mathbf{a}+\mathbf{b} = t(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, entonces $(1-t)\mathbf{a} = -(1+t)\mathbf{b}$; pero esto no puede ser ya que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ no son paralelos], las rectas que contienen las diagonales se intersectan. Llamemos $\mathbf{Q}$ al punto de intersección. Entonces

$$\mathbf{Q} = s(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

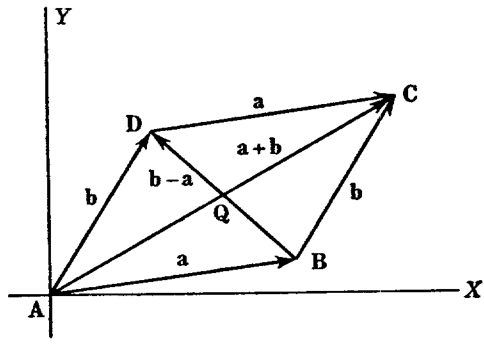


FIGURA 19

y

$$(s+t-1)\mathbf{a}+(s-t)\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Como $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son linealmente independientes (no paralelos)

$$s+t-1 = 0$$
$$s-t = 0.$$

Por lo tanto $s = t = \frac{1}{2}$. Así pues $\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ es el punto medio de las diagonales.

8.4 Ejemplo. Muéstrese que: *las rectas que contienen las alturas de un triángulo se intersectan en un punto.*

SOLUCIÓN. Mediante una transformación rígida podemos colocar el triángulo como se muestra en la figura 20. Sean $\mathbf{A} = (a, 0)$, $\mathbf{B} = (b, 0)$, y $\mathbf{C} = (0, c)$. Sea $\mathcal{L}_1$ la recta que pasa por $\mathbf{A}$ ortogonal al lado opuesto a $\mathbf{A}$, y $\mathcal{L}_2$ la recta que pasa por $\mathbf{B}$ y es ortogonal al lado opuesto a $\mathbf{B}$. (La *altura* desde el vértice $\mathbf{A}$ es el segmento rectilíneo desde $\mathbf{A}$ hasta el punto $\mathbf{Q}_1$ de intersección de $\mathcal{L}_1$ con la recta que pasa por $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$.) Las ecuaciones para estas rectas son

$$\mathcal{L}_1: \quad -bx+cy = -ba$$
$$\mathcal{L}_2: \quad -ax+cy = -ba.$$

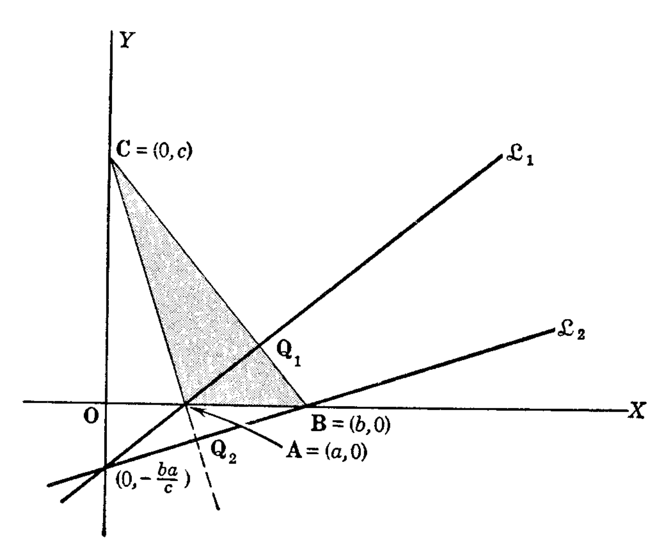


FIGURA 20

Como $c(a-b) \neq 0$ (porque los vértices no son colineales), estas rectas tienen el único punto de intersección $\left(0, -\dfrac{ba}{c}\right)$. Este punto está sobre el eje Y y es, por tanto, el punto de intersección de las rectas que contienen las alturas.

Problemas

$\ast$1. Sin usar el ejemplo 1 demostrar que: triángulos congruentes a un mismo triángulo son congruentes entre sí.

2. Supongamos que **a** y **b** son vectores no paralelos. Entonces el triángulo $\mathbf{P}_0(\mathbf{P}_0+\mathbf{a})\,(\mathbf{P}_0+\mathbf{b})$ se dice que es un triángulo con lados determinados por **a** y **b**.

Demuéstrese que:

a) Cualesquiera dos tales triángulos (es decir, para diferentes elecciones de $\mathbf{P}_0$) son congruentes.

b) Si $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}'|$, $|\mathbf{b}| = |\mathbf{b}'|$, y $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}'$, entonces los triángulos determinados, respectivamente, por **a**, **b** y **a**′, **b**′ son congruentes.

3. Sea **ABC** un triángulo. Sea **c** un vector unitario en la dirección de $\mathbf{B}-\mathbf{A}$, y sea **b** un vector unitario en la dirección de $\mathbf{C}-\mathbf{A}$. Defínase $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}+\mathbf{c}$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}+\mathbf{b}$, y $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}_1+\mathbf{C}_1) = \mathbf{A}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$. Demuéstrese que: los triángulos $\mathbf{AB}_1\mathbf{D}$ y $\mathbf{AC}_1\mathbf{D}$ son congruentes. [La recta $\mathcal{L}$ que pasa por **A** y **D** se llama *bisectriz del ángulo* (interno) del triángulo con vértice **A**.]

4. Demuéstrese que: *las bisectrices de los ángulos de un triángulo se intersectan en un punto.*

5. Demuéstrese que: *las medianas de un triángulo se intersectan en un punto.* Descríbase el punto de intersección analítica y geométricamente.

6. Demuéstrese que: *la bisectriz del ángulo recto en un triángulo rectángulo que pasa por el centro del cuadrado sobre la hipotenusa.*

7. Demuéstrese que: *los segmentos rectilíneos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se bisectan mutuamente.*

8. Demuéstrese que: *toda recta que pasa por un punto en el interior de una circunferencia intersecta a ésta en dos puntos exactamente.*

9. Demuéstrese que: *si* **A** *y* **B** *son puntos sobre una circunferencia, entonces el segmento rectilíneo abierto que une* **A** *y* **B** *está en el interior del círculo.*

10. Demuéstrese que: *si* [**A**, **B**] *es un diámetro de una circunferencia y* **C** *es un punto de la circunferencia, entonces* $\mathbf{A}-\mathbf{C}$ *es ortogonal a* $\mathbf{B}-\mathbf{C}$.

9. SISTEMAS DE COORDENADAS (CARTESIANAS) RECTANGULARES

El concepto de sistema de coordenadas rectangulares se discutió en la sección 2 del capítulo 2 y en la sección 5 de este capítulo. Se sugiere que se vuelvan a leer estas secciones.

En cuanto comenzamos a hablar de sistemas de coordenadas, surge la posibilidad de interpretar una transformación no singular del plano euclidiano R^2 como un cambio de coordenadas. Hasta el momento hemos considerado usualmente una transformación del plano como un mapeo del plano sobre sí mismo. En esta sección definimos primero el concepto de sistema de coordenadas y discutimos después las dos interpretaciones de transformaciones no singulares de R^2.

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de elementos P, Q, ... Llamaremos a $\mathcal{S}$ "espacio" y a los elementos de $\mathcal{S}$ "puntos". Una correspondencia uno-uno C de $\mathcal{S}$ sobre el plano euclidiano R^2 se llama *sistema de coordenadas sobre* $\mathcal{S}$; es decir, C es una función univalente con dominio $\mathcal{S}$ y rango R^2. Así pues, $C(P) = \mathbf{P} = (x, y)$. El punto $\mathbf{P} = (x, y)$ de R^2 se llama *coordenado* de P; los números x y y se llaman *coordenadas* del punto P respecto a los ejes X y Y, respectivamente [o la *abscisa* (x) y la *ordenada* (y) del punto P]. A cada punto P de $\mathcal{S}$ se le asigna un único coordenado $\mathbf{P}$ por C, y cada punto $\mathbf{P}$ de R^2 es el coordenado de un punto y solamente un punto P de $\mathcal{S}$.

Podemos pensar en $\mathcal{S}$, por ejemplo, como si fuera una hoja de papel de

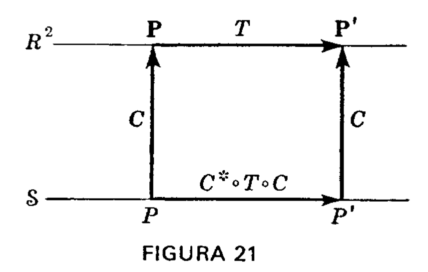


FIGURA 21

extensión infinita. Visualizamos a R^2 como si fuera un rejilla de rectas verticales y horizontales. El sistema de coordenadas C coloca R^2 encima de S. Las diferentes posiciones de R^2 sobre S y los diferentes tipos de rejillas dan lugar a los diferentes sistemas de coordenadas sobre S. La introducción del espacio subyacente S hace posible dos interpretaciones de una transformación no singular T de R^2: 1) una transformación de puntos de S, y 2) una transformación de coordenadas (un cambio de coordenadas).

Sea T una transformación de R^2 (no necesariamente no singular) y sea C un sistema de coordenadas. En la primera interpretación nuestro punto de vista es que la transformación T describe una transformación de S sobre sí mismo; cada punto P de S se mueve (transforma) hasta el punto P' de S cuyo coordenado es $\mathbf{P}' = T(\mathbf{P})$; es decir,

$$P' = C^*(\mathbf{P}') = C^*(T(\mathbf{P})) = C^*(T(C(P))),$$

y $C^* \circ T \circ C$ es la transformación de S definida por T. El caso general está ilustrado por el diagrama en la figura 21. La figura 22 ilustra el caso especial cuando T es una traslación ($T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+(a, b)$). Las rectas X, Y de S se mueven sobre las rectas X', Y'. Las rectas X', Y' *no* son los nuevos ejes de coordenadas.

La segunda interpretación de una transformación es la de un cambio de coordenadas. Esta interpretación queda restringida a transformaciones no

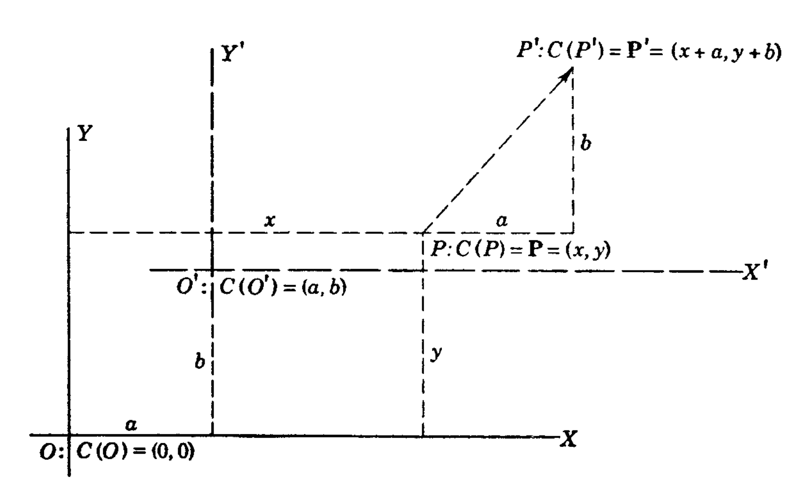


FIGURA 22

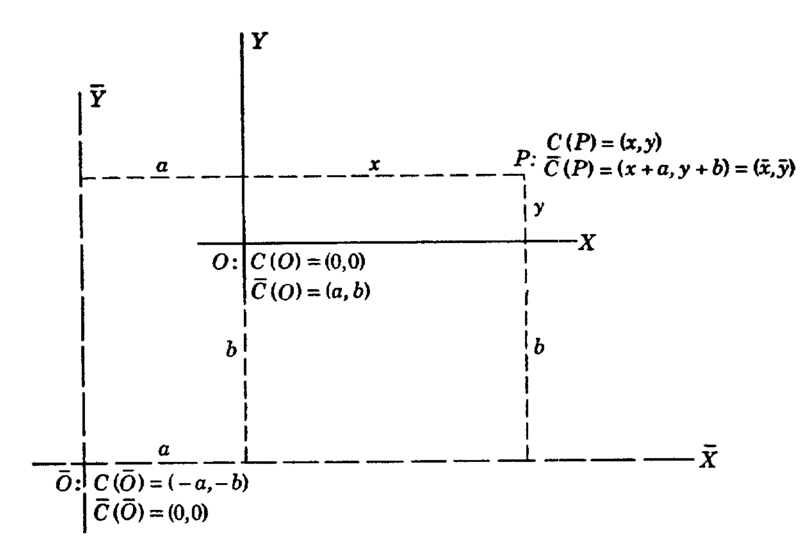


FIGURA 23

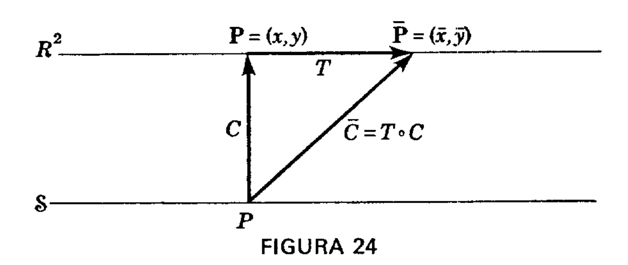


FIGURA 24

singulares de R^2. En la figura 23, T es de nuevo la traslación

$$T(\mathbf{P}) = \mathbf{P} + (a, b).$$

El diagrama de la figura 24 ilustra el caso general. $\bar{\mathbf{P}} = T(\mathbf{P}) = T(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})$. El punto $\bar{\mathbf{P}} = (\bar{x}, \bar{y})$ es el nuevo coordenado asignado a P y $\bar{C}$ es el nuevo sistema de coordenadas. $\bar{C}(P) = T(C(P)) = T(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{P}}$; es decir, $\bar{C} = T \circ C$. Para el ejemplo particular $T(\mathbf{P}) = \mathbf{P} + (a, b)$ (figura 23), tenemos $C(O) = \mathbf{O} = (0, 0)$, el coordenado original del punto O de S. El nuevo coordenado del mismo punto O de S es $\bar{C}(O) = T(C(O)) = T(\mathbf{O}) = (a, b)$. Si $\mathbf{P} = (x, y) = C(P)$, entonces

$$\bar{\mathbf{P}} = (\bar{x}, \bar{y}) = \bar{C}(P) = T(C(P)) = T(\mathbf{P}) = (x+a, y+b);$$

$\bar{x} = x + a$ es la distancia dirigida de P desde el eje $\bar{Y}$ (figura 23). La recta $\bar{X}$ es el conjunto de todos los puntos P cuyas coordenadas respecto al sistema de coordenadas $\bar{C}$ son de la forma $(\bar{x}, 0)$. Al representar el cambio de las coordenadas C a las $\bar{C}$ (como, por ejemplo, en la figura 23) queremos

localizar los nuevos ejes de coordenadas respecto a los viejos. La relación entre las coordenadas C y $\bar{C}$ es $T(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{P}}$. Así pues, $\mathbf{P} = T^*(\bar{\mathbf{P}})$; es decir, $T^*(\bar{\mathbf{P}})$ es el C coordenado del punto cuyo $\bar{C}$ coordenado es $\bar{\mathbf{P}}$. Así pues, los ejes $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ quedan localizados al aplicar la transformación inversa T^* a los ejes X y Y.

Recíprocamente, sean C y $\bar{C}$ un par de sistemas de coordenadas de $\mathcal{S}$. La transformación T de coordenadas de C a $\bar{C}$ es, entonces, $T = \bar{C} \circ C^*$ (figura 25). $\bar{\mathbf{P}} = T(\mathbf{P}) = \bar{C}(C^*(\mathbf{P}))$. Si $\mathbf{P}$ es el coordenado de P respecto al sistema de coordenadas C y $\bar{\mathbf{P}}$ es el coordenado de P respecto al sistema de coordenadas $\bar{C}$, entonces la transformación T de coordenadas de C a $\bar{C}$ es $T(\mathbf{P}) = \bar{\mathbf{P}}$.

Hay, por tanto, la siguiente equivalencia entre las transformaciones no singulares de R^2 y los sistemas de coordenadas: *Si $\mathcal{S}$ es un espacio* (cualquier conjunto abstracto de elementos) *y C es un sistema de coordenadas de $\mathcal{S}$, entonces, toda transformación no singular de* R^2 *define un nuevo sistema de coordenadas $\bar{C} = T \circ C$. Si* $\mathbf{P}$ *es el coordenado de un punto respecto a C y* $\bar{\mathbf{P}}$ *es el coordenado del mismo punto respecto a $\bar{C}$, entonces* $\bar{\mathbf{P}} = T(\mathbf{P})$. *Recíprocamente, si C y $\bar{C}$ son dos sistemas de coordenadas de $\mathcal{S}$, entonces el cambio de coordenadas de C a $\bar{C}$ se describe por la transformación no singular $T = \bar{C} \circ C^*$ de* R^2.

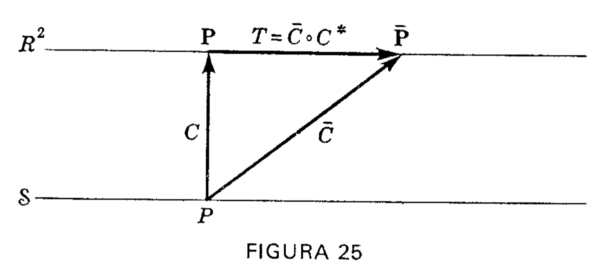


FIGURA 25

La idea de una transformación T de coordenadas sobre un espacio $\mathcal{S}$ es una idea relativa. Comenzábamos con la hipótesis de que había un sistema de coordenadas C sobre $\mathcal{S}$, y el cambio de coordenadas era respecto a este sistema de coordenadas inicial. Este sistema de coordenadas inicial asigna una geometría al espacio $\mathcal{S}$. Para cada P y Q en $\mathcal{S}$, definimos la distancia $d(P, Q)$ desde P a Q por $d(P, Q) = |C(P) - C(Q)|$, que es la distancia entre los puntos coordenados correspondientes en R^2. Una recta $\mathcal{L}_0$ en $\mathcal{S}$ es la transformada $C^*(\mathcal{L})$ de una recta en R^2, y así sucesivamente. Todos los conceptos de R^2 que son definidos en términos de puntos y distancia pueden en esta forma asignarse a $\mathcal{S}$. Cuando esto se hace llamamos a $\mathcal{S}$ un *plano euclidiano* y llamamos a C un *sistema de coordenadas rectangulares* (o *cartesianas*) *sobre* $\mathcal{S}$. Cualquier otro sistema de coordenadas que pueda obtenerse de éste por una transformación rígida de coordenadas se llama también *sistema de coordenadas rectangulares*. Por ejemplo, en la figura 26

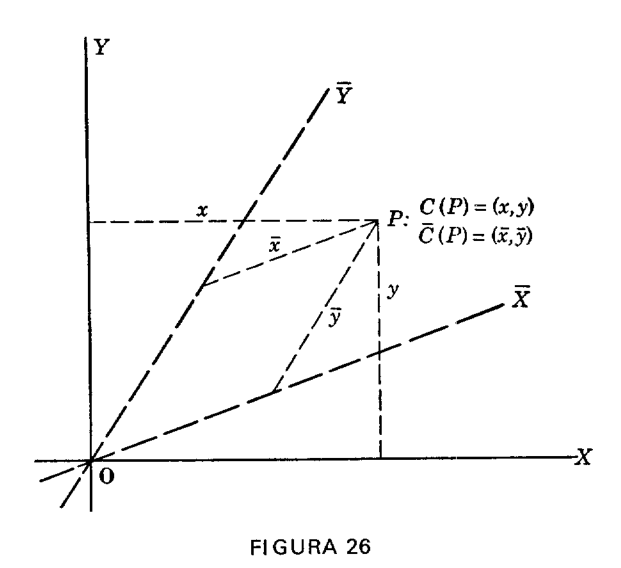


FIGURA 26

las rectas X, Y son los ejes de coordenadas originales, luego el sistema de coordenadas $\bar{C}$ con $\bar{X}$, $\bar{Y}$ como ejes de coordenadas tal como aparecen en la figura, no es un sistema de coordenadas rectangulares.

Comenzamos con un sistema inicial de coordenadas C sobre $\mathcal{S}$, usamos este sistema de coordenadas para definir conceptos geométricos sobre $\mathcal{S}$, y por transformaciones rígidas de coordenadas generamos un conjunto Γ de sistemas de coordenadas rectangulares. Algunos de los conceptos definidos para $\mathcal{S}$ dependerá sobre cuál sistema de coordenadas rectangulares entre los de Γ fue el sistema inicial. Un ejemplo sería el de la asignación de pendientes a las rectas. Los *invariantes euclidianos* de $\mathcal{S}$ son aquellos conceptos de $\mathcal{S}$ que no dependen de cuál de los sistemas de coordenadas de Γ fue el sistema de coordenadas iniciales. Vemos, por tanto, que los invariantes euclidianos corresponden a los conceptos sobre R^2 que son invariantes bajo las transformaciones rígidas. Distancia entre puntos; que un conjunto de puntos sea una recta, un segmento rectilíneo, una circunferencia, un triángulo, etc.; la ortogonalidad y el paralelismo de rectas; etc.; son todos ejemplos de invariantes euclidianos. La geometría euclidiana es el estudio de los invariantes euclidianos. Otros tipos de geometrías se obtienen reemplazando el grupo de transformaciones rígidas por otros grupos de transformaciones. Esto nos proporciona un conjunto diferente de sistemas de coordenadas admisibles, y la nueva geometría es el estudio de los invariantes respecto al nuevo conjunto de sistemas admisibles.

Problemas

1. Para cada una de las transformaciones T abajo definidas propor-

ciónese 1) un dibujo que ilustre la interpretación de T como un cambio de coordenadas y 2) un dibujo que ilustre la interpretación de T como una transformación de puntos.

a) $T(x, y) = (x-2, y-5)$

b) $T(x, y) = (x+2, y+5)$

c) $T(x, y) = (x-2, -y)$

d) $T(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y, -x+y)$

e) $T(x, y) = (x+y, y)$.

2. La transformación

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{x}{3}(1, -1) + \frac{y}{3}(-1, 2)$$

define un cambio de coordenadas. Dibújense las rectas correspondientes a $\bar{x} = -2, -1, 0, 1, 2$ y las rectas correspondientes a $\bar{y} = -2, -1, 0, 1, 2$.

3. Sea $\mathcal{L}$ la recta cuya ecuación es $3x+4y = 2$, y sea T la rotación $T(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y)$.

a) Determínese $T(\mathcal{L})$.

b) Si T se interpreta como el cambio de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}) = T(x, y)$, proporciónese una representación analítica de $\mathcal{L}$ respecto al nuevo sistema de coordenadas.

c) Háganse dibujos que ilustren (*a*) y (*b*).

4. $\mathcal{L}$ es la recta que pasa por los puntos $(1, -1)$ y $(2, 3)$

$T(x,y) = \frac{1}{2}x(\sqrt{3},1) + \frac{1}{2}y(-1,\sqrt{3}) + (1,3)$.

a) Determínese $T(\mathcal{L})$.

b) $(\bar{x}, \bar{y}) = T(x, y)$ define un cambio de coordenadas. Hágase una representación analítica de $\mathcal{L}$ respecto al nuevo sistema de coordenadas.

c) Háganse dibujos que ilustren (*a*) y (*b*).

5. Sea C la circunferencia $C = \{(x, y) | (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2\}$.

a) Determínese la traslación $T(x, y) = (x', y')$ con la propiedad de que $T(C) = \{(x', y') | x'^2+y'^2 = r^2\}$.

b) Determínese la traslación $(\bar{x}, \bar{y}) = T(x, y)$ de coordenadas con la propiedad de que respecto al nuevo sistema de coordenadas

$$\mathcal{C} = \{(\bar{x}, \bar{y}) | \bar{x}^2+\bar{y}^2 = r^2\}.$$

c) Hagánse dibujos que ilustren (*a*) y (*b*).

6. Sea $\mathcal{C} = \{(x, y) | y^2 = 4px\}$ y sea T la traslación

$$T(x, y) = (x+h, y+k).$$

Demuéstrese que

$$T(\mathcal{C}) = \{(x', y') | (y'-k)^2 = 4p(x'-h)\}.$$

7. Determínese $V(\mathcal{C})$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto del problema 6, y V es la reflexión respecto de la recta $y = x$.

8. Sea $\mathcal{C} = \left\{\mathbf{P} | \mathbf{P} = \left(\frac{t^2}{4p}, t\right), t \in \mathrm{R}\right\}$. Sea U la rotación $U(x, y) = x\mathbf{u} + y\mathbf{u}^{\perp}$. Demuéstrese que

$$T(\mathcal{C}) = \left\{\mathbf{P}' | \mathbf{P}' = \frac{t^2}{4p}\mathbf{u} + t\mathbf{u}^{\perp}, t \in \mathrm{R}\right\}.$$

9. Sea C un sistema de coordenadas rectangulares de un plano euclidiano $\mathcal{S}$. Correspondiente a cada P, Q en $\mathcal{S}$, el par ordenado de puntos $\overrightarrow{PQ}$ se llama *vector*. La *igualdad* de vectores en $\mathcal{S}$ se define por

$$\overrightarrow{P_1 Q_1} = \overrightarrow{P_2 Q_2} \text{ si y sólo si } C(Q_1) - C(P_1) = C(Q_2) - C(P_2).$$

Con esta definición de igualdad el vector $\overrightarrow{PQ}$ se llama *vector libre*. Muéstrese que: *el concepto de vector libre es un invariante euclidiano.*

Sugerencia: Véase el problema 12, pág. 197

***10.** Defínase un álgebra para los vectores en $\mathcal{S}$ (es decir, defínase la adición, la multiplicación por números reales y el producto escalar) y establézcase que los conceptos algebraicos definidos son invariantes euclidianos.

10. RESUMEN

En este capítulo estudiamos un caso especial de funciones: las transformaciones de R^2. Nuestro interés especial estaba centrado en las transformaciones rígidas de R^2. Primero dimos representaciones analíticas de los tres tipos básicos de transformaciones rígidas —traslaciones, rotaciones alrededor del origen y reflexiones alrededor de una recta que pasase por el origen— y procedimos luego a demostrar que toda transformación rígida es o una traslación o una rotación o una reflexión o una composición de una traslación y una rotación o una composición de una traslación y una reflexión. Significa esto que ahora sabemos cómo representar todas las transformaciones rígidas analíticamente.

Identificamos algunas propiedades y conceptos del plano euclidiano R^2 que permanecen, sin cambio, por las transformaciones rígidas. Son éstos

los invariantes euclidianos y la geometría euclidiana es el estudio de tales invariantes. En la sección 8 se dieron algunas aplicaciones a la geometría.

Ciertos tipos de transformaciones tales como las transformaciones no singulares, las transformaciones lineales, las transformaciones ortogonales, las traslaciones y las rotaciones, tienen propiedades respecto a la composición que son análogas a las propiedades multiplicativas de los números reales distintos de cero. Resumimos esto afirmando que eran grupos. Posteriormente, cuando en la trigonometría relacionemos ángulos y rotaciones, será importante para nosotros saber que, respecto a la composición, las rotaciones tienen todas las propiedades puramente multiplicativas de los números reales distintos de cero. En otras palabras, el conjunto de todas las rotaciones del plano euclidiano R^2 alrededor del origen forma un grupo conmutativo respecto a la composición.

En la última sección discutimos los sistemas de coordenadas y, en particular, los sistemas de coordenadas rectangulares. Aprendimos que todo cambio de sistema de coordenadas puede representarse por una transformación no singular de R^2 y que toda transformación no singular de R^2 puede interpretarse como un cambio de coordenadas. En las aplicaciones de las matemáticas a los problemas concretos, la elección de los sistemas de coordenadas es cuestión a decidir por el usuario, y debe aprenderse a elegir sistemas de coordenadas que sean convenientes y naturales para el problema por resolver. Por ejemplo, en la vida cotidiana, cuando damos una dirección a un extranjero o describimos una partida de golf, es natural que liguemos nuestro sistema de coordenadas a la tierra. No es, sin embargo, natural obrar así si lo que deseamos es describir el movimiento de los planetas.

Problemas de repaso

1. Considérense las funciones T_i de R^2 en R^2 definidas por

1) $T_1(x, y) = \left(\dfrac{x}{1+x}, y\right)$

2) $T_2(x, y) = \left(\dfrac{x}{1+x^2}, y\right)$

3) $T_3(x, y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, y\right)$

4) $T_4(x, y) = (x-2y, 2x+y)$

5) $T_5(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x-2y+5, 2x+y-8)$.

¿Cuáles de las anteriores funciones son:

a) Transformaciones sobre R^2?

b) Transformaciones no singulares?

c) Univalentes? Determínese la inversa de cada una de las funciones univalentes.

d) Transformaciones lineales?

e) Transformaciones rígidas?

2. Pruébese que:

a) Respecto a T_3 la transformada de una recta horizontal es una recta horizontal y la transformada de una recta vertical es una recta vertical.

b) Dibújense $T_3(\mathcal{L})$ y $T_5(\mathcal{L})$, donde $\mathcal{L}$ es la recta de pendiente 1 que pasa por el origen.

Sugerencia. $T_5(\mathcal{L})$ es una recta, por lo que se necesita determinar solamente dos puntos de $T_5(\mathcal{L})$.

3. Sea $T(x, y) = (x, y)+(h, k)$ y

$$U(x, y) = x(u_1, u_2)+y(-u_2, u_1) \quad ({u_1}^2+{u_2}^2 = 1).$$

Determínense $(T \circ U)^*$ y $(U \circ T)^*$.

4. Determínese:

a) La rotación

b) La reflexión

que transforma $(-2, 3)$ en un punto sobre la parte positiva del eje X.

5. Determínese una transformación rígida que transforme $\mathbf{Q}_0 = (1, 3)$ en el origen y el punto $\mathbf{P}_0 = (4, 7)$ en un punto sobre la parte positiva del eje X.

6. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ cuyas coordenadas satisfacen $xy = 1$; es decir, $\mathcal{C} = \{(x, y) \mid xy = 1\}$. Sea T la rotación de ejes definida por

$$(x, y) = T^*(x', y') = \frac{x'}{\sqrt{2}}(1, 1) + \frac{y'}{\sqrt{2}}(1, -1).$$

Demuéstrese que respecto a las nuevas coordenadas,

$$\mathcal{C} = \{(x', y') \mid x'^2-y'^2 = 2\}.$$

Trácese la gráfica de $\mathcal{C}$.

7. Sea $\mathcal{C} = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$. Sea $T(x, y) = (x+h, y+k)$ y sea V la reflexión respecto de la recta $y = x$. Demuéstrese que:

a) $$T(\mathcal{C}) = \left\{(x', y') \,\middle|\, \frac{(x'-h)^2}{a^2} + \frac{(y'-k)^2}{b^2} = 1\right\}$$
$$= \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\right\}.$$

b) $$V(\mathcal{C}) = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1\right\}.$$

***8.** Si U es una transformación ortogonal de R^2, demuéstrese que

$$U(\mathbf{P})\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{P}\cdot U^*(\mathbf{Q})$$

para $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ en R^2 cualesquiera.

***9.** Si $L(x, y) = x(a, b)+y(b, c)$, demuéstrese que

$$L(\mathbf{P})\cdot\mathbf{Q} = \mathbf{P}\cdot L(\mathbf{Q})$$

para $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ en R^2 cualesquiera.

***10.** Si

$$\begin{aligned} A(x, y) &= x(a_{11}, a_{21})+y(a_{12}, a_{22}) \\ &= (a_{11}x+a_{12}y,\ a_{21}x+a_{22}y) \\ B(x, y) &= (b_{11}x+b_{12}y,\ b_{21}x+b_{22}y), \end{aligned}$$

entonces las transformaciones lineales A y B pueden representarse por sus coeficientes en la siguiente manera

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

A los arreglos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ les llamamos *matrices*. De $\mathcal{A}$ decimos que es la matriz que representa a la transformación lineal A. El producto $\mathcal{A}\mathcal{B}$ de matrices se define por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Demuéstrese que: si $C = A \circ B$, entonces la matriz que representa a C es $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$.

b) Si

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix},$$

calcúlese cuáles son las matrices que representan $A \circ B$, $B \circ A$, A^*, y B^*.

c) Demuéstrese que: una matriz $\mathcal{A}$ representa una transformación ortogonal A si y sólo si

$$\mathcal{A}'\mathcal{A} = I,$$

donde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{la } \textit{matriz identidad},$$

y

$$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{la } \textit{transpuesta} \text{ de } \mathcal{A}.$$

De donde se concluye que para transformaciones ortogonales A, $\mathcal{A}^*$ (la matriz que representa a A^*, llamada la inversa de $\mathcal{A}$) es igual a $\mathcal{A}'$.

***11.** Sea T una transformación no singular de R^2, y sea U una transformación de R^2. Si $\bar{\mathbf{P}} = T(\mathbf{P})$ representa un cambio de coordenadas, demuéstrese que respecto al nuevo sistema de coordenadas

$$\bar{U} = T^* \circ U \circ T$$

representa la misma transformación de puntos que la que representa U respecto al sistema de coordenadas original.

Sugerencia. Dibújese un diagrama de las correspondencias y demuéstrese que lo que se requiere es que $C^* \circ U \circ C = \bar{C}^* \circ \bar{U} \circ \bar{C}$.

Capítulo

$F_0 + x'u + y'u^{\perp}$ 5

Gráficas de ecuaciones

1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo 3 vimos la forma en que las funciones reales de variable real especifican conjuntos de puntos en el plano R^2. Estos conjuntos, las gráficas de las funciones, tienen la propiedad de que no hay dos puntos (distintos) del conjunto que estén en la misma recta vertical. En este capítulo veremos cómo pueden especificarse analíticamente, por funciones, tipos más generales de conjuntos de puntos en R^2. Estudiaremos, en particular con algún detalle, el problema de dar descripciones analíticas de la circunferencia y las secciones cónicas —parábola, elipse e hipérbola.

2. REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA

Sean f y g dos funciones reales de variable real con dominios $\mathfrak{D}_f$ y $\mathfrak{D}_g$ respectivamente. Entonces, si $\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g$ no es vacío, el conjunto

2.1 $$\mathcal{E} = \{(f(t), g(t)) \mid t \in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g\}$$

es un conjunto de puntos en R^2.

Si, por ejemplo, f es la función idéntica, I, entonces

$$\mathcal{E} = \{(t, g(t)) \mid t \in \mathfrak{D}_g\}$$

y $\mathcal{E}$ es la gráfica de la función g. Por tanto, como g es una función real de variable real arbitraria, la gráfica de cualquier función real de variable real es un conjunto del tipo (2.1) con $f = I$, la función identidad. Sin embargo, los conjuntos del tipo (2.1) constituyen una clase más grande. Por ejemplo, las funciones f y g pueden tener la propiedad de que para dos valores distintos $t_1, t_2 \in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g$, $f(t_1) = f(t_2)$ mientras que $g(t_1) \neq g(t_2)$. Entonces $(f(t_1), g(t_1))$ y $(f(t_2), g(t_2))$ son dos distintos pares ordenados de $\mathcal{E}$ con el mismo primer elemento. Así pues, en este caso $\mathcal{E}$ intersecta a una recta vertical en dos puntos distintos y no es, por tanto, la gráfica de una función.

2.2 Ejemplo. Sea $f = I$, la función identidad, y $g = I^2$. Entonces

$$\mathcal{E} = \{(t, t^2) \mid t \in R\}.$$

El conjunto $\mathcal{E}$ se muestra en la figura 1.

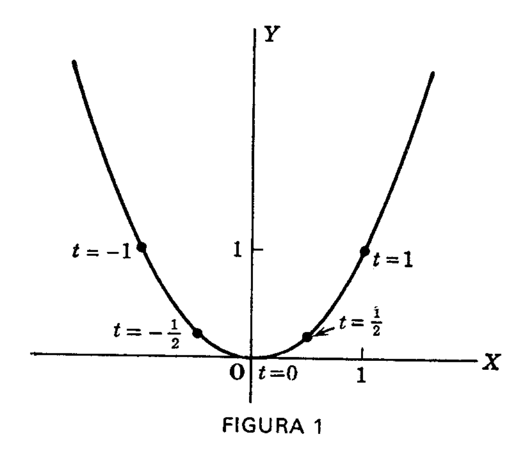


FIGURA 1

2.3 Ejemplo. Sea $f = I^2$ y $g = I$. Entonces

$$\mathcal{E} = \{(t^2, t) \mid t \in R\}.$$

En este caso $\mathcal{E}$ no es la gráfica de una función. Por ejemplo, los pares ordenados (1, 1) y (1, −1) pertenecen a $\mathcal{E}$. El conjunto $\mathcal{E}$ se muestra en la figura 2. Cualquier recta vertical a la derecha del eje Y corta a $\mathcal{E}$ en dos puntos.

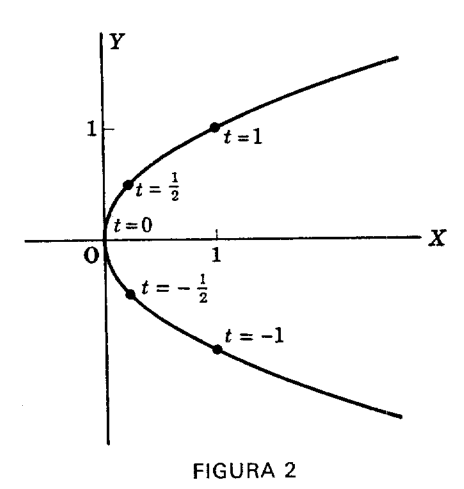


FIGURA 2

2.4 Ejemplo. Sea $f = I^3 - 4I$ y $g = I^2 - 4$. Entonces

$$\mathcal{E} = \{(t^3 - 4t,\ t^2 - 4) \mid t \in \mathrm{R}\}.$$

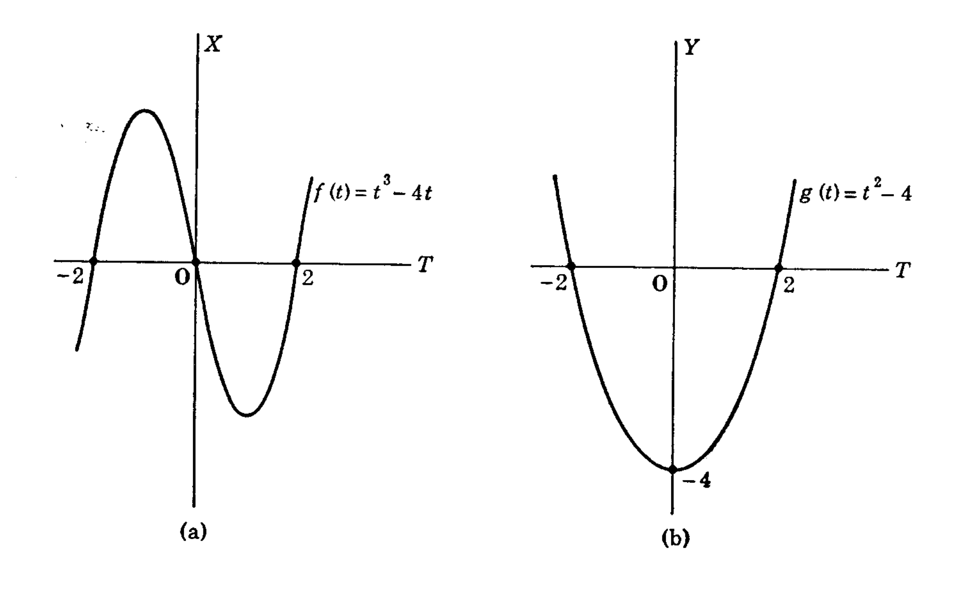
Las gráficas de f y g están ilustradas en las figuras $3a$ y $3b$, respectivamente, y la gráfica de $\mathcal{E}$ está ilustrada en la figura $3c$. Es conveniente ilustrar las gráficas de f y g. Vemos que para $t < -2$, x es negativa y aumenta cuando aumenta el valor de t, mientras que y es positiva y disminuye cuando t aumenta. De donde, para $t < -2$ los puntos de la gráfica de $\mathcal{E}$ se mueven hacia la derecha y hacia abajo y se aproximan al origen cuando t aumenta. Para $-2 < t < 0$, y es negativa y decrece de 0 a -4, mientras que x aumenta de 0 a algún valor máximo y luego decrece hasta 0 cuando aumenta t. Los puntos correspondientes de la gráfica de $\mathcal{E}$ se mueven a la derecha del eje Y y entonces regresan al eje mientras descienden desde el eje X hasta el punto $(0, -4)$. Observaciones análogas pueden hacerse sobre el comportamiento de $\mathcal{E}$ para $0 < t < 2$ y para $2 < t$.

Si

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{(f(t), g(t)) \mid t \in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g\} \\ &= \{(x, y) \mid x = f(t),\ y = g(t),\ t \in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g\},\end{aligned}$$

decimos que las ecuaciones

2.5
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t \in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g \end{cases}$$



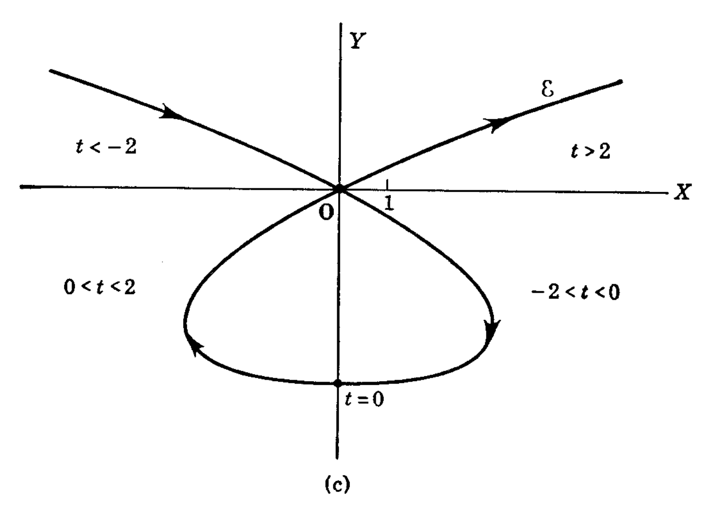


FIGURA 3

son *ecuaciones paramétricas* de $\mathcal{E}$, y $\mathcal{E}$ se dice que es la *gráfica* de (2.5). Las ecuaciones 2.5 determinan las coordenadas de un punto $\mathbf{P} = (x, y)$ explícitamente para cada valor de $t \in \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g$. La cantidad t se llama *parámetro*. En los problemas físicos en que aparece movimiento en un plano, el parámetro t generalmente representa el tiempo. En este caso, el conjunto $\mathcal{E}$ se llama *trayectoria* del movimiento.

Hemos visto ya la representación paramétrica de una recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ en la dirección del vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$:

$$\mathcal{L} = \{(x_0, y_0)+t(a_1, a_2) \mid t \in \mathrm{R}\} = \{(x_0+ta_1, y_0+ta_2) \mid t \in \mathrm{R}\}.$$

Las ecuaciones paramétricas de esta recta son

$$\begin{cases} x = x_0+ta_1 \\ y = y_0+ta_2, \quad t \in \mathrm{R}. \end{cases}$$

Se puede también considerar la ecuación vectorial

2.6 $\qquad \mathbf{P} = (x, y) = \mathbf{F}(t) \quad \text{donde} \quad \mathbf{F}(t) = (f(t), g(t)).$

La ecuación (2.6) es equivalente a la ecuación (2.5) y se llama *ecuación vectorial* del conjunto $\mathcal{E}$. Una ecuación vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ en la dirección del vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ es

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0+t\mathbf{a}.$$

La función $\mathbf{F}$ en la ecuación vectorial (2.6) del conjunto $\mathcal{E}$ tiene dominio en R y rango en R^2. Es decir,

$$\mathbf{F} = \{(t, (f(t), g(t))) \mid t \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\}.$$

Problemas

1. Dibújense las gráficas de los conjuntos definidos por

a) $\{(t, t^3)\}$ *b)* $\{(t^3, t)\}$

c) $\{(t+1, 3t+5)\}$ *d)* $\{(5t+6, t-3)\}$

e) $\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 3t-4 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = 2-t \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = 2-t^2 \\ y = 2-t^2 \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = t \end{cases}$

i) $\mathbf{P} = (3+t^2, 4-t^2)$, $t \in \mathrm{R}$ *j)* $\mathbf{P} = (2+t, \frac{5}{2}-t)$, $t \in \mathrm{R}$

k) $\mathbf{P} = (\sqrt{1-t^2}, t)$, $t \in [-1, 1]$ *l)* $\mathbf{P} = (\frac{1}{3}t, \sqrt{1-t^2})$, $t \in [-1, 1]$

m) $(x, y) = (3t, 4\sqrt{1-t^2})$, $t \in [-1, 1]$

n) $(x, y) = (4\sqrt{1-t^2}, 3t)$, $t \in [-1, 1]$

o) $(x, y) = (3t, 4\sqrt{t^2-1})$, $t \in \langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$

p) $(x, y) = (4\sqrt{t^2-1}, 3t)$, $t \in \langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$.

2. Si $\mathcal{E} = \{(t, t^2) \mid t \in \mathrm{R}\}$ y U es la rotación definida por

$$U(x, y) = x(0, -1)+y(1, 0),$$

determínese $U(\mathcal{E})$ y dibújense tanto $\mathcal{E}$ como $U(\mathcal{E})$.

3. FUNCIONES DE DOS VARIABLES REALES Y GRÁFICAS DE ECUACIONES

En la sección 2 representamos conjuntos de puntos en R^2 por medio de dos funciones reales de una variable real. Consideraremos ahora la representación de conjuntos en R^2 por medio de una función f de R^2 en R. Es decir, consideramos la función

3.1 $$f = \{(\mathbf{P}, f(\mathbf{P})) \mid \mathbf{P} \in \mathcal{D}_f\}$$

donde $\mathcal{D}_f \subset R^2$ y $f(\mathbf{P}) \in R$.

La función f es un conjunto de pares ordenados. El primer elemento en cada par ordenado es el mismo un par ordenado de números reales y el segundo elemento en cada par ordenado es un número real. Como f es una función, no hay dos pares ordenados distintos en f que tengan el mismo primer elemento. Así pues si $f(x_1, y_1) \neq f(x_2, y_2)$, entonces $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, es decir, $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$. Dicho en otra forma, dado un punto $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ hay un número real y sólo un número real $f(x, y)$. Como el rango de f es un conjunto de números reales, decimos que f es una función valuada en los reales y como el dominio de f es un conjunto de pares ordenados de números reales, decimos que f es una función de dos variables reales —f se llama función valuada en los números reales de dos variables reales, o con más sencillez, función real de dos variables reales.

Ahora, el conjunto $\mathcal{E}$ de todos los puntos (x, y) tales que $f(x, y) = c$, donde c es algún número real del rango de f, es un conjunto de puntos en R^2:

3.2 $$\mathcal{E} = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\}.$$

La ecuación $f(x, y) = c$ se dice que es *una ecuación* (implícita) *de* $\mathcal{E}$. Dado un número real x, puede que haya uno o más números reales y tales que $f(x, y) = c$. En este caso, el valor (o valores) de y está implicado por la ecuación $f(x, y) = c$ y se dice que está determinado (o están determinados) implícitamente por la ecuación.

Si $f(x_0, y_0) = c$ [es decir, si $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$,] entonces (x_0, y_0) se dice que es una *solución* de la ecuación $f(x, y) = c$, y el conjunto $\mathcal{E}$, el conjunto de todas las soluciones, se llama *gráfica* de la ecuación $f(x, y) = c$.

Esta terminología "$f(x, y) = c$ es una ecuación de $\mathcal{E}$", "$\mathcal{E}$ es la gráfica de la ecuación $f(x, y) = c$", y "el conjunto de todas las soluciones de $f(x, y) = c$ es $\mathcal{E}$", no es más, en todo su conjunto, que tres formas de decir que

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\}.$$

Si c no está en el rango de f, $\mathcal{E}$ es el conjunto nulo, y la ecuación $f(x, y) = c$ no tiene soluciones.

Si, por ejemplo, $f(x, y) = x^2+y^2$, entonces el conjunto

$$\mathcal{E} = \{(x, y) | f(x, y) = 25\}$$

es una circunferencia con centro en el origen y radio 5.

3.3 $$x^2+y^2 = 25$$

es una ecuación de la circunferencia $\mathcal{E}$. El punto (3, 4) es una solución de la ecuación (3.3), ya que

$$3^2+4^2 = 9+16 = 25.$$

Dado un número real $x \in [-5, 5]$, la ecuación (3.3) determina implícitamente dos valores para y, pues despejando tenemos

$$y^2 = 25-x^2$$

y de aquí

$$y = \sqrt{25-x^2} \quad \text{o} \quad y = -\sqrt{25-x^2}.$$

Si $f(x, y) = x^2+y^2$, entonces, para cualquier número real positivo r^2, el conjunto

$$\mathcal{E} = \{(x, y) | f(x, y) = r^2\}$$

es una circunferencia de radio r con centro en el origen y

$$x^2+y^2 = r^2$$

es una ecuación de la circunferencia $\mathcal{E}$.

Problemas

1. Dado el conjunto $\mathcal{E}$, determínese una ecuación $f(x, y) = c$ de $\mathcal{E}$

a) $\mathcal{E} = \{(t, t^2) | t \in \mathrm{R}\}$
b) $\mathcal{E} = \{(t^2, t) | t \in \mathrm{R}\}$
c) $\mathcal{E} = \{(t+1, 3t+5) | t \in \mathrm{R}\}$
d) $\mathcal{E} = \{(2t+1, 3t-4) | t \in \mathrm{R}\}$
e) $\mathcal{E} = \{(t^2-2, t^2-2) | t \in \mathrm{R}\}$
f) $\mathcal{E} = \{(\sqrt{2-I^2}, \sqrt{2-I^2})\}$.

2. Dibújense los conjuntos definidos por

a) $\{(x, y) | 2x-3y = 2\}$
b) $\{(x, y) | x^2+y^2 = 16\}$
c) $\{(x, y) | y = \sqrt{16-x^2}\}$
d) $\{(x, y) | x = \sqrt{16-y^2}\}$
e) $\{(x, y) | x^2+y^2 = 0\}$
f) $\{(x, y) | x^2-y^2 = 0\}$
g) $\{(x, y) | x-y^2 = 0\}$
h) $\{(x, y) | |x| = |y|\}$
i) $\{(x, y) | 3x+4y = 5\}$
j) $\{(x, y) | 4x^2+4y^2 = 9\}$
k) $\{(x, y) | (x-1)^2+(y+3)^2 = 16\}$
l) $\{(x, y) | x = 1+\sqrt{7-6y-y^2}\}$
m) $\{(x, y) | x = 1-\sqrt{7-6y-y^2}\}$
n) $\{(x, y) | y = -3+\sqrt{15+2x-x^2}\}$.

4. INTERCEPCIONES, EXTENSIÓN, Y SIMETRÍA DE GRÁFICAS

Nuestro presente propósito es determinar algunas de las propiedades de la gráfica de una ecuación basándonos en la discusión de la ecuación. Cuando introduzcamos el cálculo, seremos capaces de decir algo sobre el comportamiento local de una gráfica, es decir, del comportamiento en la vecindad de un punto sobre la gráfica. En esta sección consideraremos algunas de las propiedades de las gráficas de tipo global e ilustraremos cómo un conocimiento de estas propiedades simplifica el dibujo de las gráficas.

Intercepciones. Si en una ecuación $f(x, y) = c$, hacemos $x = 0$ y resolvemos $f(0, y) = c$, obtenemos todos los puntos de la gráfica de la ecuación que se encuentran sobre el eje Y, es decir, que tienen como abscisa cero. Las ordenadas de tales puntos se llaman *Y-intercepciones*. De modo análogo, haciendo $y = 0$ y resolviendo $f(x, 0) = c$, encontramos las *X-intercepciones* de la gráfica: las abscisas de los puntos de la gráfica que están sobre el eje X.

4.1 Ejemplo. Encuéntrense las X-intercepciones y las Y-intercepciones de la ecuación

$$9x^2+4y^2 = 36.$$

SOLUCIÓN. Para encontrar las Y-intercepciones, resolvemos la ecuación $0+4y^2 = 36$.

$$4y^2 = 36 \Leftrightarrow y = 3 \quad \text{o} \quad y = -3.$$

Luego, las Y-intercepciones son 3 y -3.

Para encontrar las X-intercepciones resolvemos la ecuación $9x^2+0 = 36$.

$$9x^2 = 36 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{o} \quad x = -2.$$

Por tanto, las X-intercepciones son 2 y -2.

Extensión. En muchos ejemplos, un examen de la ecuación revela que hay algunas partes del plano donde no hay punto alguno de la gráfica. Cuando tenemos tal información, ello nos permite restringir el rango de nuestra investigación. La gráfica puede ser acotada; es decir, puede estar contenida completamente dentro de alguna región rectangular del plano. En otros casos, aunque la gráfica no está acotada, hallamos que está confinada a la región a la izquierda o a la derecha de alguna recta paralela al eje Y, o es posible que esté confinada a la región situada sobre o debajo de alguna recta paralela al eje X.

4.2 Ejemplo. Determínese la extensión de la gráfica de la ecuación

$$9x^2+4y^2 = 36.$$

SOLUCIÓN. Si (x, y) es un punto de la gráfica, entonces, resolviendo la ecuación para x, obtenemos

$$x^2 = \tfrac{4}{9}(9-y^2)$$

o

$$x = \pm\tfrac{2}{3}\sqrt{9-y^2},$$

y encontramos que, como x es un número real, debemos tener

$$y^2 \leqslant 9.$$

Esto implica que

$$-3 \leqslant y \leqslant 3.$$

Análogamente, resolviendo la ecuación para y, encontramos que los valores reales para y se obtienen si y sólo si

$$-2 \leqslant x \leqslant 2.$$

Podemos ahora decir que nada de la gráfica se encuentra fuera de la región que se muestra en la figura 4.

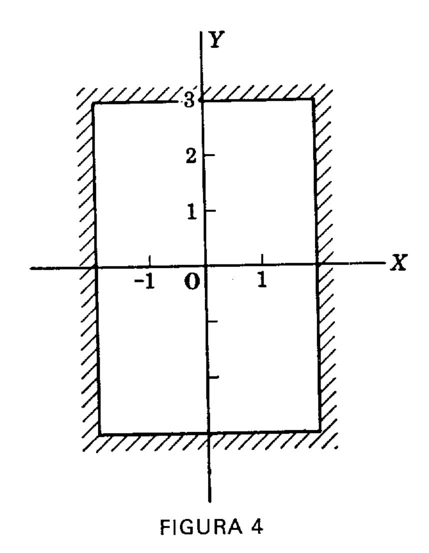


FIGURA 4

Simetría. Sea $\mathcal{L}$ una recta dada y **Q** un punto dado. El punto **Q**$'$ tal que $\mathcal{L}$ es la mediatriz del segmento rectilíneo $[\mathbf{Q}, \mathbf{Q}']$ se llama imagen refleja de **Q** con respecto a la recta $\mathcal{L}$. Si **Q**$'$ es la imagen refleja de **Q** con respecto a $\mathcal{L}$, entonces **Q** es la imagen refleja de **Q**$'$ respecto a $\mathcal{L}$ (figura 5).

Si, ahora, $\mathcal{E}$ es un conjunto de puntos en $\mathbf{R}^2$ y $\mathcal{L}$ es una recta dada, decimos que el conjunto $\mathcal{E}$ es *simétrico con respecto a la recta* $\mathcal{L}$ si, para

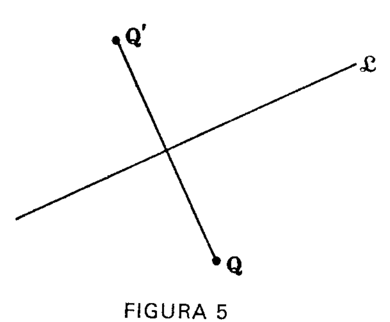


FIGURA 5

todo punto $\mathbf{Q} \in \mathcal{E}$, su imagen refleja $\mathbf{Q}'$ con respecto a $\mathcal{L}$ es también un punto de $\mathcal{E}$. Un conjunto de puntos $\mathcal{E} \subset R^2$ es simétrico con respecto a una recta $\mathcal{L}$ si y sólo si el conjunto es invariante bajo la reflexión respecto a $\mathcal{L}$. Es decir, si V es la reflexión respecto la recta $\mathcal{L}$, entonces $\mathcal{E}$ es simétrico con respecto a $\mathcal{L}$ si y sólo si $V(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

Estamos interesados, en particular, en las simetrías respecto a los ejes de coordenadas. Si $\mathbf{P} = (x, y)$ es un punto cualquiera del plano, entonces el punto $\mathbf{P}' = (-x, y)$ es la imagen de $\mathbf{P}$ respecto al eje Y mientras que el punto $\mathbf{P}'' = (x, -y)$ es la imagen de $\mathbf{P}$ respecto al eje X (figura 6).

Así pues, un conjunto $\mathcal{E}$ de puntos en R^2 es simétrico con respecto al eje X si, para cualquier punto $(x, y) \in \mathcal{E}$, $(x, -y)$ también está en $\mathcal{E}$. Análogamente, $\mathcal{E}$ es simétrico con respecto al eje Y si, para cualquier punto $(x, y) \in \mathcal{E}$, $(-x, y)$ está también en $\mathcal{E}$.

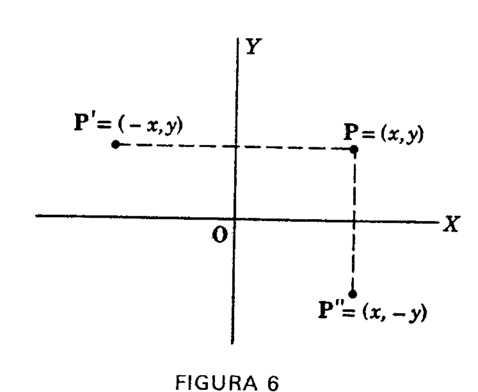


FIGURA 6

Si el conjunto $\mathcal{E}$ es una gráfica de una función real de variable real,

$$\mathcal{E} = f = \{(x, f(x))\},$$

entonces la simetría con respecto al eje Y requiere que si $(x, f(x)) \in \mathcal{E}$, entonces

$$(-x, f(-x)) = (-x, f(x)) \in \mathcal{E}.$$

Es decir, para cada $x \in \mathfrak{D}_f$, se requiere que $-x \in \mathfrak{D}_f$ y que $f(-x) = f(x)$. A tal función se le llama *función par*. Si una función f tiene la propiedad de que siempre que $x \in \mathfrak{D}_f$ entonces también $-x \in \mathfrak{D}_f$ y $f(-x) = -f(x)$, entonces la función f se dice que es una *función impar*.

Fácilmente puede verificarse que I^n es una función par si n es par, y es impar si n es impar. Se sigue de ello que las funciones polinomiales en que sólo aparecen exponentes pares, son ejemplos de funciones pares y las funciones polinomiales en las que sólo aparecen exponentes impares, son ejemplos de funciones impares. En trigonometría encontraremos otros ejemplos de funciones pares e impares.

Excepto para el caso trivial de la función cero, una gráfica $\mathcal{E}$ de una función no puede ser simétrica respecto al eje X ya que esto requiere que

si $(x, y)\in\mathcal{E}$ entonces $(x, -y)\in\mathcal{E}$, y si $y \neq 0$ esto implicaría la existencia de dos pares distintos con el mismo primer elemento.

Si el conjunto $\mathcal{E}$ tiene una representación paramétrica

$$\mathcal{E} = \{(f(t), g(t)) \mid t\in\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g\},$$

entonces $\mathcal{E}$ es simétrico con respecto al eje X si, para cada $t_1\in\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g$, existe un $t_2\in\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g$ tal que $f(t_2) = f(t_1)$ y $g(t_2) = -g(t_1)$. Análogamente, $\mathcal{E}$ es simétrico con respecto al eje Y si, para cada $t_1\in\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g$ existe un $t_2\in\mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g$ tal que $f(t_2) = -f(t_1)$ y $g(t_2) = g(t_1)$. En particular, si f es una función par y g es una función impar, entonces $\mathcal{E}$ es simétrico con respecto al eje X. Si f es una función impar y g es una función par, entonces $\mathcal{E}$ es simétrico con respecto al eje Y.

4.3 Ejemplo. En el ejemplo 2.2, $f = I$ es una función impar y $g = I^2$ es una función par. De acuerdo con el criterio que acabamos de exponer, el conjunto $\mathcal{E} = \{(t, t^2) \mid t\in\mathrm{R}\}$ es simétrico con respecto al eje Y (figura 1).

En el ejemplo 2.3, $f = I^2$ es una función par y $g = I$ es una función impar. Otra vez, según el anterior criterio, el conjunto $\mathcal{E} = \{(t^2, t) \mid t\in\mathrm{R}\}$ es simétrico con respecto al eje X (figura 2).

Si un conjunto $\mathcal{E}$ es la gráfica de una ecuación $f(x, y) = c$:

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\},$$

entonces $\mathcal{E}$ es también la gráfica de la ecuación $g(x, y) = f(x, y) - c = 0$. Es, por tanto, suficiente considerar gráficas de ecuaciones de la forma $g(x, y) = 0$, y entonces tenemos los siguientes procedimientos de comprobación de simetría con respecto a los ejes de coordenadas.

Test de simetría con respecto al eje X. Si

$$g(x, -y) = \pm g(x, y),$$

entonces la gráfica de la ecuación $g(x, y) = 0$ es simétrica con respecto al eje X.

Si (x_0, y_0) está en la gráfica de la ecuación $g(x, y) = 0$ y g satisface este test, entonces

$$g(x_0, -y_0) = \pm g(x_0, y_0) = 0.$$

De donde $(x_0, -y_0)$ está también sobre la gráfica y la gráfica es simétrica respecto al eje X.

Test de simetría con respecto al eje Y. Si

$$g(-x, y) = \pm g(x, y),$$

entonces la gráfica de la ecuación $g(x, y) = 0$ es simétrica con respecto al eje Y.

Si (x_0, y_0) está sobre la gráfica de $g(x, y) = 0$ y g satisface este test, entonces

$$g(-x_0, y_0) = \pm g(x_0, y_0) = 0.$$

De donde $(-x_0, y_0)$ está también sobre la gráfica, y la gráfica es simétrica con respecto al eje Y.

Además de la simetría con respecto a una recta, podemos también considerar la simetría con respecto a un punto. Si P es el punto medio del segmento rectilíneo $[\mathbf{Q}, \mathbf{Q}']$, entonces $\mathbf{Q}'$ se dice que es la imagen de $\mathbf{Q}$ con respecto al punto $\mathbf{P}$. Un conjunto $\mathcal{E}$ se dice que *es simétrico con respecto a un punto* $\mathbf{P}$ si, para todo punto $\mathbf{Q}$ en el conjunto, su imagen $\mathbf{Q}'$ con respecto a $\mathbf{P}$ es también un punto del conjunto. El caso de más interés es aquél en que $\mathbf{P}$ es el origen de R^2. Notamos que la imagen con respecto al origen de cualquier, punto (x, y) es el punto $(-x, -y)$ (figura 7). Por tarto, un conjunto $\mathcal{E}$ es simétrico con respecto al origen si y sólo si, siempre que (x, y) está en $\mathcal{E}$, también $(-x, -y)$ está en $\mathcal{E}$; es decir, si y sólo si $\mathcal{E}$ es invariante respecto a la rotación

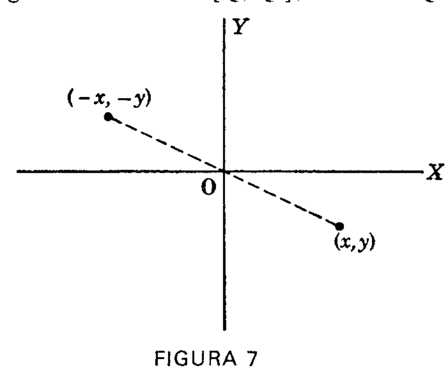


FIGURA 7

$$U(x, y) = x(-1, 0)+y(0, -1) = (-x, -y).$$

Si el conjunto $\mathcal{E}$ es la gráfica de una función,

$$\mathcal{E} = f = \{(x, f(x))\},$$

entonces la simetría con respecto al origen requiere que si $(x, f(x))\in\mathcal{E}$ entonces $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))\in\mathcal{E}$. Es decir, para cada $x\in\mathfrak{D}_f$ se necesita que $-x\in\mathfrak{D}_f$ y $f(-x) = -f(x)$. Por tanto, f debe ser una función impar.

4.4 Ejemplo. Sea $f = I^3+3I$. Entonces

$$\mathcal{E} = f = \{(x, x^3+3x)\}.$$

Como $f(-x) = (-x)^3+3(-x) = -(x^3+3x) = -f(x)$, f es una función impar y $\mathcal{E}$ es simétrica con respecto al origen.

Si el conjunto $\mathcal{E}$ tiene una representación paramétrica

$$\mathcal{E} = \{(f(t), g(t))\,|\,t\in\mathfrak{D}_f\cap\mathfrak{D}_g\},$$

entonces $\mathcal{E}$ es simétrico con respecto al origen si para cada $t_1\in\mathfrak{D}_f\cap\mathfrak{D}_g$, hay un $t_2\in\mathfrak{D}_f\cap\mathfrak{D}_g$ tal que $f(t_2) = -f(t_1)$ y $g(t_2) = -g(t_1)$. Si f y g son, ambas, funciones impares, entonces $\mathcal{E}$ es simétrica con respecto al origen.

4.5 Ejemplo. Sea $f = I^3+3I$ y $g = I^5$. Como tanto f como g son funciones impares y $\mathfrak{D}_f\cap\mathfrak{D}_g = \mathrm{R}$, para cualquier $t\in\mathrm{R}$, $-t\in\mathrm{R}$ y

$$(f(-t), g(-t)) = (-f(t), -g(t)).$$

Luego, el conjunto

$$\mathcal{E} = \{(t^3+3t, t^5) \mid t \in \mathrm{R}\}$$

es simétrico con respecto al origen.

Si un conjunto $\mathcal{E}$ es la gráfica de una ecuación $g(x, y) = 0$, tenemos el siguiente.

Test para la simetría con respecto al origen. Si

$$g(-x, -y) = \pm g(x, y),$$

entonces la gráfica de la ecuación $g(x, y) = 0$ es simétrica con respecto al origen.

Si (x_0, y_0) está sobre la gráfica de la ecuación, $g(x, y) = 0$ y g satisface este test, luego

$$g(-x_0, -y_0) = \pm g(x_0, y_0) = 0.$$

De donde $(-x_0, -y_0)$ está, también, sobre la gráfica y la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Nótese que si una gráfica es simétrica tanto con respecto al eje X como con respecto al eje Y, entonces es simétrica también con respecto al origen. La recíproca de esta afirmación no es cierta. Es decir, una gráfica puede ser simétrica con respecto al origen sin ser simétrica con respecto a ninguno de los ejes.

4.6 Ejemplo. Determínense las simetrías de la gráfica de la ecuación

$$9x^2+4y^2 = 36$$

y úsese esta información para dibujar la gráfica.

SOLUCIÓN. Si (x, y) es solución de la ecuación entonces $(-x, y)$ y $(x, -y)$ son también soluciones de la ecuación. Por tanto, la gráfica de la ecuación es simétrica tanto con respecto al eje X como con respecto al eje Y. Como tenemos simetría respecto a ambos ejes, tenemos también simetría con respecto al origen:

$$g(-x, -y) = g(x, -y) = g(x, y).$$

Nota. Si $f(x, y)$ incluye solamente potencias pares de y, entonces la gráfica de $f(x, y) = c$ es simétrica con respecto al eje X. Si $f(x, y)$ incluye solamente potencias pares de x, entonces $f(x, y) = c$ tiene la gráfica simétrica con respecto al eje Y.

Si combinamos los resultados obtenidos en los ejemplos 4.1, 4.2, y 4.6 para la gráfica de la ecuación

$$9x^2+4y^2 = 36,$$

encontramos que, en primer lugar, por causa de la simetría necesitamos sólo encontrar la porción de la gráfica en el primer cuadrante y el resto puede encontrarse por reflexión. A causa de las limitaciones respecto a

extensión sólo necesitamos buscar puntos dentro del rango $x \in [0, 2]$ y $y \in [0, 3]$. Por otra parte, ya hemos encontrado que las intercepciones son $x = 2$, $x = -2$, $y = 3$, y $y = -3$. La gráfica de la ecuación es una elipse (figura 8).

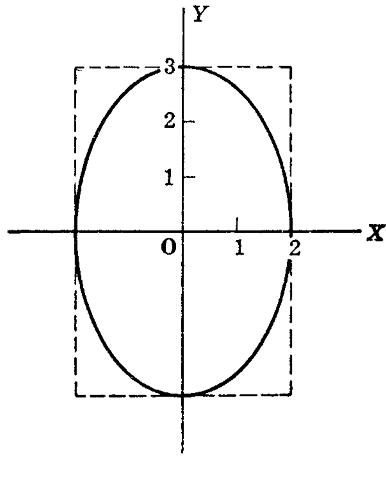


FIGURA 8

4.7 Ejemplo. Estúdiense las simetrías de la ecuación $f(x, y) = x^3 - y = 0$.

SOLUCIÓN. Como

$$f(-x, y) = (-x)^3 - y = -x^3 - y \neq \pm f(x, y)$$

y

$$f(x, -y) = x^3 + y \neq \pm f(x, y),$$

la gráfica de la ecuación no es simétrica con respecto a ninguno de los ejes. Sin embargo, como

$$f(-x, -y) = (-x)^3 - (-y) = -x^3 + y = -(x^3 - y) = -f(x, y),$$

la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al origen (figura 9).

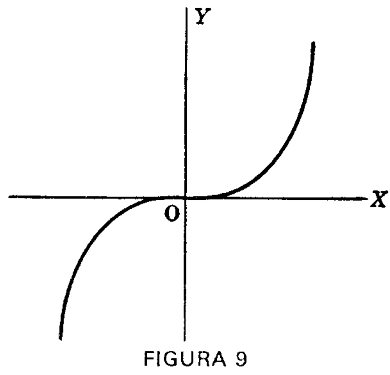


FIGURA 9

Problemas

1. Discútanse las siguientes ecuaciones para intercepciones, extensiones y simetrías, y dibújense sus gráficas.

a) $4x^2+25y^2 = 100$ *b*) $9x^2-16y^2 = 144$
c) $9y^2-16x^2 = 144$ *d*) $xy = 4$
e) $xy = -4$ *f*) $(x-2)(y-3) = 4$
g) $4(x-1)^2+25(y+2)^2 = 100$ *h*) $y(x^2+1) = 4$
i) $y(x^2-1) = 4$ *j*) $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$
k) $x^2+y^2 = 4$ *l*) $(x-1)^2+(y-3)^2 = 9$.

2. Discútanse los siguientes pares de ecuaciones paramétricas para intercepciones, extensiones, y simetrías y dibújense sus gráficas.

a) $x = t,\ y = t$ *b*) $x = t^2,\ y = t$
c) $x = t^2,\ y = t^3$ *d*) $x = t^3,\ y = t$
e) $x = t,\ y = 1/t$ *f*) $x = 1/t,\ y = t$
g) $x = 3t-2,\ y = -2t+1$ *h*) $x = 1+t^2,\ y = 1+t^2$.

¿Cuáles de las gráficas son gráficas de funciones reales de variable real?

5. LA CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos a una distancia dada de un punto dado, el centro. La distancia dada desde el centro a los puntos del conjunto se llama radio de la circunferencia. Sea el centro de la circunferencia el punto $\mathbf{P}_0 = (h, k)$ y sea r el radio. Un punto $\mathbf{P} = (x, y)$ está sobre la circunferencia si y sólo si la distancia de $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}$ es igual a r. Es decir, una circunferencia es un conjunto de puntos

$$\mathcal{C}(\mathbf{P}_0\,;r) = \{\mathbf{P} \mid |\mathbf{P}-\mathbf{P}_0| = r > 0\}.$$

Ahora bien, $|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0| = r$ es equivalente a

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r.$$

FIGURA 10

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

5.1 $$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

como una ecuación de una circunferencia con centro en el punto (h, k) y radio r (figura 10).

5.2 Ejemplo. La circunferencia con centro en $(-2, 3)$ y radio 5 es el conjunto de los puntos que satisfacen la ecuación

$$(x+2)^2+(y-3)^2 = 25.$$

5.3 Ejemplo. Discútase la gráfica de la ecuación

$$x^2+y^2+4x-6y-12 = 0.$$

SOLUCIÓN. Completando cuadrados vemos que esta ecuación es de la forma (5.1). Así pues

$$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9) = 12+4+9$$

o

$$(x+2)^2+(y-3)^2 = 25.$$

Ésta es la ecuación de la circunferencia considerada en el ejemplo 5.2.

El ejemplo 5.3 muestra que podemos esperar que una ecuación de la circunferencia aparezca en formas distintas a la de la ecuación (5.1). Si volvemos a escribir la ecuación (5.1) en la forma

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 = r^2$$

y reordenamos los términos, tenemos

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2 = 0.$$

Así pues, si una ecuación de la forma

5.4 $$x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$$

tiene una gráfica consistente en más de un punto, entonces la gráfica es una circunferencia. Para ver esto necesitamos sólo completar los cuadrados como se hizo en el ejemplo 5.3:

$$\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right) = \frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F$$

o

5.5 $$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2+E^2-4F}{4}.$$

Si la expresión $\frac{1}{4}(D^2+E^2-4F)$ a la derecha de (5.5) es positiva, entonces la ecuación (5.4) o la (5.5) es una ecuación de una circunferencia con centro en $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y de radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$. Si $D^2+E^2-4F = 0$, entonces ambos términos de la izquierda son también cero de modo que el único punto del conjunto es el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$. Finalmente, si

$D^2+E^2-4F<0$, entonces el conjunto es nulo ya que ninguno de los términos que están a la izquierda de (5.5) puede ser negativo.

5.6 Ejemplo. Encuéntrese una ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $\mathbf{P}_1=(-1,2)$, $\mathbf{P}_2=(0,0)$, y $\mathbf{P}_3=(3,0)$.

SOLUCIÓN 1. Sustituyendo sucesivamente las coordenadas de estos puntos en la ecuación

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

obtenemos las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} 1+4-D+2E+F&=0\\ 0+0+0+0+F&=0\\ 9+0+3D+0+F&=0 \end{aligned}$$

para la determinación de D, E, y F. Resolviendo estas ecuaciones obtenemos $F=0$, $D=-3$, $E=-4$. Así pues, si hay una circunferencia que pase por los puntos prescritos tiene una ecuación de la forma

$$x^2+y^2-3x-4y=0$$

o

$$(x-\tfrac{3}{2})^2+(y-2)^2=\tfrac{9}{4}+4=\tfrac{25}{4}.$$

Se verifica fácilmente que esta circunferencia pasa por los tres puntos prescritos. Partiendo de la última forma vemos que la circunferencia tiene centro en $(\frac{3}{2},2)$ y radio $\frac{5}{2}$.

SOLUCIÓN 2. Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ las mediatrices de $[\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2]$ y $[\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_3]$ respectivamente. Entonces $\mathcal{L}_1$ pasa por $\mathbf{Q}_0=\frac{1}{2}(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)=(-\frac{1}{2},1)$ y es ortogonal a $\mathbf{N}=\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1=(1,-2)$. De donde una ecuación de $\mathcal{L}_1$ es $\mathbf{N}(\mathbf{P}-\mathbf{Q}_0)=0$ o

$$x-2y=-\tfrac{5}{2}.$$

Análogamente, una ecuación de $\mathcal{L}_2$ es $(3,0)\cdot(x-\frac{3}{2},y)=0$ o

$$x=\tfrac{3}{2}.$$

El punto de intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{2}(x+\frac{5}{2})=2$. Así pues, $(\frac{3}{2},2)$ es equidistante de los tres puntos $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, y $\mathbf{P}_3$. Su distancia a $\mathbf{P}_2=(0,0)$ es $\sqrt{(\frac{9}{4})+4}=\frac{5}{2}$. Por tanto, una circunferencia de radio $\frac{5}{2}$ y centro en $(\frac{3}{2},2)$ pasa por los tres puntos $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, y $\mathbf{P}_3$. Una ecuación de esta circunferencia es

$$(x-\tfrac{3}{2})^2+(y-2)^2=(\tfrac{5}{2})^2.$$

Problemas

1. Identifíquense las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+y^2=16$

b) $(x+3)^2+(y-2)^2=12$

c) $x^2+y^2+16=0$

d) $x^2-2x+y^2=0$

e) $x^2+2x+y^2+2y=-1$

f) $4x^2+4y^2-4x-18y+2=0$.

2. Encuéntrense las ecuaciones de las siguientes circunferencias y dibújense sus gráficas:

a) De radio 3 y centro en $(4, -2)$.
b) De radio 4 y centro en el origen.
c) De centro en $(3, -1)$ y pasando por $(1, 4)$.
d) Que pasa por $(2, 3)$, $(-2, 3)$, y $(4, 5)$.
e) De radio $\frac{5}{2}$ y centro $(3, -1)$.
f) Con centro en $(4, \frac{4}{3})$ y pasando por $(-1, -\frac{4}{3})$.
g) Que pasa por $(2, -2)$, $(6, 0)$, y $(0, 2)$.
h) Que circunscribe el triángulo cuyos lados son las rectas

$$2x+3y-13 = 0,\ 2x-y-1 = 0,\ 2x+y-3 = 0.$$

3. Determínense las circunferencias que pasan por los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.

4. Encuéntrense los puntos de intersección de la circunferencia de radio 5 y centro en el origen con las siguientes rectas:

a) $\{(t, t+5)\}$.
b) La recta que pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(0, 1)$.
c) La recta de pendiente $-\frac{4}{3}$ que pasa por el punto $(1, 7)$.
d) La recta que pasa por el punto $(0, 6)$ paralela al vector $(10, -6)$.

Compruébense sus resultados gráficamente.

6. LA PARÁBOLA

6.1 Definición. *Una* ***parábola*** *es el conjunto de todos los puntos que equidistan de una recta fija y de un punto fijo que no está sobre la recta fija.*

La recta fija se llama *directriz* de la parábola y el punto fijo se llama *foco*. Sea la directriz la recta $\mathcal{L}$ de la figura 11 y sea $\mathbf{F}$ el foco. La recta que pasa por $\mathbf{F}$ ortogonal a $\mathcal{L}$ se llama *eje* de la parábola. El punto donde el conjunto intersecta al eje se llama *vértice*. El vértice, V, está situado sobre el eje a medio camino entre el foco y el punto de intersección del eje con la directriz.

Sea $\mathbf{F}-\mathbf{V} = p\mathbf{u}$ donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unitario paralelo a $\mathbf{F}-\mathbf{V}$; es decir, $|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2} = 1$. Entonces $\mathbf{F} = \mathbf{V}+p\mathbf{u}$ y el eje y la directriz se intersectan en $\mathbf{V}-p\mathbf{u}$. La directriz es la recta

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{Q} \mid \mathbf{Q} = \mathbf{V}-p\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp},\ y' \in \mathrm{R}\}.$$

Correspondiendo a cada punto $\mathbf{P}$ de R^2 hay números únicos x' y y' tales que

$$\mathbf{P} = \mathbf{V}+x'\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp}.$$

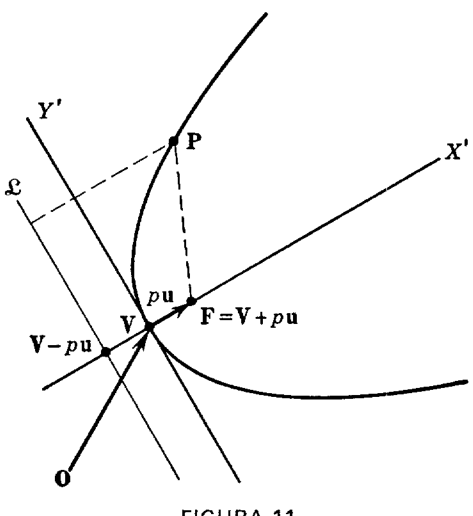


FIGURA 11

El punto **P** está sobre la parábola si y sólo si

6.2 $$d(\mathbf{P}, \mathcal{L}) = |\mathbf{P}-\mathbf{F}|$$

donde $d(\mathbf{P}, \mathcal{L})$ es la distancia de **P** a $\mathcal{L}$. Ahora bien

$$d(\mathbf{P}, \mathcal{L}) = |p+x'|$$

y

$$|\mathbf{P}-\mathbf{F}| = |(\mathbf{V}+x'\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp})-(\mathbf{V}+p\mathbf{u})| = |(x'-p)\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp}|.$$

De donde, la ecuación (6.2), se hace

$$|p+x'| = |(x'-p)\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp}|$$

o

$$|x'+p| = \sqrt{(x'-p)^2+y'^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, obtenemos

$$y'^2 = 4px'$$

o

$$x' = \frac{y'^2}{4p}.$$

De donde si **P** es un punto sobre la parábola, entonces **P** satisface la ecuación vectorial

6.3 $$\mathbf{P} = \mathbf{V} + \frac{y'^2}{4p}\boldsymbol{u} + y'\boldsymbol{u}^{\perp}.$$

Recíprocamente, si **P** satisface la ecuación (6.3), tenemos

$$d(\mathbf{P}, \mathfrak{L}) = |p+x'| = \left| p + \frac{y'^2}{4p} \right|$$

y

$$|\mathbf{P}-\mathbf{F}| = \left| \mathbf{V} + \frac{y'^2}{4p}\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp} - \mathbf{V} - p\mathbf{u} \right| = \left| \left(\frac{y'^2}{4p} - p \right) \mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp} \right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{y'^2 - 4p^2}{4p} \right)^2 + y'^2} = \sqrt{\frac{y'^4 - 8p^2y'^2 + 16p^4 + 16p^2y'^2}{16p^2}}$$

$$= \sqrt{\left(p + \frac{y'^2}{4p} \right)^2} = \left| p + \frac{y'^2}{4p} \right|$$

de modo que **P** está sobre la parábola. Así pues, la ecuación (6.3) es una *ecuación vectorial de la parábola.*

Si $\mathbf{u} = (1, 0)$, entonces el eje de la parábola es paralelo al eje X. Para $\mathbf{P} = (x, y)$ y $\mathbf{V} = (h, k)$, obtenemos

$$\mathbf{P}-\mathbf{V} = (x-h,\ y-k) = \frac{y'^2}{4p}(1, 0) + y'(0, 1) = \left(\frac{y'^2}{4p},\ y' \right).$$

De donde

6.4
$$\begin{cases} x = \dfrac{y'^2}{4p} + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

son ecuaciones paramétricas y

$$x' = x - h = \frac{y'^2}{4p} = \frac{(y-k)^2}{4p}$$

o

6.5
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

es una ecuación (implícita) de la parábola con eje paralelo al eje X, vértice $\mathbf{V} = (h, k)$, foco $\mathbf{F} = \mathbf{V} + p\mathbf{u} = (h+p, k)$, y directriz $x-h = -p$. El vector $\mathbf{F}-\mathbf{V} = p\mathbf{u} = (p, 0)$, de modo que si $p > 0$ el foco está a la derecha del vértice y la parábola se abre a la derecha. Si $p < 0$, el foco esta a la derecha del vértice y la parábola se abre hacia la izquierda.

Si $\mathbf{u} = (0, 1)$, el eje de la parábola es paralelo al eje Y. Entonces

$$\mathbf{P}-\mathbf{V} = (x-h, y-k) = \frac{y'^2}{4p}(0, 1)+y'(-1, 0) = \left(-y', \frac{y'^2}{4p}\right)$$

De donde

6.6
$$\begin{cases} x = -y'+h \\ y = \dfrac{y'^2}{4p} + k \end{cases}$$

son ecuaciones paramétricas y

$$y-k = \frac{y'^2}{4p} = \frac{(x-h)^2}{4p}$$

o

6.7
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

es una ecuación (implícita) de la parábola con eje paralelo al eje Y, vértice $\mathbf{V} = (h, k)$, foco $\mathbf{F} = \mathbf{V}+p\mathbf{u} = (h, k+p)$, y directriz $y-k = -p$. El vector $\mathbf{F}-\mathbf{V} = p\mathbf{u} = (0, p)$ de modo que si $p > 0$ el foco está por encima del vértice y la parábola se abre hacia arriba. Si $p < 0$, el foco está debajo del vértice y la parábola se abre hacia abajo. Estos resultados se tabulan en el resumen de la página 261.

Problemas

1. Identifíquense y dibújense las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a) $(x-2)^2 = 4(y+1)$
b) $(y+3)^2 = 6(x-2)$
c) $(y-3)^2 = 5(x+2)$
d) $(x-6)^2 = 3(y-2)$
e) $x^2-4x-y+3 = 0$
f) $y^2-6x+6y+15 = 0$
g) $3x^2+3y^2+12y+8 = 0$
h) $4x^2-8x-3y-2 = 0$
i) $20x^2+20x-8y+13 = 0$
j) $9y^2-18x-6y-8 = 0$
k) $3y^2-4x+12y+16 = 0$
l) $4x^2+4y^2-8x-4y-3 = 0$.

2. Encuéntrense las ecuaciones de las siguientes parábolas y dibújense sus gráficas. Sobre cada una de las gráficas muéstrese el vértice y el foco, dando sus coordenadas y muéstrese la directriz, dando su ecuación:

a) Con vértice $(2, 3)$ y foco $(2, -5)$.
b) Con vértice $(5, 2)$ y foco $(7, 2)$.
c) Con directriz $y = 5$ y foco $(7, -2)$.
d) Con directriz $x = -2$ y vértice $(5, -1)$.

3. Encuéntrese una ecuación del siguiente conjunto y dibújense todos los puntos equidistantes de la recta $x = 5$ y el punto $(2, -1)$.

4. *a*) ¿Una parábola con eje paralelo al eje X es la gráfica de una función real de variable real? ¿Por qué?

b) ¿Una parábola con eje paralelo al eje Y es la gráfica de una función real de variable real? ¿Es la gráfica de una función univalente? ¿Por qué?

5. Pruébese que la gráfica de la función $f = aI^2 + 2bI + c \ (a \neq 0)$ es la parábola con foco $\left(-\frac{b}{a}, c - \frac{b^2}{a} + \frac{1}{4a}\right)$ y directriz

$$y = c - \frac{b^2}{a} - \frac{1}{4a}.$$

6. Proporciónense ecuaciones paramétricas para la parábola con

a) $\mathbf{V} = (0, 0), \ p = \sqrt{2}, \ \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$

b) $\mathbf{V} = (0, 0), \ p = \sqrt{2}, \ \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$

c) $\mathbf{V} = (2, 3), \ p = 5, \quad \mathbf{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

d) $\mathbf{V} = (5, 2), \ p = -3, \ \mathbf{u} = (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$.

7. Identifíquense los conjuntos

a) $\{(2pt, pt^2) \mid t \in \mathrm{R}\}$

b) $\{(pt^2, 2pt) \mid t \in \mathrm{R}\}$

c) $\{(t^2 - 2t, t^2 + 2t) \mid t \in \mathrm{R}\}$

d) $\{(t^2 + 2t, -t^2 + 2t) \mid t \in \mathrm{R}\}$

e) $\{(2 + 3t^2 - 8t, 3 + 4t^2 + 6t) \mid t \in \mathrm{R}\}$

f) $\{(3 - 3t^2 + 8t, 4 - 4t^2 - 6t) \mid t \in \mathrm{R}\}$.

8. La cuerda de una parábola que pasa por el foco y que es perpendicular al eje se llama *lado recto* o *cuerda focal.*[1]

a) Demuéstrese que la longitud de la cuerda focal es $|4p|$.

b) Usando el mismo sistema de ejes en todos los casos, dibújense las gráficas de $y^2 = 4px$ para $p = 1, 2, 3, 4$.

7. LA ELIPSE

7.1 Definición. *Una* ***elipse*** *es el conjunto de todos los puntos con la propiedad de que la suma de las distancias de los puntos del conjunto a dos puntos fijos dados es una constante.*

[1] El término "cuerda focal" suele usarse en la literatura para cualquier cuerda de la parábola que pase por el foco. [N. del T.]

Los puntos fijos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se llaman *focos*. Las intersecciones $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, del conjunto con la recta que pasa por los focos se llaman *vértices*, y el punto medio $\mathbf{F}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$ del segmento $[\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2]$ se llama *centro* de la elipse (figura 12).

Sea $\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = c\mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$. Para cada punto $\mathbf{P}$ de R^2 hay números únicos x' y y' tales que

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_0 + x'\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp}.$$

El punto $\mathbf{P}$ está sobre la elipse si y sólo si

$$|\mathbf{P} - \mathbf{F}_1| + |\mathbf{P} - \mathbf{F}_2| = 2a \quad (a > c).$$

Ahora bien

$$\mathbf{P} - \mathbf{F}_1 = (\mathbf{F}_0 + x'\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp}) - (\mathbf{F}_0 - c\mathbf{u}) = (x' + c)\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp}$$

y

$$\mathbf{P} - \mathbf{F}_2 = (\mathbf{F}_0 + x'\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp}) - (\mathbf{F}_0 + c\mathbf{u}) = (x' - c)\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp}.$$

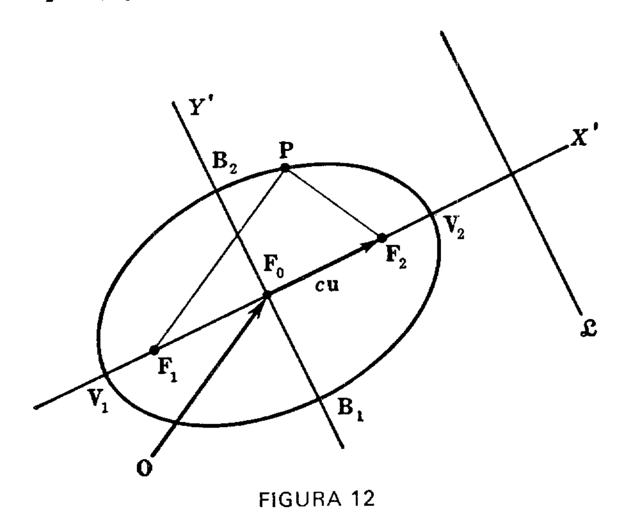


FIGURA 12

Luego $\mathbf{P}$ está en la elipse si y sólo si

$$|\mathbf{P} - \mathbf{F}_1| + |\mathbf{P} - \mathbf{F}_2| = \sqrt{(x'+c)^2 + y'^2} + \sqrt{(x'-c)^2 + y'^2} = 2a.$$

Sustrayendo el segundo radical de ambos miembros y elevando al cuadrado, tenemos

$$x'^2 + 2x'c + c^2 + y'^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x'-c)^2 + y'^2} + x'^2 - 2x'c + c^2 + y^{2\prime}$$

o

$$4(x'c - a^2) = -4a\sqrt{(x'-c)^2 + y'^2}.$$

Elevando de nuevo al cuadrado y simplificando, tenemos

$$(a^2-c^2)x'^2+a^2y'^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Como $a > c$, $a^2-c^2 > 0$ y podemos dividir por el término a la derecha:

7.2
$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2-c^2} = 1.$$

Por simplicidad representamos por **b** al número positivo que verifica

$$a^2-c^2 = b^2 \quad (b > 0).$$

Obtenemos entonces

7.3
$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_0+x'\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp} \text{ donde } \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2} = 1$$

como una ecuación de una elipse con centro en $\mathbf{F}_0$ y con eje paralelo al vector $\mathbf{u}$. Si $c = 0$ ($a = b$), entonces la elipse es una circunferencia de radio a.

Cada punto de la elipse es una solución de la ecuación (7.3). Recíprocamente, como ahora mostraremos, toda solución de la ecuación (7.3) se encuentra sobre la elipse.

De (7.2) se deduce

$$y'^2 = (a^2-c^2)\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right).$$

De donde

$$|\mathbf{P}-\mathbf{F}_1| = |(x'+c)\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp}| = \sqrt{(x'+c)^2+y'^2}$$

$$= \sqrt{(x'+c)^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(a+\frac{x'c}{a}\right)^2} = \left|a+\frac{x'c}{a}\right| = a+\frac{x'c}{a}$$

ya que $c < a$ y $|x'| \leqslant a$. Además

$$|\mathbf{P}-\mathbf{F}_2| = |(x'-c)\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp}| = \sqrt{(x'-c)^2+y'^2}$$

$$= \sqrt{\left(a-\frac{x'c}{a}\right)^2} = \left|a-\frac{x'c}{a}\right| = a-\frac{x'c}{a}.$$

Por tanto

$$|\mathbf{P}-\mathbf{F}_1|+|\mathbf{P}-\mathbf{F}_2| = a+\frac{x'c}{a}+a-\frac{x'c}{a} = 2a$$

y **P** se encuentra sobre la elipse.

Partiendo de la ecuación (7.3) podemos establecer algunas propiedades de la elipse (figura 12). Los números x', y' son coordenadas de puntos respecto a ejes X', Y' con origen en el centro de la elipse y **u** como dirección positiva para el eje X'. De la ecuación

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2} = 1$$

se deduce fácilmente que la gráfica es simétrica con respecto tanto al eje X' como al eje Y' y, por tanto, también con respecto al centro. En realidad, ésta es la razón por la que el punto medio del segmento que une los focos se llama centro. Las intercepciones con X' son $\pm a$ de modo que los vértices son $\mathbf{V}_1 = \mathbf{F}_0-a\mathbf{u}$ y $\mathbf{V}_2 = \mathbf{F}_0+a\mathbf{u}$. El segmento $[\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]$ tiene como longitud $|\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1| = 2a$ y se llama *eje mayor*. Las intercepciones con Y', $\pm b$, localizan los puntos $\mathbf{B}_1 = \mathbf{F}_0-b\mathbf{u}^\perp$ y $\mathbf{B}_2 = \mathbf{F}_0+b\mathbf{u}^\perp$. El segmento $[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2]$, llamado *eje menor*, tiene longitud $2b$.

Si $\mathbf{u} = (1, 0)$, entonces los focos están en una recta paralela al eje X. Para $\mathbf{P} = (x, y)$ y $\mathbf{F}_0 = (h, k)$, obtenemos

$$\mathbf{P}-\mathbf{F}_0 = (x-h, y-k) = x'(1, 0)+y'(0, 1) = (x', y')$$

donde $\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2} = 1$. De donde

7.4
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

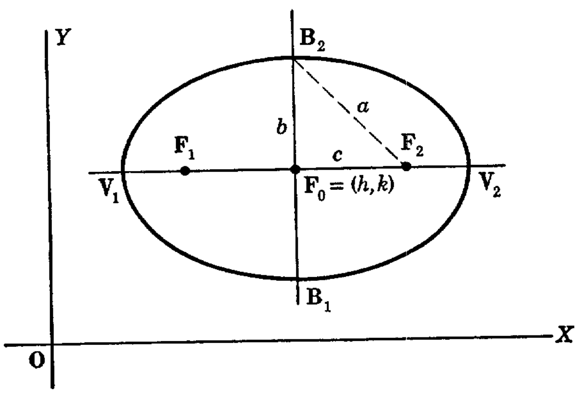


FIGURA 13

es una ecuación (implícita) de la elipse con centro $\mathbf{F}_0 = (h, k)$ y con focos sobre una recta paralela al eje X (figura 13). En particular, si el centro $\mathbf{F}_0 = (h, k)$ está en el origen, la ecuación (7.4) toma la forma

7.5
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

La elipse especificada por la ecuación (7.4) tiene centro $\mathbf{F}_0 = (h, k)$, focos $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_0 - c\mathbf{u} = (h-c, k)$ y $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_0 + c\mathbf{u} = (h+c, k)$, vértices $\mathbf{V}_1 = \mathbf{F}_0 - a\mathbf{u} = (h-a, k)$ y $\mathbf{V}_2 = \mathbf{F}_0 + a\mathbf{u} = (h+k, k)$, y extremos del eje menor $\mathbf{B}_1 = \mathbf{F}_0 - b\mathbf{u}^\perp = (h, k-b)$ y $\mathbf{B}_2 = \mathbf{F}_0 + b\mathbf{u}^\perp = (h, k+b)$. Para el caso especial del centro en el origen, ecuación (7.5), tenemos $(h, k) = (0, 0)$.

Dada una ecuación de la forma (7.4), puede localizarse fácilmente el centro $\mathbf{F}_0$, los vértices $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, y los extremos del eje menor $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$. Los focos pueden localizarse observando que (figura 13)

$$|\mathbf{B}_2 - \mathbf{F}_2| = |\mathbf{F}_0 + b\mathbf{u}^\perp - \mathbf{F}_0 - c\mathbf{u}| = \sqrt{b^2 + c^2} = a .$$

Si $\mathbf{u} = (0, 1)$ en la ecuación (7.3), los focos de la elipse están sobre una recta paralela al eje Y. Tomando $\mathbf{P} = (x, y)$ y $\mathbf{F}_0 = (h, k)$ como antes, obtenemos

$$\mathbf{P} - \mathbf{F}_0 = (x-h, y-k) = x'(0, 1) + y'(-1, 0) = (-y', x')$$

donde $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$. De donde

7.6
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

es una ecuación de la elipse con centro en $\mathbf{F}_0 = (h, k)$, focos

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_0 - c\mathbf{u} = (h, k-c) \text{ y } \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_0 + c\mathbf{u} = (h, k+c),$$

vértices $\mathbf{V}_1 = \mathbf{F}_0 - a\mathbf{u} = (h, k-a)$ y $\mathbf{V}_2 = \mathbf{F}_0 + a\mathbf{u} = (h, k+a)$, y extremos del eje menor $\mathbf{B}_1 = \mathbf{F}_0 - b\mathbf{u}^\perp = (h+b, k)$ y $\mathbf{B}_2 = \mathbf{F}_0 + b\mathbf{u}^\perp = (h-b, k)$. En particular, si el centro $\mathbf{F}_0 = (h, k)$ está en el origen, la ecuación (7.6) toma la forma

7.7
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 .$$

7.8 Ejemplo. Encuéntrese una ecuación implícita de la elipse con vértices en $(-1, -3)$ y $(5, 5)$ y un foco en $(\frac{22}{5}, \frac{21}{5})$ y dibújese la elipse.

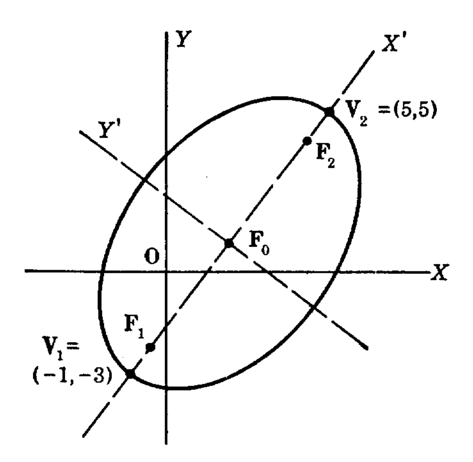


FIGURA 14

SOLUCIÓN. Para poder usar la ecuación (7.3) deben encontrarse a, b, $\mathbf{F}_0$, y $\mathbf{u}$. Resolvemos

$$\mathbf{P} = (x, y) = \mathbf{F}_0 + x'\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp}$$

para x', y' y sustituimos en

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 .$$

Tenemos, $\mathbf{V}_1 = (-1, -3)$, $\mathbf{V}_2 = (5, 5)$ y $\mathbf{F}_2 = (\frac{22}{5}, \frac{21}{5})$ (figura 14). Entonces

$$\mathbf{F}_0 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = (2, 1);$$

$$c\mathbf{u} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_0 = (\tfrac{22}{5} - 2, \tfrac{21}{5} - 1) = (\tfrac{12}{5}, \tfrac{16}{5}) = 4(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5})$$

donde $c = 4$, $\mathbf{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$; y .

$$a = |\mathbf{V}_2 - \mathbf{F}_0| = |(5-2, 5-1)| = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$$

Finalmente $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. De donde

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= (x, y) = (2, 1) + x'(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}) + y'(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}) \\ &= (2 + \tfrac{1}{5}(3x' - 4y'), 1 + \tfrac{1}{5}(4x' + 3y'))\end{aligned}$$

o

$$\begin{cases} x = 2 + \tfrac{1}{5}(3x' - 4y') \\ y = 1 + \tfrac{1}{5}(4x' + 3y') . \end{cases}$$

Resolviendo para x', y', tenemos

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x+4y-10) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x+3y+5). \end{cases}$$

De donde

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{9} = \frac{(3x+4y-10)^2}{625} + \frac{(-4x+3y+5)^2}{225} = 1$$

o

$$481x^2 - 384xy + 369y^2 - 1540x + 30y - 4100 = 0.$$

Problemas

1. Identifíquense y dibújense las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

c) $\frac{(x-1)^2}{169} + \frac{(y+2)^2}{144} = 1$

d) $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

e) $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$
f) $4x^2 - 4x - 24y - 47 = 0$
g) $4x^2 + 12y^2 - 4x + 36y - 11 = 0$
h) $8x^2 + 9y^2 + 24x + 12y + 10 = 0$
i) $9x^2 + 9y^2 + 36x - 12y + 15 = 0$
j) $25x^2 + 12y^2 + 20x - 12y - 4 = 0.$

2. Encuéntrense las ecuaciones de las siguientes elipses y dibújense las elipses. Sobre la gráfica muéstrense el centro, los focos, los vértices, y los extremos del eje menor, dando sus coordenadas:

a) Con vértices en (1, 4) y (9, 4), y semieje menor igual a 2.
b) Con centro en (1, -4), vértice en (1, 1), pasando por (2, -1).
c) Con centro en (2, 0), un foco en (5, 0), y un vértice en (-3, 0).
d) Con focos en (-1, 2) y (1, 2) y un vértice en (2, 2).
e) Con vértices en (1, 4) y (9, 10), y semieje menor igual a 2.
f) Con centro en (2, 3), un foco en ($\frac{26}{5}$, $\frac{27}{5}$), un vértice en (6, 6).
g) Con focos en (-7, -10) y (3, 14) y un vértice en (4, $\frac{28}{5}$).
h) Con focos en (-7, -8) y (17, 2) y semieje menor igual a 5.

3. Encuéntrese una ecuación de cada uno de los siguientes conjuntos y dibújense:

a) Todos los puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ tales que la distancia de $\mathbf{P}$ a (1, 2) es dos tercios de la distancia de $\mathbf{P}$ a la recta $y = 7$.

b) Todos los puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ tales que la suma de las distancias de **P** a los puntos $(-3, 2)$ y $(-3, 6)$ es 6.

4. La cuerda de una elipse que pasa por un foco y es perpendicular al eje mayor se llama *lado recto* o *cuerda focal*.[1] Demuéstrese que la longitud del lado recto es $2b^2/a$.

5. Encuéntrese una ecuación del conjunto de todos los puntos cuya distancia al punto $(ae, 0)$ es e veces su distancia a la recta $x = a/e$. Demuéstrese que si $0 < e < 1$, el conjunto es una elipse. El número e se llama *excentricidad* de la elipse.

8. LA HIPÉRBOLA

8.1 Definición. *Una* ***hipérbola*** *es el conjunto de todos los puntos con la propiedad de que la diferencia de las distancias de los puntos del conjunto a dos puntos fijos dados es, en valor absoluto, una constante.*

Los puntos fijos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se llaman *focos*. Las intersecciones $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ del conjunto con la recta que pasa por los focos se llaman *vértices*, y el punto medio $\mathbf{F}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$ del segmento $[\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2]$ se llama *centro* de la hipérbola (figura 15).

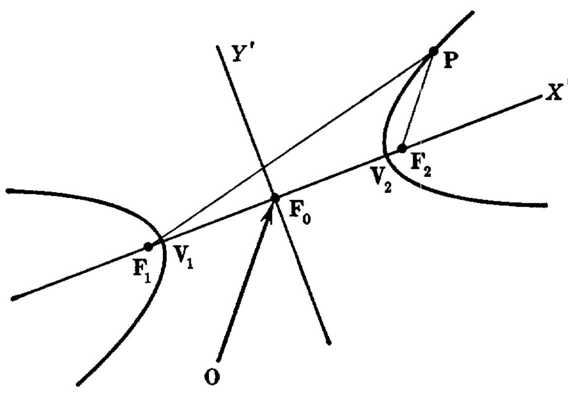


FIGURA 15

De nuevo, como hicimos en el caso de la elipse, hacemos

$$\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_0 = \tfrac{1}{2}(\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = c\mathbf{u}$$

donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$. Para cada punto **P** de R^2 hay números únicos x' y y' tales que $\mathbf{P} = \mathbf{F}_0 + x'\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^\perp$. El punto **P**

[1] El término "cuerda focal" suele emplearse en la literatura para designar a cualquier cuerda de la elipse que pase por un foco. [N. del T.]

está sobre la hipérbola si y sólo si

$$\big||\mathbf{P}-\mathbf{F}_1|-|\mathbf{P}-\mathbf{F}_2|\big| = 2a \quad (0 < a < c).$$

Ahora bien

$$\mathbf{P}-\mathbf{F}_1 = (x'+c)\,\mathbf{u}+y'\,\mathbf{u}^{\perp}$$

y

$$\mathbf{P}-\mathbf{F}_2 = (x'-c)\,\mathbf{u}+y'\,\mathbf{u}^{\perp}.$$

De donde **P** está sobre la hipérbola si y sólo si

$$\big||\mathbf{P}-\mathbf{F}_1|-|\mathbf{P}-\mathbf{F}_2|\big| = \left|\sqrt{(x'+c)^2+y'^2}-\sqrt{(x'-c)^2+y'^2}\right| = 2a.$$

Operaciones similares a las usadas para obtener la ecuación (7.2) para la elipse nos dan la ecuación

8.2
$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2-c^2} = 1.$$

Ésta es la misma ecuación que la ecuación (7.2) para la elipse, pero, en este caso, como $c > a > 0$, $a^2-c^2 < 0$. Para obtener una expresión más sencilla definimos el número positivo b por

$$a^2-c^2 = -b^2 \quad (b > 0)$$

y obtenemos

8.3
$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_0+x'\,\mathbf{u}+y'\,\mathbf{u}^{\perp} \text{ donde } \frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

La ecuación (8.3) es una ecuación de una hipérbola con centro en $\mathbf{F}_0$ y con eje paralelo al vector **u**.

Cada punto sobre la hipérbola es una solución de la ecuación (8.3). Recíprocamente, como ahora mostraremos, cada solución de la ecuación (8.3) se encuentra sobre la hipérbola. Según la ecuación (8.2), tenemos

$$y'^2 = (a^2-c^2)\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right)$$

De donde

$$|\mathbf{P}-\mathbf{F}_1| = |(x'+c)\,\mathbf{u}+y'\,\mathbf{u}^{\perp}| = \sqrt{(x'+c)^2+y'^2}$$

$$= \sqrt{(x'+c)^2+(a^2-c^2)\left(1-\frac{x'^2}{a^2}\right)}$$

$$= \left| a + \frac{x'c}{a} \right| = \begin{cases} a + \dfrac{x'c}{a} & \text{para } x' \geqslant a \\ -a - \dfrac{x'c}{a} & \text{para } x' \leqslant -a\,. \end{cases}$$

Además,

$$|\mathbf{P}-\mathbf{F}_2| = |(x'-c)\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp}|$$

$$= \left| a - \frac{x'c}{a} \right| = \begin{cases} \dfrac{x'c}{a} - a & \text{para } x' \geqslant a \\ a - \dfrac{x'c}{a} & \text{para } x' \leqslant -a\,. \end{cases}$$

Como $c > a$, si $x' \geqslant a$, entonces

$$|\mathbf{P}-\mathbf{F}_1|-|\mathbf{P}-\mathbf{F}_2| = a + \frac{x'c}{a} - \left(\frac{x'c}{a} - a\right) = 2a\,,$$

y si $x' \leqslant -a$, entonces

$$|\mathbf{P}-\mathbf{F}_2|-|\mathbf{P}-\mathbf{F}_1| = a - \frac{x'c}{a} - \left(-a - \frac{x'c}{a}\right) = 2a\,.$$

Así pues, en todos los casos $\big||\mathbf{P}-\mathbf{F}_1|-|\mathbf{P}-\mathbf{F}_2|\big| = 2a$, y $\mathbf{P}$ se encuentra sobre la hipérbola.

Basándonos en la ecuación (8.3) establecemos algunas de las propiedades de la hipérbola (figura 15). Los números x', y' son coordenadas de puntos respecto a los ejes X', Y' con origen en el centro de la hipérbola y la dirección del vector $\mathbf{u}$ como dirección positiva del eje X. De la ecuación

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

se deduce fácilmente que la gráfica es simétrica con respecto tanto al eje X' como al eje Y' y, por tanto, también con respecto al centro. Las X'-intercepciones son $\pm a$ de modo que los vértices son $\mathbf{V}_1 = \mathbf{F}_0 - a\mathbf{u}$ y $\mathbf{V}_2 = \mathbf{F}_0 + a\mathbf{u}$. El segmento $[\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2]$ de longitud $2a$ se llama *eje transversal*. El segmento $[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2]$ sobre el eje Y' de longitud $2b$ con punto medio en el centro de la hipérbola se llama *eje conjugado*. En el caso de la hipérbola estos ejes no se llaman mayor y menor ya que podemos tener igual $b \geqslant a$ que $b < a$.

Si $\mathbf{u} = (1, 0)$ entonces los focos están sobre una recta paralela al eje X. Para $\mathbf{P} = (x, y)$ y $\mathbf{F}_0 = (h, k)$, obtenemos

$$\mathbf{P}-\mathbf{F}_0 = (x-h, y-k) = x'(1, 0)+y'(0, 1) = (x', y')$$

donde $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$. De donde

8.4
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

es una ecuación de una hipérbola con centro $\mathbf{F}_0 = (h, k)$ y con los focos sobre una recta paralela al eje X (figura 16). En particular, si el centro

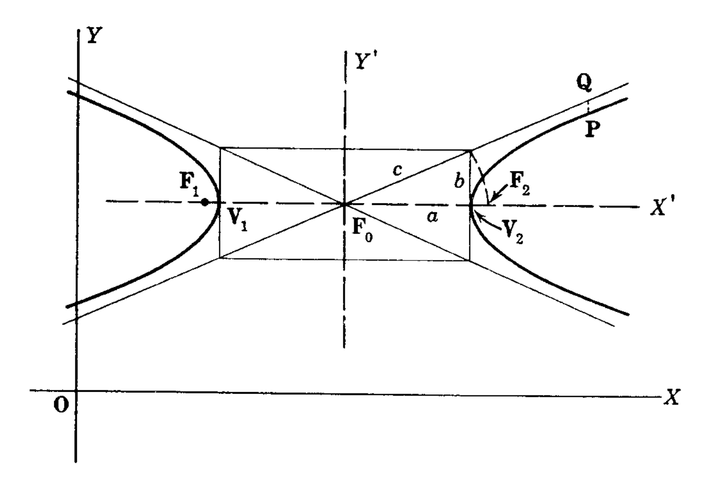


FIGURA 16

$\mathbf{F}_0 = (h, k)$ está en el origen, la ecuación (8.4) se hace

8.5
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Dada una ecuación de la forma (8.4), pueden fácilmente localizarse el centro $\mathbf{F}_0$, los vértices $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, y los extremos del eje conjugado $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$. Los focos pueden localizarse observando que (figura 16)

$$c = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Las rectas $y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$ se llaman *asíntotas* de la hipérbola cuya

ecuación es (8.4). Resolviendo (8.4) para $y-k$, tenemos

$$y-k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2-a^2}\,.$$

Si restringimos la discusión a la porción del plano donde $x-h > 0$ y $y-k > 0$, entonces

$$y-k = \frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2-a^2}\,.$$

Sea $\mathbf{P} = (x, y)$ un punto sobre la hipérbola donde $x-h > 0$, $y-k > 0$ y sea $\mathbf{Q} = (x, y_1)$ el punto sobre la recta $y-k = \frac{b}{a}(x-h)$ directamente sobre **P**. Entonces

$$|\mathbf{Q}-\mathbf{P}| = y_1-y = \frac{b}{a}\left[(x-h)-\sqrt{(x-h)^2-a^2}\right].$$

Multiplicando y dividiendo por $(x-h)+\sqrt{(x-h)^2-a^2}$, obtenemos

$$|\mathbf{Q}-\mathbf{P}| = \frac{ab}{x-h+\sqrt{(x-h)^2-a^2}}$$

y $|\mathbf{Q}-\mathbf{P}|$ puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando $x-h$ suficientemente grande. Por simetría, puede verse que la hipérbola se aproxima a las asíntotas en las otras porciones del plano en forma similar.

Para construir las asíntotas de la hipérbola (figura 16), sólo se necesita construir el rectángulo que tiene lados de longitud $2a$ y $2b$ paralelos a los ejes X y Y respectivamente, y con su centro en $\mathbf{F}_0$. Las asíntotas son las rectas

$$\mathcal{L}_1 = \{\mathbf{P} \mid \mathbf{P} = \mathbf{F}_0+t(a, b)\}$$

y

$$\mathcal{L}_2 = \{\mathbf{P} \mid \mathbf{P} = \mathbf{F}_0+t(a, -b)\}.$$

Éstas son las rectas que contienen a las diagonales del rectángulo que acabamos de mencionar. La longitud de media diagonal es la distancia del centro a un foco: $c = \sqrt{a^2+b^2}$.

Si $\mathbf{u} = (0, 1)$ en la ecuación (8.3) los focos están sobre una recta paralela al eje Y. Tomando $\mathbf{P} = (x, y)$ y $\mathbf{F}_0 = (h, k)$ como anteriormente, obtenemos

$$\mathbf{P}-\mathbf{F}_0 = (x-h, y-k) = x'(0, 1)+y'(-1, 0) = (-y', x')$$

donde $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$. De donde

8.6 $$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

es una ecuación de la hipérbola con centro $\mathbf{F}_0 = (h, k)$, focos

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_0 - c\mathbf{u} = (h, k-c) \text{ y } \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_0 + c\mathbf{u} = (h, k+c),$$

vértices $\mathbf{V}_1 = \mathbf{F}_0 - a\mathbf{u} = (h, k-a)$ y $\mathbf{V}_2 = \mathbf{F}_0 + a\mathbf{u} = (h, k+a)$, y extremos de los ejes conjugados

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{F}_0 - b\mathbf{u}^{\perp} = (h+b, k) \text{ y } \mathbf{B}_2 = \mathbf{F}_0 + b\mathbf{u}^{\perp} = (h-b, k).$$

Las asíntotas son las rectas $y-k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$. En particular, si el centro $\mathbf{F}_0 = (h, k)$ está en el origen, la ecuación (8.6) toma la forma

8.7 $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 .$$

Dos hipérbolas que tienen las mismas asíntotas y sus ejes transversos y conjugados intercambiados se llaman hipérbolas *conjugadas*. Así pues,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

son las ecuaciones de un par de hipérbolas conjugadas.

Problemas

1. Identifíquense y dibújense las gráficas de las siguientes ecuaciones, señalándose cuando proceda el centro, vértices, focos, y asíntotas:

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

c) $\frac{(y-2)^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1$

d) $\frac{(x-3)^2}{8} - \frac{(y-5)^2}{7} = 1$

e) $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

f) $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$

g) $9x^2 - 16y^2 + 144x + 32y + 79 = 0$

h) $4x^2 - 9y^2 + 4x + 18y - 44 = 0$

i) $16y^2 - 4x^2 + 4x + 48y - 1 = 0$

j) $3x + 5y + 2 = 0$

k) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 15y + 16 = 0$

l) $5x^2 - 4y^2 - 15x - 6y + 10 = 0.$

2. Encuéntrense las ecuaciones de las siguientes hipérbolas y dibújense sus gráficas. Señálense en las gráficas el centro, los focos, los vértices, y las asíntotas, dando sus coordenadas o ecuaciones.

a) Vértices en $(-4, 0)$ y $(4, 0)$ y semieje conjugado igual a 3.
b) Focos en $(0, 5)$ y $(0, -5)$ y un vértice en $(0, 3)$.
c) Centro en el origen, un vértice en $(0, 2)$, y semieje conjugado igual a 5.
d) Un foco en $(0, 13)$, un vértice en $(0, -5)$, y semieje conjugado igual a 12.
e) Vértices en $(5, 4)$ y $(-3, 4)$ y un foco en $(7, 4)$.
f) Vértices $(1, 4)$ y $(9, 4)$, semieje conjugado igual a 2.
g) Centro en $(1, -4)$, un vértice en $(1, 1)$, y un foco en $(1, \sqrt{29}-4)$.
h) Focos en $(-3, 0)$ y $(7, 0)$ y semieje conjugado igual a 3.

3. Encuéntrese cada una de las hipérbolas conjugadas a las del problema 2.

4. Encuéntrese una ecuación para cada uno de los siguientes conjuntos. Dibújese cada uno de ellos.

a) Todos los puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ tales que la distancia de $\mathbf{P}$ a $(1, 2)$ es igual a tres medios de la distancia de $\mathbf{P}$ a la recta $y = 7$.
b) Todos los puntos $\mathbf{P} = (x, y)$ tales que la diferencia de las distancias de $\mathbf{P}$ a los puntos $(-3, 2)$ y $(-3, 6)$ es ± 3.

5. La cuerda de una hipérbola que pasa por un foco y es perpendicular al eje transverso se llama *lado recto* o *cuerda focal*.[1] Demuéstrese que la longitud del lado recto de la hipérbola (8.4) es $2b^2/a$.

6. Demuéstrese que el conjunto de puntos del problema 5 de la sección 7 (pág. 243) es una hipérbola si $e > 1$.

7. *a*) Demuéstrese, mediante la aplicación de la rotación de coordenadas

$$(x, y) = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp}, \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

que $xy = c\ (c \neq 0)$ es la ecuación de una hipérbola.
b) Dibújese la gráfica de $xy = 4$.

9. REDUCCIÓN DE UNA FORMA CUADRÁTICA A LA FORMA DIAGONAL

La ecuación cuadrática más general en x y y puede escribirse así:

9.1 $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

[1] También en este caso es habitual que por "cuerda focal" se entienda una cuerda cualquiera que pase por un foco. [N. del T.]

donde A, B, y C no son todos cero. Deseamos demostrar que la gráfica de una ecuación cualquiera de tal tipo, si no es el conjunto nulo, es una sección cónica —elipse, parábola o hipérbola— o algún caso degenerado de una sección cónica. Antes de hacer esto, discutiremos el problema de la reducción de la forma cuadrática

9.2 $$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

a la forma diagonal

$$A'x'^2+C'y'^2$$

por medio de una rotación de coordenadas.

Consideremos la rotación de coordenadas

$$(x, y) = U(x', y') = x'\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} x &= x'u_1-y'u_2 \\ y &= x'u_2+y'u_1 \end{aligned}$$

y de aquí

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2 = A'x'^2+2B'x'y'+C'y'^2$$

donde

$$\begin{aligned} A' &= u_1{}^2A+2u_1u_2B+u_2{}^2C = \mathbf{u}\cdot(u_1A+u_2B,\ u_1B+u_2C), \\ B' &= u_1{}^2B+u_1u_2(C-A)-u_2{}^2B = \mathbf{u}^{\perp}\cdot(u_1A+u_2B,\ u_1B+u_2C), \\ C' &= u_1{}^2C-2u_1u_2B+u_2{}^2A = \mathbf{u}^{\perp}\cdot(-u_2A+u_1B,\ -u_2B+u_1C). \end{aligned}$$

Si definimos

$$L(x, y) = (xA+yB,\ xB+yC) = x(A, B)+y(B, C)$$

podemos expresar los coeficientes A', B', y C' en la forma

9.3 $$A' = \mathbf{u}\cdot L(\mathbf{u}), \quad B' = \mathbf{u}^{\perp}\cdot L(\mathbf{u}), \quad C' = \mathbf{u}^{\perp}\cdot L(\mathbf{u}^{\perp}).$$

De acuerdo con (9.3) vemos que $B' = 0$ si y sólo si $L(\mathbf{u})$ es paralela a $\mathbf{u}$, es decir, si y sólo si para algún número real λ,

9.4 $$L(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}.$$

9.5 Ejemplo. Por medio de una rotación de coordenadas, redúzcase

$$7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2$$

a la forma diagonal.

SOLUCIÓN. Tenemos $(A, B) = (7, \sqrt{3})$ y $(B, C) = (\sqrt{3}, 5)$. De donde

$$L(\mathbf{u}) = u_1(7, \sqrt{3})+u_2(\sqrt{3}, 5).$$

Deseamos encontrar una **u** tal que para algún número real λ, **u** satisfaga (9.4). Es decir,

$$(7u_1+\sqrt{3}u_2,\ \sqrt{3}u_1+5u_2) = (\lambda u_1,\ \lambda u_2)$$

o

9.6
$$\begin{cases} (7-\lambda)u_1 + \sqrt{3}u_2 = 0 \\ \sqrt{3}u_1 + (5-\lambda)u_2 = 0. \end{cases}$$

Este par de ecuaciones homogéneas tiene una solución no trivial si y sólo si

$$(7-\lambda)(5-\lambda)-\sqrt{3}\sqrt{3} = 0,$$

$$\lambda^2-12\lambda+32 = 0,$$

o

$$(\lambda-8)(\lambda-4) = 0.$$

Tomando $\lambda = 8$, la primera de las ecuaciones (9.6) se hace

$$(7-8)u_1+\sqrt{3}u_2 = (-1,\sqrt{3})\cdot\mathbf{u} = 0.$$

Una solución de esta ecuación es

$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}, 1).$$

Es fácil verificar que ésta es también una solución de la segunda de las ecuaciones (9.6) con $\lambda = 8$.

La rotación de coordenadas buscada es, entonces,

$$(x, y) = x'\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}x'-y',\ x'+\sqrt{3}y').$$

Tenemos

$$L(\mathbf{u}) = u_1(A, B)+u_2(B, C) = \frac{\sqrt{3}}{2}(7, \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 5)$$

$$= (4\sqrt{3}, 4)$$

y

$$L(\mathbf{u}^{\perp}) = (-2, 2\sqrt{3}).$$

De donde, de acuerdo con (9.3), tenemos

$$A' = \mathbf{u}\cdot L(\mathbf{u}) = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)\cdot(4\sqrt{3}, 4) = 2(3+1) = 8,$$

$$B' = \mathbf{u}^{\perp}\cdot L(\mathbf{u}) = \tfrac{1}{2}(-1, \sqrt{3})\cdot(4\sqrt{3}, 4) = 0,$$

$$C' = \mathbf{u}^{\perp}\cdot L(\mathbf{u}^{\perp}) = \tfrac{1}{2}(-1, \sqrt{3})\cdot(-2, 2\sqrt{3}) = 4.$$

La reducción a la forma diagonal es

$$7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2 = 8x'^2+4y'^2.$$

Si hubiésemos tomado $\lambda = 4$, habríamos obtenido $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$. Ésta es la $\mathbf{u}^{\perp}$ de la discusión previa. La correspondiente forma diagonal es $4x'^2 + 8y'^2$.

Volviendo al problema general, vemos que la ecuación (9.4) es equivalente a

$$L(\mathbf{u}) = u_1(A, B) + u_2(B, C) = \lambda(u_1, u_2)$$

o

9.7 $$u_1(A-\lambda, B) + u_2(B, C-\lambda) = 0.$$

La ecuación vectorial (9.7) es equivalente al par de ecuaciones

9.8 $$\begin{cases} u_1(A-\lambda) + u_2 B = \mathbf{u}\cdot(A-\lambda, B) = 0 \\ u_1 B + u_2(C-\lambda) = \mathbf{u}\cdot(B, C-\lambda) = 0. \end{cases}$$

La ecuación (9.7) [o las ecuaciones (9.8)] tiene soluciones no triviales si y sólo si u es ortogonal tanto a $(A-\lambda, B)$ como a $(B, C-\lambda)$, es decir, si y sólo si $(A-\lambda, B)$ y $(B, C-\lambda)$ son paralelos (linealmente dependientes). Estos dos vectores son paralelos si y sólo si

9.9 $$\begin{aligned}(A-\lambda, B)^{\perp}\cdot(B, C-\lambda) &= -B^2 + (A-\lambda)(C-\lambda) \\ &= \lambda^2 - (A+C)\lambda - (B^2 - AC) = 0.\end{aligned}$$

Pero

9.10 $$\lambda^2 - (A+C)\lambda - (B^2 - AC) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

donde

9.11 $$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{A+C-\sqrt{(A+C)^2 + 4(B^2 - AC)}}{2} \\ \quad = \dfrac{A+C-\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{A+C+\sqrt{(A+C)^2 + 4(B^2 - AC)}}{2} \\ \quad = \dfrac{A+C+\sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2} \end{cases}$$

Como $(A-C)^2 + 4B^2 \geqslant 0$, las raíces λ_1, λ_2 de la ecuación (9.9) son números reales. La ecuación (9.9) se llama *ecuación característica* de la forma cuadrática, y sus raíces λ_1, λ_2 se llaman *raíces características* de la forma cuadrática. La ecuación (9.4) tiene soluciones no triviales si y sólo si

$\lambda = \lambda_1$ o $\lambda = \lambda_2$. Tomando $\lambda = \lambda_1$, vemos, según (9.8), que si elegimos el vector unitario $\mathbf{u}$ ortogonal a $(A-\lambda_1, B)$ (o $(B, C-\lambda_1)$), entonces $\mathbf{u}$ es una solución de (9.4):

$$L(\mathbf{u}) = \lambda_1 \mathbf{u}.$$

Entonces

$$A' = \mathbf{u}\cdot L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot(\lambda_1 \mathbf{u}) = \lambda_1$$

y

$$B' = \mathbf{u}^{\perp}\cdot L(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^{\perp}\cdot(\lambda_1 \mathbf{u}) = 0.$$

Queremos mostrar que

$$C' = \lambda_2.$$

De la ecuación (9.10) se deduce que

9.12 $$\lambda_1+\lambda_2 = A+C$$

y

9.13 $$-\lambda_1\lambda_2 = B^2-AC.$$

De donde

$$\lambda_2-A = C-\lambda_1$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{\perp}\cdot(A-\lambda_2, B) &= -\mathbf{u}\cdot(A-\lambda_2, B)^{\perp} = \mathbf{u}\cdot(B, \lambda_2-A)\\ &= \mathbf{u}\cdot(B, C-\lambda_1).\end{aligned}$$

Por tanto, si $\mathbf{u}$ es una solución de las ecuaciones (9.8) con $\lambda = \lambda_1$, de ello se sigue que $\mathbf{u}^{\perp}$ es una solución de la primera de las ecuaciones (9.8) con $\lambda = \lambda_2$, y como $(A-\lambda_2, B)$ y $(B, C-\lambda_2)$ son paralelas, $\mathbf{u}^{\perp}$ es también una solución de la segunda de las ecuaciones (9.8) con $\lambda = \lambda_2$. Es decir, $\mathbf{u}^{\perp}$ es una solución de la ecuación (9.4) con $\lambda = \lambda_2$:

$$L(\mathbf{u}^{\perp}) = \lambda_2 \mathbf{u}^{\perp}$$

y

$$C' = \mathbf{u}^{\perp}\cdot L(\mathbf{u}^{\perp}) = \mathbf{u}^{\perp}\cdot(\lambda_2 \mathbf{u}^{\perp}) = \lambda_2.$$

Hemos, con esto, establecido el siguiente teorema:

9.14 Teorema. *Toda forma cuadrática*

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2$$

puede reducirse mediante una rotación de coordenadas

$$(x, y) = U(x', y') = x'\mathbf{u}+y'\mathbf{u}^{\perp}$$

a una forma diagonal

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2$$

donde λ_1, λ_2 *son las raíces de la ecuación*

$$\lambda^2-(A+C)\lambda-(B^2-AC) = 0$$

y **u** *es un vector unitario ortogonal a* $(A-\lambda_1, B)$.

9.15 Ejemplo. Por medio de una rotación de coordenadas, redúzcase

$$5x^2+24xy-5y^2$$

a forma diagonal.

SOLUCIÓN. $A = 5$, $B = 12$, $C = -5$. La ecuación característica es

$$\lambda^2-(A+C)\lambda-(B^2-AC) = \lambda^2-(144+25) = \lambda^2-169 = 0.$$

De donde $\lambda = \pm 13$. Sea $\lambda_1 = 13$ y $\lambda_2 = -13$. Entonces

$$(A-\lambda_1, B) = (5-13, 12) = (-8, 12) = -4(2, -3).$$

Un vector unitario ortogonal a $(2, -3)$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3, 2).$$

Por tanto,

$$(x, y) = U(x', y') = \frac{x'}{\sqrt{13}}(3, 2) + \frac{y'}{\sqrt{13}}(-2, 3)$$

reduce la forma cuadrática a

$$13x'^2-13y'^2.$$

Problemas

1. Por medio de una rotación de coordenadas redúzcase cada una de las siguientes formas cuadráticas a forma diagonal.

a) $23x^2+4\sqrt{5}xy+22y^2$ *b*) $3x^2-2\sqrt{3}xy+5y^2$
c) $34x^2-24xy+41y^2$ *d*) $7x^2+48xy-7y^2$
e) $98x^2+72xy+77y^2$ *f*) $2x^2+12xy-7y^2$
g) $4x^2+4xy+y^2$ *h*) $2\sqrt{6}xy-y^2$
i) $313x^2-120xy+194y^2$ *j*) $x^2-4xy+4y^2$.

10. LA ECUACIÓN CUADRÁTICA GENERAL

Volvemos ahora a una discusión de la ecuación cuadrática más general

10.1 $$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F = 0$$

donde A, B, y C no son todos cero. Sabemos que la rotación de coordenadas

$$(x, y) = U(x', y') = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp}$$

reduce la ecuación (10.1) a

10.2 $$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

donde λ_1, λ_2 son las raíces características de la forma cuadrática $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$; es decir, λ_1, λ_2 son raíces de la ecuación característica

10.3 $$\lambda^2 - (A+C)\lambda - (B^2 - AC) = 0,$$

y $\mathbf{u}$ es un vector unitario ortogonal a $(A - \lambda_1, B)$. Los coeficientes D', E', y F' vienen dados por las relaciones

10.4 $$\begin{cases} D' = u_1 D + u_2 E = \mathbf{u}\cdot(D, E) \\ E' = -u_2 D + u_1 E = \mathbf{u}^{\perp}\cdot(D, E) \\ F' = F. \end{cases}$$

Hay tres casos a considerar: 1) λ_1, λ_2 tienen el mismo signo, 2) una de las raíces es cero, y 3) λ_1, λ_2 tienen signos opuestos. Como $\lambda_1\lambda_2 = -(B^2 - AC)$, estos tres casos se corresponden con (1) $B^2 - AC < 0$, (2) $B^2 - AC = 0$, y (3) $B^2 - AC > 0$.

Caso 1. $B^2 - AC < 0$. En este caso λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo. Como $\lambda_1 + \lambda_2 = A + C$ y podemos suponer que $A + C > 0$ (si $A + C < 0$ se multiplica la ecuación (10.1) por -1), podemos suponer que las raíces λ_1, λ_2 son positivas. Sea λ_1 la menor de las dos raíces. Entonces, completando los cuadrados en la ecuación (10.2), tenemos

10.5 $$\lambda_1\left(x' + \frac{D'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{E'}{\lambda_2}\right)^2 = \frac{D'^2}{\lambda_1} + \frac{E'^2}{\lambda_2} - F.$$

1*a*) Si $\dfrac{D'^2}{\lambda_1} + \dfrac{E'^2}{\lambda_2} - F > 0$, entonces, la ecuación (10.5) es la ecuación de una elipse con centro en $\left(-\dfrac{D'}{\lambda_1}, -\dfrac{E'}{\lambda_2}\right)$ y eje mayor paralelo a $\mathbf{u}$; es decir, el eje mayor está sobre el eje X. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces la elipse es una circunferencia con focos coincidentes con el centro.

1*b*) Si $\dfrac{D'^2}{\lambda_1} + \dfrac{E'^2}{\lambda_2} - F = 0$, entonces la gráfica de la ecuación (10.5) consiste en un solo punto, el $\left(-\dfrac{D'}{\lambda_1}, -\dfrac{E'}{\lambda_2}\right)$.

1*c*) Si $\dfrac{D'^2}{\lambda_1} + \dfrac{E'^2}{\lambda_2} - F < 0$, entonces como los términos del primer

miembro de la ecuación (10.5) son no negativos para todo $(x, y) \in R^2$, no puede haber soluciones de la ecuación (10.5) y la gráfica es el conjunto nulo.

(1*b*) y (1*c*) se consideran casos degenerados de la elipse.

Caso 2. $B^2 - AC = 0$. En este caso una de las raíces características, que convenimos sea la λ_1, es cero.

2*a*) Si $A = B = 0$ y $D \neq 0$, completando el cuadrado en la ecuación (10.1), tenemos

$$C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = -2Dx + \frac{E^2}{C} - F.$$

Ésta es la ecuación de una parábola con vértice en $\left(\frac{E^2}{2DC} - \frac{F}{2D}, -\frac{E}{C}\right)$. Nótese que aquí y en (2*b*), a continuación, $C \neq 0$, ya que en una ecuación cuadrática A, B, C no son todos cero.

2*b*) Si $A = B = D = 0$, tenemos

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{E^2}{C^2} - \frac{F}{C},$$

que es la ecuación de un par de rectas horizontales si $\frac{E^2}{C^2} - \frac{F}{C} > 0$, la ecuación de una sola recta vertical si $\frac{E^2}{C^2} - \frac{F}{C} = 0$, y un conjunto vacío si $\frac{E^2}{C^2} - \frac{F}{C} < 0$. Todos éstos deben considerarse casos degenerados de la parábola.

2*c*) Si $(A, B) \neq \mathbf{0}$, la rotación de coordenadas

$$(x, y) = U(x', y') = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp},$$

donde $\mathbf{u}$ es un vector unitario ortogonal a (A, B), reduce la ecuación (10.1) a

$$\lambda_2 y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

que ahora cae bajo el caso (2*a*) o (2*b*) y es la ecuación de una parábola con eje paralelo a $\mathbf{u}$ o un caso degenerado de la parábola. El eje de la parábola es el eje X' y la directriz es paralela a (A, B).

Caso 3. $B^2 - AC > 0$. En este caso λ_1 y λ_2 tienen signos opuestos. Sea λ_1 positivo. De nuevo, como con la elipse, completando los cuadrados en la ecuación (10.2) tenemos

10.6 $$\lambda_1\left(x' + \frac{D'}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{E'}{\lambda_2}\right)^2 = \frac{D'^2}{\lambda_1} + \frac{E'^2}{\lambda_2} - F.$$

3*a*) Si $\frac{D'^2}{\lambda_1} + \frac{E'^2}{\lambda_2} - F > 0$, (10.6) es la ecuación de una hipérbola con centro en $\left(-\frac{D'}{\lambda_1}, -\frac{E'}{\lambda_2}\right)$ y eje transversal paralelo a **u**.

3*b*) Si $\frac{D'^2}{\lambda_1} + \frac{E'^2}{\lambda_2} - F < 0$, (10.6) es la ecuación de una hipérbola con centro en $\left(-\frac{D'}{\lambda_1}, -\frac{E'}{\lambda_2}\right)$ y eje conjugado paralelo a **u**.

3*c*) Si $\frac{D'^2}{\lambda_1} + \frac{E'^2}{\lambda_2} - F = 0$, (10.6) es la ecuación de un par de rectas que se intersectan en $\left(-\frac{D'}{\lambda_1}, -\frac{E'}{\lambda_2}\right)$. Estas rectas son las asíntotas de las hipérbolas de (3*a*) y (3*b*). Este caso está considerado como un caso degenerado de la hipérbola.

En lo que sigue, cuando hablamos de una elipse, parábola o hipérbola, queremos decir una elipse, parábola o hipérbola o uno de los casos degenerados de elipse, parábola o hipérbola, respectivamente.

Podemos ahora resumir los resultados obtenidos para la ecuación cuadrática general.

10.7 Teorema. *La ecuación cuadrática*

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F = 0$$

es la ecuación de una elipse si $B^2-AC < 0$, *una parábola si* $B^2-AC = 0$, *y una hipérbola si* $B^2-AC > 0$.

10.8 Ejemplo. Determínese la naturaleza de las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2+4xy+5y^2+2x-y-4 = 0$
b) $2x^2+9xy+5y^2+2x-y-4 = 0$
c) $2x^2+8xy+8y^2+2x-y-4 = 0$.

SOLUCIÓN. *a*) $B^2-AC = 2^2-(2)(5) = -6 < 0$ y la gráfica es una elipse o un caso degenerado de una elipse.

b) $B^2-AC = (\frac{9}{2})^2-(2)(5) = \frac{41}{4} > 0$ y la gráfica es una hipérbola o un caso degenerado de una hipérbola.

c) $B^2-AC = 4^2-(2)(8) = 0$ y la gráfica es una parábola o un caso degenerado de una parábola.

10.9 Ejemplo. Dibújese la gráfica de la primera ecuación del ejemplo 10.8.

SOLUCIÓN. $2x^2+4xy+5y^2+2x-y-4 = 0$ y $A = 2$, $B = 2$, $C = 5$. La ecuación característica es

$$\lambda^2-(2+5)\lambda-(4-10) = \lambda^2-7\lambda+6 = 0.$$

Las raíces características son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ y, por tanto,

$$(A - \lambda_1, B) = (2-1, 2) = (1, 2).$$

Podemos tomar

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$$

y

$$(x, y) = U(x', y') = x'\mathbf{u} + y'\mathbf{u}^{\perp} = \frac{x'}{\sqrt{5}}(-2, 1) + \frac{y'}{\sqrt{5}}(-1, -2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x' - y', x' - 2y').$$

La ecuación transformada es

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F = 0$$

donde

$$D' = \mathbf{u} \cdot (D, E) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1) \cdot \left(1, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$E' = \mathbf{u}^{\perp} \cdot (D, E) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -2) \cdot \left(1, -\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Es decir

$$x'^2 + 6y'^2 - \sqrt{5}x' - 4 = 0.$$

Completando los cuadrados, obtenemos

$$\frac{\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\frac{21}{4}} + \frac{y'^2}{\frac{21}{24}} = 1.$$

La gráfica se muestra en la figura 17.

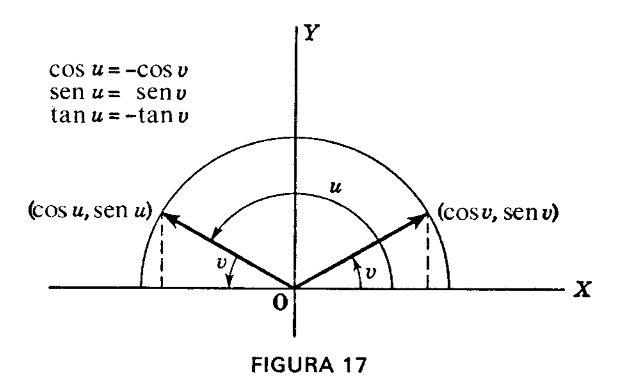


FIGURA 17

Problemas

1. Determínese la naturaleza de la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2x^2+4xy+5y^2+4x+16y+2 = 0$
b) $8x^2+8xy-7y^2+36y+36 = 0$
c) $4x^2+4y^2-8x-16y-5 = 0$
d) $3x^2+2xy+2y^2+10x = 0$
e) $2x^2-3xy-2y^2+3x+y = 0$
f) $x^2+2xy+y^2-4x+y-2 = 0$
g) $75x^2-70xy+51y^2+180x-188y-464 = 0$
h) $x^2-2xy+y^2-8x-8y = 0.$

2. Dibújense las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a) $8x^2-12xy+17y^2-20 = 0$
b) $2x^2-3xy-2y^2-10 = 0$
c) $8x^2-3xy+4y^2-10 = 0$
d) $5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-3 = 0$
e) $x^2-10\sqrt{3}xy+11y^2+16 = 0$
f) $3x^2-10xy+3y^2-32 = 0$
g) $x^2+2xy+y^2-4x+y-2 = 0$
h) $x^2-2xy+y^2-8x-8y = 0.$

11. PROPIEDAD COMÚN DE LAS SECCIONES CÓNICAS

En esta sección demostramos que las cónicas —elipse, parábola e hipérbola— comparten la propiedad común de ser el conjunto de todos los puntos tales que la distancia a un punto fijo, un foco, es igual a un número constante de veces la distancia a una recta fija, una directriz. Esta constante se llama *excentricidad* y se denota por e. Hemos usado ya esto como

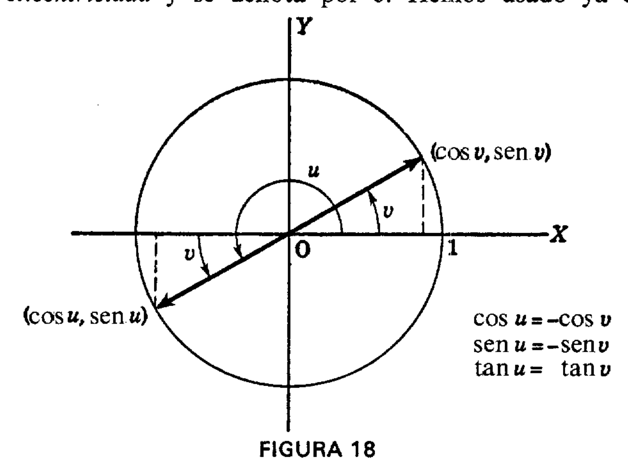


FIGURA 18

propiedad definitoria de la parábola donde la excentricidad es 1 (definición 6.1, pág. 232).

Escojamos como directriz la recta $x = -d$ y como foco el origen (figura 18). Deseamos considerar el conjunto de todos los puntos **P** tales que

11.1 $$|\mathbf{P}-\mathbf{O}| = e|\mathbf{P}-\mathbf{Q}| \quad (e > 0)$$

donde **Q** es la proyección ortogonal de **P** sobre la directriz $x = -d$. La ecuación (11.1) es equivalente a

$$(x^2+y^2)^{1/2} = e|x+d| \quad (e > 0).$$

Elevando al cuadrado esta ecuación, obtenemos

11.2 $$x^2+y^2 = e^2(x+d)^2 \quad (e > 0).$$

La ecuación (11.2) es una ecuación cuadrática con discriminante $B^2-AC = 0-(1-e^2)(1) = e^2-1$. El teorema 10.7 nos dice que una ecuación cuadrática es la ecuación de una elipse, parábola o hipérbola según el discriminante sea negativo, cero o positivo, respectivamente. De donde tenemos:

Si $0 < e < 1$, la gráfica de la ecuación (11.2) es una elipse.
Si $e = 1$, la gráfica de la ecuación (11.2) es una parábola.
Si $e > 1$, la gráfica de la ecuación (11.2) es una hipérbola.
Si $e \neq 1$ en la ecuación (11.2) y completando el cuadrado, obtenemos

$$(1-e^2)\left(x - \frac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{e^2 d^2}{1-e^2}$$

o

11.3 $$\frac{\left(x - \dfrac{e^2 d}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{e^2 d^2}{1-e^2}} = 1\,.$$

La ecuación (11.3) es la ecuación de una elipse o una hipérbola con centro en $\left(\dfrac{e^2 d}{1-e^2}, 0\right)$. Tenemos

$$a = \frac{ed}{|1-e^2|}, \quad b = \frac{ed}{|1-e^2|^{1/2}}, \quad c = \frac{e^2 d}{|1-e^2|} = ae\,.$$

Como la elipse y la hipérbola son simétricas respecto al centro, en estos dos casos hay dos directrices y dos focos. El segundo foco está en

$\left(\frac{2e^2 d}{1-e^2}, 0\right)$ y la segunda directriz es la recta

$$x = \frac{2e^2 d}{1-e^2} + d = d\frac{1+e^2}{1-e^2}.$$

12. RESUMEN

En el capítulo 3 vimos cómo las funciones reales de variable real representan analíticamente conjuntos de puntos en R^2. En este capítulo consideramos otras representaciones analíticas de conjuntos en R^2. En particular, hemos considerado la representación de conjuntos en R^2 por medio de dos funciones reales de variable real. El conjunto

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x = f(t),\ y = g(t),\ t \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\}$$

se dice que está especificado paramétricamente por las funciones f y g. Las ecuaciones

$$x = f(t)$$
$$y = g(t)$$

se llaman ecuaciones paramétricas de $\mathcal{E}$, y $\mathcal{E}$ se dice que es la gráfica de estas ecuaciones paramétricas. Un segundo método de representación analítica de conjuntos en R^2 que consideramos fue por medio de ecuaciones $f(x, y) = c$ donde f es una función con dominio en R^2 y rango en R, y c está en el rango de f. Una tal ecuación determina un conjunto $\mathcal{E} = \{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$. La ecuación $f(x, y) = c$ se dice que es una ecuación de $\mathcal{E}$, y a $\mathcal{E}$ se le llama la gráfica de la ecuación.

Acto seguido investigamos algunas propiedades de la gráfica de una ecuación que podían ser determinadas por consideraciones sobre la ecuación misma —intercepciones, simetría, y extensión. Las propiedades de simetría y extensión pueden considerarse como propiedades "globales" de la gráfica. Es decir, no son propiedades que dependan del comportamiento de la función cerca de un punto en particular —propiedades "puntuales" de la gráfica. Más adelante, comenzando en el capítulo 8, cuando introduzcamos el estudio del cálculo, podremos investigar algunas propiedades "puntuales" de la gráfica de una función real de variable real.

Discutidas estas propiedades generales de las gráficas de las ecuaciones pasamos a considerar las ecuaciones cuadráticas y sus gráficas —circunferencia, parábola, elipse, e hipérbola. Se mostró que toda sección cónica es la gráfica de una ecuación cuadrática y que, recíprocamente, la gráfica de toda ecuación cuadrática es una sección cónica degenerada o no.

Tabularemos ahora algunos de los resultados que obtuvimos en nuestra consideración de las secciones cónicas.

Parábola

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad (x-h)^2 = 4p(y-k)$$
$$\mathbf{u} = (1, 0) \qquad \mathbf{u} = (0, 1)$$

Vértice. $\mathbf{V} = (h, k)$

Foco. $\mathbf{F} = \mathbf{V} + p\mathbf{u}$

Directriz. $x-h = -p \qquad y-k = -p$

Elipse

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathbf{u} = (1, 0) \qquad \mathbf{u} = (0, 1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$(a > b)$$

Centro. $\mathbf{F}_0 = (h, k)$

Vértices. $\mathbf{V}_1 = \mathbf{F}_0 - a\mathbf{u}$
$\mathbf{V}_2 = \mathbf{F}_0 + a\mathbf{u}$

Focos. $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_0 - c\mathbf{u}$
$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_0 + c\mathbf{u}$

Extremos del eje menor. $\mathbf{B}_1 = \mathbf{F}_0 - b\mathbf{u}^{\perp}$
$\mathbf{B}_2 = \mathbf{F}_0 + b\mathbf{u}^{\perp}$

Hipérbola

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathbf{u} = (1, 0) \qquad \mathbf{u} = (0, 1)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Centro, vértices, focos y extremos del eje conjugado, $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ vienen dados como sus análogos en la elipse.

Problemas de repaso

1. Dibújense las gráficas de los conjuntos definidos por

a) $\{(t, 5t^2) \mid t \in R\}$

b) $\{(3t+1, t^2) \mid t \in R\}$

c) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 5t+1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t-3. \end{cases}$

2. Discútanse las siguientes ecuaciones en lo referente a intercepciones, extensión y simetría, y dibújense sus gráficas.

a) $9x^2+4y^2 = 36$

b) $xy = 5$

c) $x^2-y^2 = 1$

d) $x^2+y^2 = 1.$

3. Identifíquense y dibújense las gráficas de las siguientes ecuaciones dando: pendiente, intercepciones, centro, radio, longitud de los semiejes, vértices, focos, directriz y asíntotas, cuando existan

a) $\dfrac{(x+3)^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$

b) $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$

c) $5(x-2)^2+5(y+3)^2 = 7$

d) $x^2+y^2-6x+10y-2 = 0$

e) $x^2+2y^2+2x+3y-15 = 0$

f) $5x^2-4y^2 = 20x+24y+36$

g) $x^2+2y+3 = 0$

h) $x+2y+3 = 0$

i) $3x+2y+5 = 0$

j) $x^2-3y^2+6x+6 = 0$

k) $3x^2-5y^2+12x+10y+5 = 0$

l) $3x-2y-6 = 0$

m) $3x^2-2y-6x = 0$

n) $2x^2+y^2+8x+4y = 0$

o) $x+3y+5 = 0$

p) $8y^2+y+2x = 1.$

4. Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en (1, 1) y foco en (2, 1).

5. Encontrar la ecuación de la elipse con centro en (6, 1), vértice en (1, 1) y foco en (2, 1).

6. Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en $(-3, 1)$, vértice en (1, 1) y foco en (2, 1).

7. Encontrar la ecuación de la elipse con vértices en (2, 0) y (2, 6) y un foco en (2, 5).

8. Encontrar la ecuación de la hipérbola con focos en (2, 0) y $(2, -6)$ y un vértice en $(2, -1)$.

9. Determinar la naturaleza de la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2+6xy+9y^2-2x+3y = 0$

b) $9x^2-10xy+5y^2+3x+5 = 0$

c) $11x^2-24xy+4y^2+6x+8y-10 = 0$

d) $x^2+3xy+5y^2-44 = 0$
e) $x^2+4xy+4y^2+12x-6y = 0$
f) $2x+y = xy$.

10. Dibújense las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a) $9x^2-24xy+16y^2-86x-52y+41 = 0$
b) $5x^2+6xy+5y^2+22x-6y+21 = 0$
c) $x+2y = xy$
d) $4xy-3y^2 = 8$.

Capítulo

sen $\frac{8\pi}{7}$ 6

Trigonometría analítica

1. INTRODUCCIÓN

La palabra "trigonometría" se deriva de la palabra griega que, literalmente, significa "medida del triángulo". En este sentido la trigonometría suele llamarse trigonometría geométrica. En la trigonometría geométrica nos ocupamos primordialmente de problemas geométricos del tipo que suele presentarse en astronomía, topografía, navegación y en la composición y resolución de fuerzas. En contraste con la trigonometría geométrica, en la trigonometría analítica el énfasis suele ponerse en el estudio de las propiedades de las funciones trigonométricas como funciones reales de una variable real.

Las funciones trigonométricas (o sus equivalentes) eran conocidas de los astrónomos de la antigüedad, y los antiguos hindúes y griegos com-

putaron tablas de estas funciones. Una tabla de quince cifras de senos para cada 10 segundos de arco aparece en fecha tan temprana como es el siglo XVI. Pero no es sino hasta fechas más recientes que la aplicación de estas funciones sobrepasa su marco histórico en la medición de los triángulos. Hoy en día estas funciones son de gran importancia en matemáticas y en toda rama de la ciencia. Son particularmente útiles en la representación de fenómenos cíclicos o periódicos —ondas, vibraciones, oscilaciones, etc.

A estas alturas, en nuestro estudio del análisis, es difícil dar definiciones analíticas de las funciones trigonométricas que sean completamente satisfactorias y, por nuestra parte, no intentaremos hacerlo. El punto de vista en este capítulo es que nuestras ideas intuitivas respecto al círculo y a las rotaciones nos conducen a esperar la existencia de funciones especiales —llamadas funciones seno y coseno— y a esperar que estas funciones tengan ciertas propiedades especiales. Posteriormente, una vez que nuestros conocimientos de análisis hayan avanzado, no será difícil demostrar que tales funciones sí existen y que tienen estas propiedades.

2. LONGITUD DE ARCOS DE CIRCUNFERENCIA

> "Fundió, también, un gran recipiente circular de diez codos de borde a borde, cinco codos de alto, y con un perímetro de treinta codos." III Reyes: 7, 23-24.

El propósito de esta sección es indicar —y en su mayor parte nuestra indicación será geométrica— cómo puede definirse la longitud de un arco circular. Más adelante podremos tratar el tema de la longitud de un arco en forma más completa y cuando este tiempo llegue, consideraremos el problema de la longitud de un arco no solamente para circunferencias sino para una clase de curvas muy general.

La idea intuitiva detrás de la definición de longitud para curvas, es que una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos y que podemos aproximarnos a la longitud de una curva por la suma de las longitudes de cuerdas que unen una sucesión de puntos de la curva. Si una recta ha de ser la distancia más corta entre dos puntos, la suma de las longitudes de las cuerdas no puede ser mayor que la longitud de la curva. En otras palabras, la longitud de la curva debe ser un número que es mayor que o igual a las aproximaciones obtenidas por la adición de las longitudes de las cuerdas y que queda definido por el mínimo número con esta propiedad. (Después de que hayamos estudiado el axioma del supremo, podremos decir que la longitud de la curva es el supremo de todas estas aproximaciones poligonales.) Las ideas detrás de esta definición de longitud de una curva pueden seguirse hasta al menos 2 300 años atrás, hasta el matemático y astrónomo griego Eudoxio (408-355 A.C.). Su enfoque definitorio se llama a menudo el "método de exhaustación" y fue usado por Arquímedes

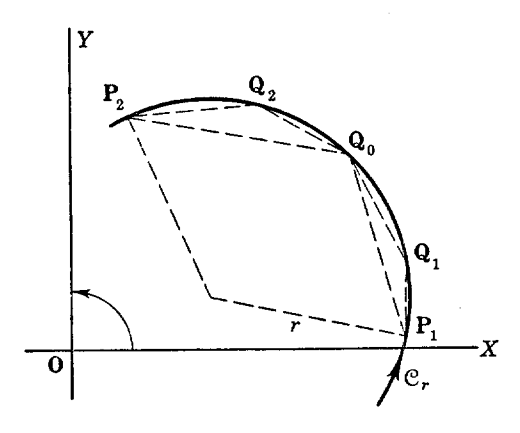


FIGURA 1

(250 A.C.) para demostrar que la longitud de una circunferencia es menor que $\frac{22}{7}$ y mayor que $\frac{223}{71}$ veces su diámetro.[1] (Esto es equivalente a decir que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$, lo que en el tiempo de Arquímedes y por muchas centurias después fue suficiente aproximación para todos los propósitos prácticos.)

Sea $\mathcal{C}_r$ una circunferencia de radio r y sean $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ puntos sobre $\mathcal{C}_r$ (figura 1). El arco de circunferencia levógiro sobre $\mathcal{C}_r$ de $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$ se denota por $\widehat{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$, y la longitud del arco $\widehat{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$ se denota por $|\widehat{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}|$ —la cantidad $|\widehat{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}|$ es, desde luego, el número que deseamos definir. Seleccionemos un punto $\mathbf{Q}_0 \in \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, y construyamos la poligonal inscrita $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_0\mathbf{P}_2$. Esta poligonal tiene longitud

$$s_1 = |\mathbf{Q}_0 - \mathbf{P}_1| + |\mathbf{P}_2 - \mathbf{Q}_0|.$$

Físicamente s_1 podría obtenerse usando una regla métrica para medir las longitudes de las cuerdas $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_0$ y $\mathbf{Q}_0\mathbf{P}_2$ y puede considerarse como una primera aproximación a la longitud del arco. El arco $\widehat{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$ puede seguirse subdividiendo seleccionando un punto $\mathbf{Q}_1 \in \widehat{\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_0}$ y un punto $\mathbf{Q}_2 \in \widehat{\mathbf{Q}_0\mathbf{P}_2}$. La línea poligonal $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_0\mathbf{Q}_2\mathbf{P}_2$ tiene longitud

$$s_2 = |\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_1| + |\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}_1| + |\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0| + |\mathbf{P}_2 - \mathbf{Q}_2|;$$

s_2 es una segunda y más estrecha aproximación a $|\widehat{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}|$, el número que deseamos definir. Por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} s_1 &= |\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_1| + |\mathbf{P}_2 - \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0| \\ &< |\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}_1| + |\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_1| + |\mathbf{P}_2 - \mathbf{Q}_2| + |\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0| = s_2. \end{aligned}$$

[1] Para una explicación del cálculo de Arquímedes véase B. L. van der Waerden, *Science Awakening* (traducción al inglés), P. Noordhoff Ltd., Groningen, Holland (1954), páginas 204-206.

Insertando puntos entre $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_1$ y $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{Q}_0$ y $\mathbf{Q}_2$, y $\mathbf{Q}_2$ y $\mathbf{P}_2$, podemos seguir subdividiendo el arco y obtener una línea poligonal de 8 lados y una tercera aproximación s_3. Continuando este proceso de subdivisión, obtenemos líneas poligonales de 16, 32, ..., 2^n, ... lados de longitudes $s_4, s_5, \ldots, s_n, \ldots$, respectivamente y, usando de nuevo la desigualdad del triángulo, podemos mostrar que

$$s_1 < s_2 < s_3 < . . < s_{n-1} < s_n < \ldots$$

Ahora bien, los números s_n no aumentan sin límite; en realidad, todos ellos son menores que la longitud de cualquier línea poligonal circunscrita. Por

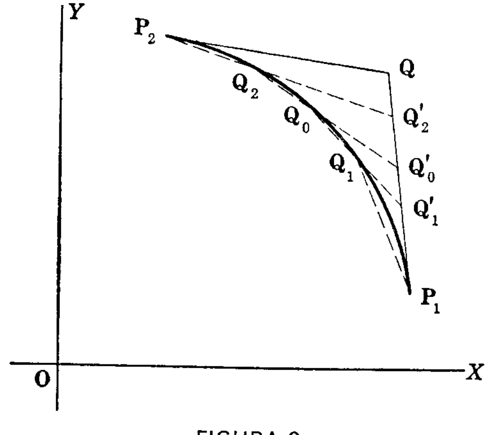


FIGURA 2

ejemplo, aplicando la desigualdad del triángulo al caso ilustrado en la figura 2, obtenemos

$$|\mathbf{P}_2-\mathbf{Q}_2|+|\mathbf{Q}_2-\mathbf{Q}_2'| = |\mathbf{P}_2-\mathbf{Q}_2'| < |\mathbf{P}_2-\mathbf{Q}|+|\mathbf{Q}-\mathbf{Q}_2'|,$$
$$|\mathbf{Q}_2-\mathbf{Q}_0|+|\mathbf{Q}_0-\mathbf{Q}_0'| = |\mathbf{Q}_2-\mathbf{Q}_0'| < |\mathbf{Q}_2-\mathbf{Q}_2'|+|\mathbf{Q}_2'-\mathbf{Q}_0'|,$$
$$|\mathbf{Q}_0-\mathbf{Q}_1|+|\mathbf{Q}_1-\mathbf{Q}_1'| = |\mathbf{Q}_0-\mathbf{Q}_1'| < |\mathbf{Q}_0-\mathbf{Q}_0'|+|\mathbf{Q}_0'-\mathbf{Q}_1'|,$$
$$|\mathbf{Q}_1-\mathbf{P}_1| < |\mathbf{Q}_1-\mathbf{Q}_1'| + |\mathbf{Q}_1'-\mathbf{P}_1|.$$

Sumando estas desigualdades y quitando términos comunes en ambos lados, esto nos da

$$s_2 < |\mathbf{P}_2-\mathbf{Q}|+|\mathbf{Q}-\mathbf{P}_1|.$$

En esta forma puede mostrarse que todos los números s_n ($n = 1, 2, \ldots$) que pueden obtenerse en esta forma son menores que algún número. Se sigue entonces de ello (éste es el axioma del supremo del sistema de los números reales) que existe un número mínimo s, con la propiedad de que $s_n < s$ para todos tales números s_n. Este número s es por definición la longitud $|\widehat{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}|$ del arco $\widehat{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$.

El número π se define como la longitud del arco semicircular de radio 1. Ahora bien, la longitud de esta semicircunferencia es mayor que la longitud de cualquier línea poligonal inscrita y menor que la longitud de cualquier línea poligonal circunscrita. De acuerdo con el cálculo de las longitudes de tales líneas poligonales —tomando, por ejemplo, polígonos regulares de 2, 4, 8, ... lados— pueden obtenerse cada vez mejores aproximaciones del número π. Así es como Arquímedes estableció que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$; es decir, $3.140 < \pi < 3.144$ y, por tanto, para dos cifras decimales $\pi = 3.14$. Para cinco cifras decimales $\pi = 3.14159$. En 1949, π se calculó con el computador electrónico ENIAC con 2 034 cifras decimales. La máquina hizo este trabajo en 70 horas. Como $\sqrt{2}$, el número π es irracional. Sin embargo, al contrario de lo que pasa con $\sqrt{2}$, probar la irracionalidad de π es algo complicado.[1]

Problema

1. Demuéstrese que $2 < \pi < 4$.

3. LAS FUNCIONES CIRCULARES

En esta sección introducimos las funciones circulares seno y coseno. Éstas son las funciones trigonométricas básicas. Aunque es muy de desear estudiar las funciones circulares tan pronto como sea posible, hacerlo a estas alturas en nuestro estudio del análisis tiene desventajas. No podemos dar definiciones analíticas completas, pero las ideas intuitivas son tan claras que las ventajas de estudiar las funciones circulares ahora sobrepasan las desventajas.

Después de nuestra discusión de la sección anterior, aceptamos que tiene sentido hablar de distancia a lo largo de una circunferencia. La idea intuitiva de longitud de arco nos lleva a esperar la existencia de un par de funciones con propiedades especiales y con una relación especial con la circunferencia. Éstas son las funciones circulares seno y coseno, y —como dijimos en la introducción— no es difícil demostrar su existencia más adelante en nuestro estudio del análisis.

Un medio práctico de hacer una medición física de la longitud de un arco circular es el de enroscar una cinta flexible alrededor del círculo. Analíticamente concebimos esto como un rodeo sin estiramiento de la recta de los números R alrededor de la circunferencia. Consideremos la circunferencia $\mathcal{C}$ de radio 1 y centro en el origen en el plano euclidiano R^2. La longitud de la circunferencia $\mathcal{C}$ es 2π. La recta de los números puede ser

[1] Para otras referencias y algunos hechos curiosos acerca de la historia del número π véase: Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Rinehart, New York (1953).

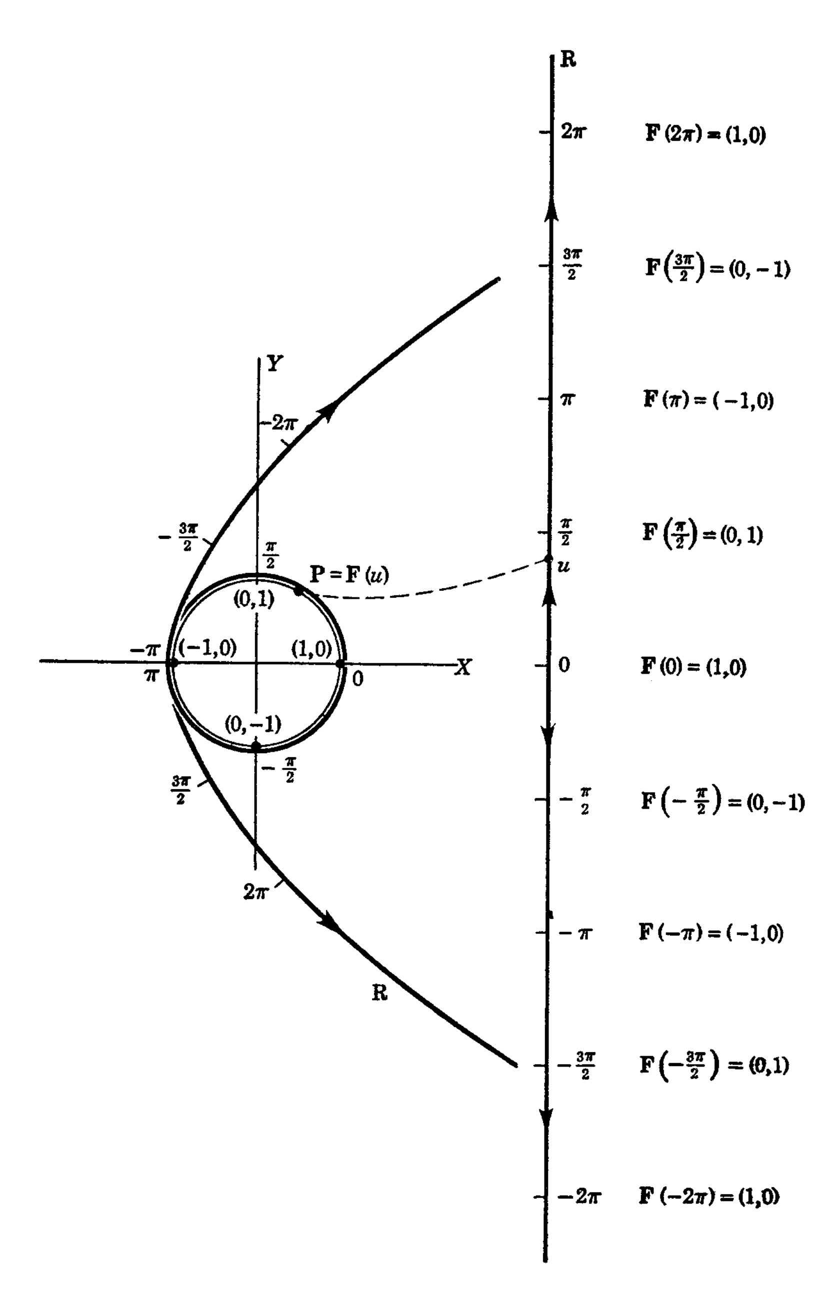

R
2π
F (2π) = (1,0)
3π/2
F(3π/2) = (0, −1)
Y
π
F (π) = (−1,0)
−2π
π/2
F (π/2) = (0, 1)
−3π/2
π/2
P = F (u)
u
(0,1)
−π
(−1,0)
(1,0)
X
0
F (0) = (1,0)
π
0
(0,−1)
3π/2
−π/2
−π/2
F (−π/2) = (0,−1)
2π
− π
F (−π) = (−1,0)
R
−3π/2
F (−3π/2) = (0,1)
−2π
F (−2π) = (1,0)

FIGURA 3

enrollada alrededor de la circunferencia de dos formas distintas. Escogemos como dirección positiva para medir distancias la dirección levógira (la contraria a la del movimiento de las manecillas del reloj), y como negativa la dextrógira, y medimos distancias sobre $\mathcal{C}$ a partir del punto (0, 1) (figura 3). Así pues, nos imaginamos a la mitad positiva de la recta numérica R enroscada en dirección levógira, y a la mitad negativa enrollada en dirección dextrógira. El intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ cubre el primer cuadrante, el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ cubre el segundo cuadrante y así sucesivamente. El intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ cubre el cuarto cuadrante, el intervalo $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ cubre el tercer cuadrante y así sucesivamente.

Este mapeo de la recta numérica **R** sobre la circunferencia unitaria $\mathcal{C}$ define una función **F** de R en R^2: $\mathbf{F}(u)$ es el punto **P** cuya distancia a lo largo de $\mathcal{C}$ a (1, 0) es u. Por ejemplo, $\mathbf{F}(0) = (1, 0)$, $\mathbf{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$, $\mathbf{F}(\pi) = (-1, 0)$, $\mathbf{F}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$,) $\mathbf{F}(2\pi) = (1, 0, \ldots$, $\mathbf{F}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1)$, $\mathbf{F}(-\pi) = (-1, 0)$, $\mathbf{F}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = (0, 1)$, $\mathbf{F}(-2\pi) = (1, 0)$, ... La distancia 2π corresponde a una revolución levógira sobre $\mathcal{C}$. La distancia -2π corresponde a una revolución dextrógira sobre $\mathcal{C}$. En general, $2n\pi$ corresponde a n revoluciones, levógiras si n es un entero positivo y dextrógiras si n es un entero negativo. Por tanto

3.1 $$\mathbf{F}(u+2n\pi) = \mathbf{F}(u)$$

para todo entero n y para todo $u \in \mathrm{R}$.

3.2 Definición. *Las **funciones circulares** coseno y seno (en forma simbólica cos y sen) se definen como sigue (figura 4): Para cada $u \in \mathrm{R}$, cos u es la primera coordenada del punto* $\mathbf{P} = \mathbf{F}(u)$ *—el punto cuya distancia a lo largo de $\mathcal{C}$ de* (1, 0) *es u— y sen u es la segunda coordenada de* $\mathbf{P} = \mathbf{F}(u)$; *es decir, para cada $u \in \mathrm{R}$*

$$(\cos u, \operatorname{sen} u) = \mathbf{F}(u).$$

Por ejemplo: $\cos 0 = 1$, $\operatorname{sen} 0 = 0$; $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$;

$$\cos\pi = \cos(-\pi) = -1, \operatorname{sen}\pi = \operatorname{sen}(-\pi) = 0;$$

$\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. El dominio de definición de seno y coseno es R, y el rango de seno y coseno es $[-1, 1]$.

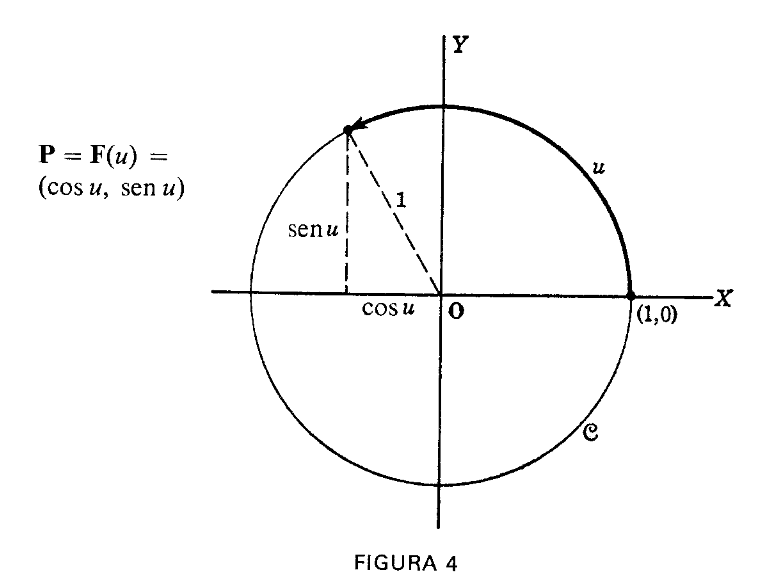


FIGURA 4

En el resto de esta sección derivamos algunas de las propiedades básicas de las funciones circulares. Suponemos que es cierto que las rotaciones preservan la longitud de los arcos de circunferencia. Intuitivamente es esto lo que esperamos y es una simple consecuencia del hecho de que las rotaciones preservan la longitud de las cuerdas.

Por la definición de seno y coseno, el punto $(\cos u, \operatorname{sen} u)$ está sobre la circunferencia unitaria. Por tanto

3.3 $$\cos^2 + \operatorname{sen}^2 = 1\,.$$

De (3.1) se deduce inmediatamente que para todos los enteros n y todo $u \in \mathrm{R}$

3.4 $$\cos(u+2n\pi) = \cos u, \quad \operatorname{sen}(u+2n\pi) = \operatorname{sen} u\,.$$

Las funciones seno y coseno nos permiten asociar una rotación U_a con cada número real a. Definimos U_a como la rotación con la propiedad de que

3.5 $$\mathbf{u}_a = U_a(1,0) = \mathbf{F}(a) = (\cos a, \operatorname{sen} a)\,.$$

Esto significa que U_a hace girar $(1,0)$ la distancia a a lo largo de la circunferencia unitaria. Una rotación U es una transformación de la forma

$$U(x, y) = x\mathbf{u}+y\mathbf{u}^{\perp}$$

donde $\mathbf{u} = U(\mathbf{i}) = U(1,0)$. Así pues, si tenemos $U_a(\mathbf{i}) = \mathbf{u}_a = (\cos a, \operatorname{sen} a)$,

3.6 $$U_a(x, y) = x\mathbf{u}_a+y\mathbf{u}_a^{\perp} = (x\cos a - y\operatorname{sen} a,\ x\operatorname{sen} a + y\cos a)\,.$$

Como las rotaciones preservan la longitud de arco y como U_a hace girar $(1,0)$ la distancia a a lo largo de la circunferencia unitaria, U_a

hace girar todo punto **P** de la circunferencia unitaria la distancia a a lo largo de la circunferencia unitaria. Así pues, para a, b pertenecientes a R cualquiera,

3.7 $$U_a(U_b(\mathbf{i})) = U_a(\mathbf{F}(b)) = \mathbf{F}(a+b) = U_{a+b}(\mathbf{i}).$$

De donde

3.8 $$U_a \circ U_b = U_{a+b};$$

es decir, la rotación de una distancia b a lo largo de la circunferencia unitaria seguida de la rotación de una distancia a es equivalente a la rotación de una distancia $a+b$.

Las fórmulas de adición para las funciones circulares son ahora una simple consecuencia de (3.8)

$$U_{a+b}(\mathbf{i}) = (\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b))$$

y

$$\begin{aligned}[U_a \circ U_b](\mathbf{i}) &= U_a(U_b(\mathbf{i})) = U_a(\cos b, \operatorname{sen} b)\\ &= (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b, \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b).\end{aligned}$$

De donde

3.9 $$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

3.10 $$\operatorname{sen}(a+b) = \cos a \operatorname{sen} b + \cos b \operatorname{sen} a.$$

Nótese también que (3.7) implica

$$[U_a \circ U_{-a}](\mathbf{i}) = \mathbf{F}(0) = \mathbf{i}.$$

De donde

$$[U_a \circ U_{-a}](x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{i}^{\perp} = (x, y).$$

Por tanto

3.11 $$U_a \circ U_{-a} = U_0 = I \quad \text{y} \quad U_{-a} = U_a^*.$$

Como

$$U_{-a}(\mathbf{i}) = (\cos(-a), \operatorname{sen}(-a))$$

y (ecuación 3.10, pág. 171)

$$U_a^*(\mathbf{i}) = (\cos a, -\operatorname{sen} a),$$

obtenemos (figura 5).

3.12 $$\cos(-a) = \cos a$$

3.13 $$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a.$$

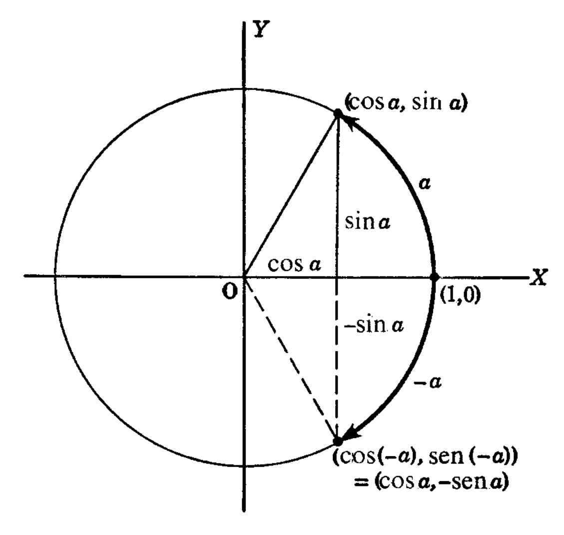


FIGURA 5

Como

$$U_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{i}) = \left(\cos\frac{\pi}{2},\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = (0,1) = \mathbf{j},$$

$$U_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = x\mathbf{j} + y\mathbf{j}^{\perp} = x\mathbf{j} - y\mathbf{i} = (-y, x).$$

De donde

$$U_{\frac{\pi}{2}-a}(\mathbf{i}) = U_{\frac{\pi}{2}}(U_{-a}(\mathbf{i})) = U_{\frac{\pi}{2}}(U_a{}^*(\mathbf{i})) = U_{\frac{\pi}{2}}(\cos a,\ -\operatorname{sen} a)$$

$$= (\operatorname{sen} a, \cos a);$$

es decir,

$$U_{\frac{\pi}{2}-a}(\mathbf{i}) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right),\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right) = (\operatorname{sen} a, \cos a).$$

Por tanto (figura 6)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \operatorname{sen} a$$

3.14

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a.$$

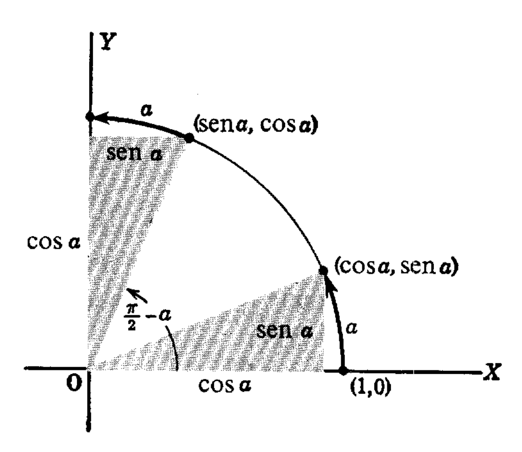


FIGURA 6

Esta correlación entre el seno y el coseno explica por qué al coseno se le llama la cofunción del seno.

3.15 Ejemplo. Muéstrese que: $\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2.$

SOLUCIÓN 1. Sea U_a la rotación con

$$\mathbf{u}_a = U_a(\mathbf{i}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \qquad 0 < a < \pi/2.$$

Entonces

$$U_a(x, y) = x\mathbf{u}_a + y\mathbf{u}_a^{\perp} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y)$$

y

$$U_{2a}(\mathbf{i}) = U_a(U_a(\mathbf{i})) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, U_a(1, 1) = \tfrac{1}{2}(0, 2) = \mathbf{j} = U_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{i}).$$

De donde $U_{2a} = U_{\frac{\pi}{2}}$, lo que implica $2a = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$. Como

$$0 < a < \pi/2, \quad a = \pi/4$$

y

$$U_{\frac{\pi}{4}}(\mathbf{i}) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1).$$

Por tanto

$$\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2.$$

SOLUCIÓN 2. Se sigue de (3.9) que

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1 .$$

Tomando $\theta = \pi/4$, obtenemos que

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Como $\frac{\pi}{4}$ está en el primer cuadrante, $\cos \frac{\pi}{4} > 0$ y $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} > 0$. Por tanto

$$\cos \frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Las restantes funciones trigonométricas (tangente, cotangente, cosecante, y secante) se definen en términos del seno y el coseno:

3.16 $\tan = \operatorname{sen}/\cos$

3.17 $\cot = \cos/\operatorname{sen}$

3.18 $\csc = 1/\operatorname{sen}$

3.19 $\sec = 1/\cos.$

Estas funciones están definidas para todos los números reales, excepto aquellos que anulan el denominador que aparece en su definición. Los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ corresponden a los puntos sobre la circunferencia unitaria donde el seno es cero, y los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ corresponden a los puntos sobre la circunferencia unitaria donde el coseno es cero. Por tanto, $\operatorname{sen} u = 0$ si y sólo si $u = k\pi$ (k un entero) y $\cos u = 0$ si y sólo si $u = \frac{2k+1}{2}\pi$. De donde la cotangente y la cosecante están definidas en todo R, excepto en los múltiplos de π (múltiplos pares de $\pi/2$) y la tangente y la secante están definidas en todo R excepto en los múltiplos impares de $\pi/2$.

Ahora no es difícil establecer las siguientes identidades (problema 2).

3.20 $1 + \tan^2 = \sec^2$

3.21 $1 + \cot^2 = \csc^2$

3.22 $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

3.23 $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

3.24 $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

3.25 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

3.26 $$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

3.27 $$\tan(-x) = -\tan x$$

3.28 $$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x+y) \cos \tfrac{1}{2}(x-y)$$

3.29 $$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \tfrac{1}{2}(x+y) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x-y)$$

3.30 $$\cos x + \cos y = 2 \cos \tfrac{1}{2}(x+y) \cos \tfrac{1}{2}(x-y)$$

3.31 $$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x+y) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x-y)$$

3.32 $$2 \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)$$

3.33 $$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

3.34 $$2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x-y) - \cos(x+y).$$

3.35 Definición. *Sea f una función cuyo dominio de definición $\mathfrak{D}_f$ está en* R *La función f se dice que es* ***periódica*** *si existe un número $T \neq 0$ tal que $t \in \mathfrak{D}_f$ implica $t+T \in \mathfrak{D}_f$ y $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathfrak{D}_f$. El número T se llama* ***periodo*** *de f. El periodo positivo mínimo de f se llama* ***periodo mínimo*** *de f.*

Recuérdese (capítulo 5, sección 4) que una función f se dice que es una función *par* si $x \in \mathfrak{D}_f$ implica $-x \in \mathfrak{D}_f$ y $f(-x) = f(x)$ para toda $x \in \mathfrak{D}_f$. Una función f se dice que es *impar* si $x \in \mathfrak{D}_f$ implica $-x \in \mathfrak{D}_f$ y $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathfrak{D}_f$. Por ejemplo, la función I^k es impar si el entero k es impar y es par si el entero k es par. La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen y la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje Y.

Podemos ahora establecer la siguiente importante propiedad de las funciones seno y coseno.

3.36 *El coseno es una función periódica par con periodo mínimo 2π.*

3.37 *El seno es una función periódica impar con periodo mínimo 2π.*

Las pruebas para las dos funciones son análogas. Una puede también derivarse de la otra. Damos la prueba para el coseno. Hemos ya demostrado que el coseno es una función periódica (ecuación 4.4), y se sigue de (3.12) que el coseno es una función par. Queda por probar que el periodo mínimo del coseno es 2π. Supongamos que T es un número positivo tal que

$$\cos(x+T) = \cos x \quad \text{para toda} \quad x \in \mathrm{R}.$$

Tomando $x = 0$, vemos que $\cos T = 1$. De donde $T = 2k\pi$, donde k es un entero positivo, y 2π es el mínimo entre tales T.

Problemas

1. Demuéstrese que: para todo entero n y todo $a \in \mathrm{R}$

a) $\cos(a+\pi) = -\cos a$, $\quad \operatorname{sen}(a+\pi) = -\operatorname{sen} a$

b) $\cos(\pi-a) = -\cos a$, $\quad \operatorname{sen}(\pi-a) = \operatorname{sen} a$

c) $\cos n\pi = (-1)^n$, $\quad \operatorname{sen} n\pi = 0$

d) $\cos(2n+1)\dfrac{\pi}{2} = 0$, $\quad \operatorname{sen}(2n+1)\dfrac{\pi}{2} = (-1)^n$

e) $\cos(a+n\pi) = (-1)^n \cos a$

f) $\operatorname{sen}(a+n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen} a$

g) $U_{n\pi} = (-1)^n I$

h) $U_{a+n\pi} = (-1)^n U_a$

i) $U_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^{\perp}$.

2. Establézcanse las identidades 3.20-3.34.

3. Demuéstrese que:

a) El seno es una función periódica impar con periodo mínimo 2π.

b) La secante es una función periódica par con periodo mínimo 2π.

c) La cosecante es una función periódica impar con periodo mínimo 2π.

d) La tangente y la cotangente son funciones periódicas impares con periodo mínimo π.

4. Demuéstrese que:

a) La función $f(t) = \cos \omega t$ es una función periódica par con periodo mínimo $T = 2\pi/|\omega|$.

b) La función $g(t) = \operatorname{sen} \omega t$ es una función periódica impar con periodo mínimo $T = 2\pi/|\omega|$.

5. Pruébese que: $\cos\dfrac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Sugerencia. Sea U_a la rotación con $U_a(\mathbf{i}) = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3})$, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$. Demuéstrese que $U_{3a} = U_\pi$.

6. Demuéstrese que: $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

7. Demuéstrese que: $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ y $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5} = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

8. Proporciónense valores exactos para

a) $\cos\dfrac{5\pi}{4}$, $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}$ $\qquad$ *b*) $\cos\dfrac{4\pi}{3}$, $\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3}$

c) $\cos\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$

d) $\cos\frac{2\pi}{3}$, $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$

e) $\cos\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$

f) $\cos\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

9. Los puntos $\mathbf{P} = r(\cos a, \operatorname{sen} a)$ y $\mathbf{Q} = r(\cos b, \operatorname{sen} b)$ están sobre la circunferencia de radio r con centro en el origen. Demuéstrese que: la longitud de la cuerda que une **P** y **Q** es

$$\begin{aligned}|\mathbf{Q}-\mathbf{P}| &= r[2(1-\cos(b-a))]^{1/2}\\ &= 2r|\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(b-a)|.\end{aligned}$$

4. GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Por la definición de coseno y seno, el punto

$$\mathbf{P} = (\cos u, \operatorname{sen} u)$$

es el punto de la circunferencia unitaria $\mathcal{C}$ cuya distancia a lo largo de $\mathcal{C}$ de $(1, 0)$ es u (figura 7). Así pues, pueden obtenerse valores del seno y del coseno por la proyección sobre los ejes de coordenadas de un vector unitario que gira alrededor del origen. Nótese también que $\frac{1}{\cos u}\mathbf{P} = (1, \tan u)$ (figura 7). Esto nos dice que si extendemos el radio vector **P** hasta que intersecte a la recta vertical $x = 1$, la altura del punto de intersección es $\tan u$.

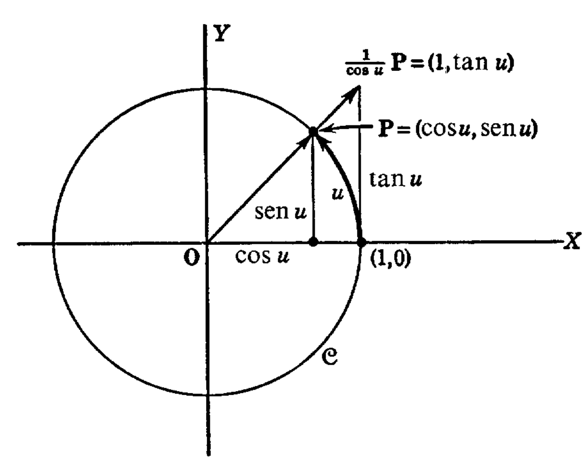


FIGURA 7

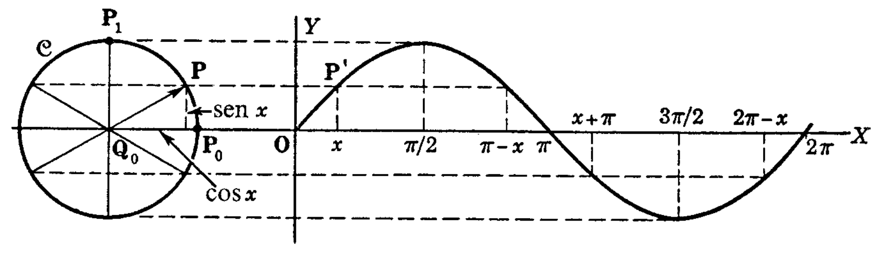


FIGURA 8

Ésta es la base de la construcción geométrica de las gráficas del seno y la tangente que pasamos ahora a describir.

La construcción de una gráfica de la función seno está ilustrada en la figura 8. $\mathcal{C}$ es una circunferencia de radio 1 con centro en algún punto $\mathbf{Q}_0$; sobre el eje X. El extremo del vector $\mathbf{P}-\mathbf{Q}_0$ gira alrededor de $\mathbf{Q}_0$; x es la distancia a lo largo de $\mathcal{C}$ de $\mathbf{P}$ a $\mathbf{P}_0$. La altura de $\mathbf{P}$ por encima del eje X es sen x. El punto $\mathbf{P}'$ es la intersección de la recta horizontal que pasa por $\mathbf{P}$ y la recta vertical que pasa por el punto $(x, 0)$. $\mathbf{P}' = (x, \text{sen } x)$ y es un punto sobre la gráfica de la función seno. Nótese, por ejemplo, que esta construcción ilustra perfectamente las identidades

$$\text{sen } x = \text{sen }(\pi - x) = -\text{sen }(x+\pi) = -\text{sen }(2\pi - x).$$

La gráfica del coseno puede construirse de una forma análoga tomando como x la distancia a lo largo de $\mathcal{C}$ de $\mathbf{P}$ a $\mathbf{P}_1$ o puede obtenerse directamente por una traslación horizontal de la gráfica de la función seno $\pi/2$ unidades a la izquierda ($\cos x = \text{sen }(\pi/2 - x) = \text{sen }(x + \pi/2)$).

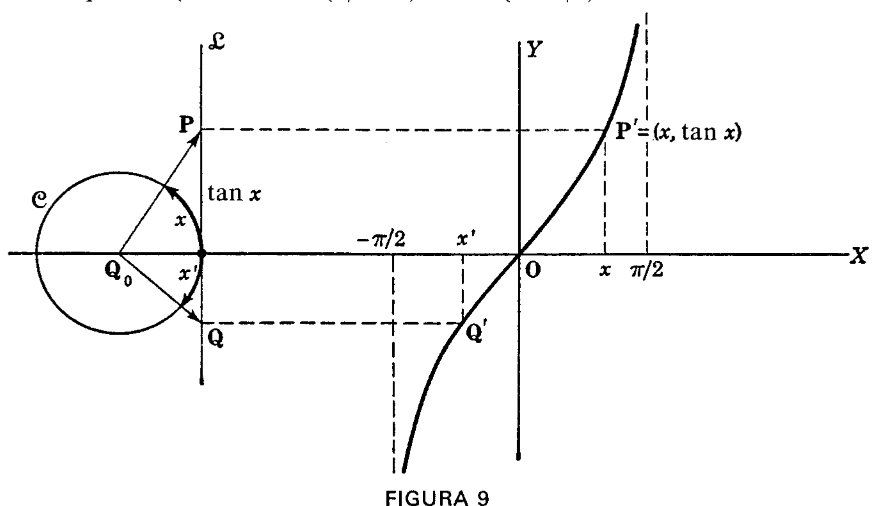


FIGURA 9

En la construcción de una gráfica de la función tangente sabemos, cómo es que la función tangente es periódica de periodo π (problema 3 de la sección 3), que es suficiente construir la función sobre un intervalo de longitud π. La construcción de una gráfica de la función tangente sobre el intervalo $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ está ilustrado en la figura 9. Como anteriormente, $\mathcal{C}$ es una circunferencia de radio 1 alrededor de un punto $\mathbf{Q}_0$ sobre el eje X. Sin embargo, $\mathbf{P}$ es ahora un punto sobre la recta vertical $\mathcal{L}$ tangente a $\mathcal{C}$ (figura 9). La altura de $\mathbf{P}$ sobre el eje X es $\tan x$. El punto $\mathbf{P}' = (x, \tan x)$ queda localizado como se indica en la figura. Los puntos $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}'$ indican la localización de un punto sobre la gráfica cuando x' es negativo.

En las figuras 10, 11, y 12 se muestran gráficas de las otras funciones trigonométricas.

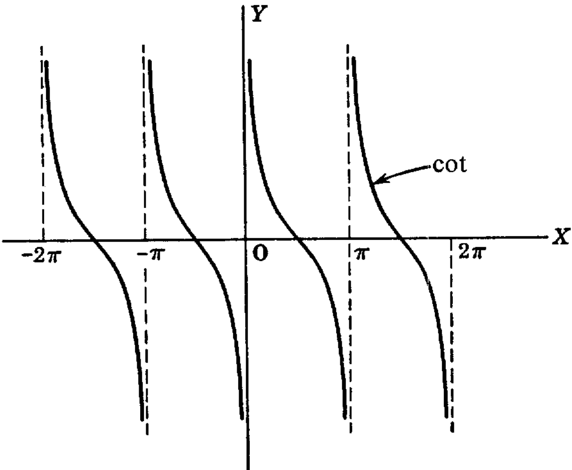


FIGURA 10

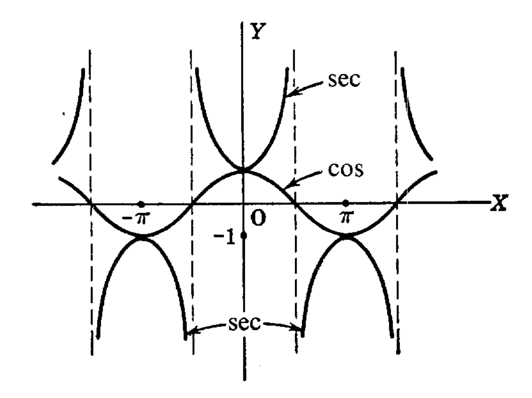


FIGURA 11

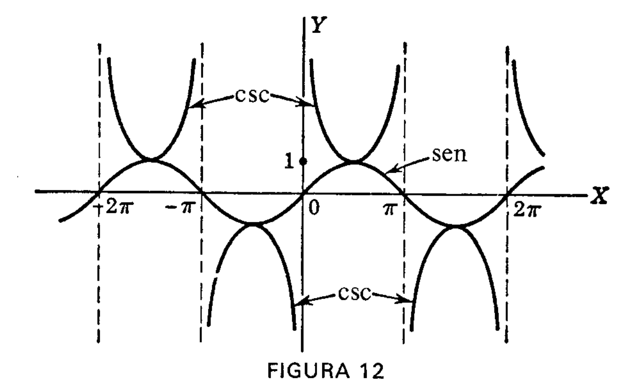


FIGURA 12

FIGURA 13

Problemas

1. Constrúyanse las gráficas de las siguientes ecuaciones:

a) cos

b) cot

c) $f(x) = \text{sen}\,(2\pi x)$

d) $f(x) = \cos\,(4\pi x + \pi/4)$

e) $f(x) = \tan 2x$

f) sec

g) csc

h) $f(t) = A\cos\,(\omega t + \delta)$

i) $f(t) = A\,\text{sen}\,(\omega t - \delta)$

j) $f(x) = \text{sen}\,x + 2\cos x$

k) $f = I - \text{sen}$.

2. Demuéstrese que: el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$x = x_0 + a\cos\theta$$
$$y = y_0 + a\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

es la circunferencia de radio $|a|$ con centro en (x_0, y_0). Éstas son ecuaciones paramétricas de la circunferencia.

3. Demuéstrese que: el conjunto de puntos (x, y)

$$x = x_0 + a\cos\theta$$
$$y = y_0 + b\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi (0 < b < a)$$

es la elipse con semieje mayor a, semieje menor b, y centro en (x_0, y_0). Éstas son ecuaciones paramétricas de la elipse.

4. La representación paramétrica de una elipse dada en el problema 3 sugiere una sencilla construcción geométrica de una elipse (figura 13). Úsese esta construcción para dibujar una elipse con eje mayor 8 y eje menor 4.

5. ÁNGULO

"Un ángulo plano es la inclinación de una a otra de dos rectas en un plano que se encuentran y no están sobre una misma recta." — Euclides, Libro I, Definición 8.[1]

Siguiendo a Euclides, excepto en que reemplazamos "recta" por "dirección", pensamos en el ángulo como en la cantidad de giro (en la rotación) requerida para llevar una dirección a coincidir con otra. Las direcciones están especificadas por vectores no nulos, y antes de dar un enunciado formal de la definición de ángulo queremos mostrar que hay una rotación única que lleva una dirección a coincidir con otra. El siguiente teorema nos da también un simple medio de calcular la rotación.

5.1 Teorema. *Correspondiéndose con cada par* **a**, **b** *de vectores distintos de cero hay una rotación única U con la propiedad de que U*(**a**) *está en la dirección de* **b**. *U es la rotación*

5.2 $$U(x, y) = x\mathbf{u} + y\mathbf{u}^{\perp},$$

[1] Para esta formulación de la definición y una discusión del concepto de ángulo véase: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, traducidos al inglés con comentarios por T. L. Heath (2ª edición), vol. 1 (Dover, Nueva York), págs. 176-181.

donde

$$\mathbf{u} = U(\mathbf{i}) = \frac{1}{|\mathbf{b}|}(\text{Comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b},\ \text{Comp}_{\mathbf{a}}{}^{\perp}\,\mathbf{b})$$

$$= \left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ \mathbf{b}||},\ \frac{\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|}\right).$$

Prueba. (Figura 14.) Demostramos primero que, si U tiene la propiedad de que $U(\mathbf{a})$ está en la dirección de $\mathbf{b}$ (es decir, si $U(\mathbf{a}) = t\mathbf{b}$, $t > 0$), entonces U está dado por (5.2). Como $|U(\mathbf{a})| = |\mathbf{a}|$, se sigue que $t = |\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|$ y

5.3 $$U(\mathbf{a}) = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\,\mathbf{b}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{a}) &= a_1\,\mathbf{u}+a_2\,\mathbf{u}^{\perp} = a_1(u_1, u_2)+a_2(-u_2, u_1) \\ &= u_1(a_1, a_2)+u_2(-a_2, a_1) = u_1\,\mathbf{a}+u_2\,\mathbf{a}^{\perp}. \end{aligned}$$

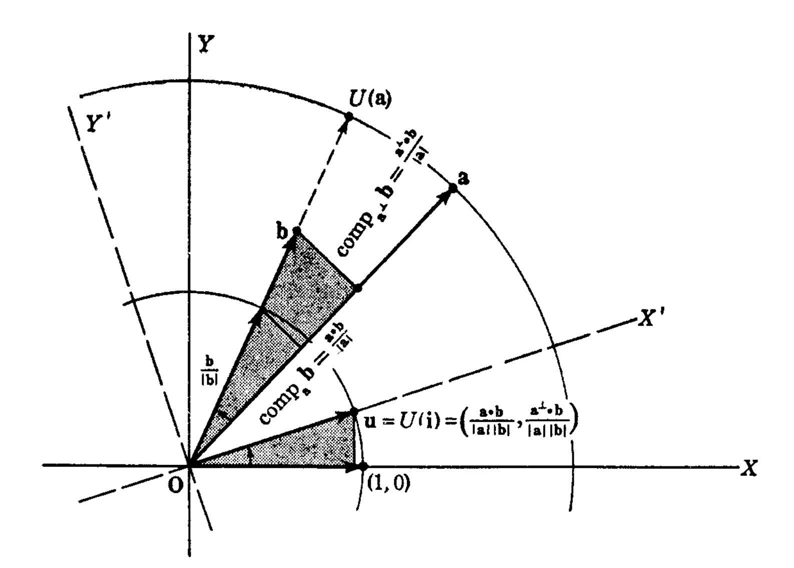


FIGURA 14

De donde, por (5.3), tenemos

$$u_1\,\mathbf{a}+u_2\,\mathbf{a}^{\perp} = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\,\mathbf{b}.$$

De donde, resolviendo para u_1 y u_2 obtenemos

$$u_1 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

$$u_2 = \frac{\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}.$$

Por tanto

$$\mathbf{u} = U(\mathbf{i}) = \frac{1}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\ \mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}).$$

Así pues, si hay una rotación U con la propiedad (5.3) entonces U viene dada por (5.2). Ahora es fácil verificar que la rotación U definida por (5.2) satisface (5.3) [es decir, que $U(a)$ está en la dirección de b].

$$U(\mathbf{a}) = a_1\mathbf{u}+a_2\mathbf{u}^{\perp} = u_1\mathbf{a}+u_2\mathbf{a}^{\perp}$$

$$= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}\mathbf{a} + \frac{\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}\mathbf{a}^{\perp}$$

$$= \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}(\mathbf{Proy_a\,b} + \mathbf{Proy_a^{\perp}\,b}) = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|}\mathbf{b}.$$

Lo que completa la prueba.

Como está ilustrado en la figura 14, la rotación U que lleva la dirección **a** a coincidir con la dirección **b** está determinado al elegir un $\mathbf{u} = U(\mathbf{i})$ tal que el triángulo rectángulo con hipotenusa **u** y base sobre el eje X sea semejante al triángulo rectángulo obtenido por la proyección ortogonal de **b** sobre **a**. [Puede darse una prueba más elegante basada en las propiedades invariantes respecto a las rotaciones (problema 2).]

5.4 Ejemplo. Determínese la rotación U que lleva la dirección $(1, 2)$ a coincidir con la dirección $(-3, 1)$.

SOLUCIÓN. Sea $\mathbf{a} = (1, 2)$ y $\mathbf{b} = (-3, 1)$. Entonces

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{-3+2}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt{50}}$$

$$\frac{\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{(-2, 1)\cdot(-3, 1)}{\sqrt{50}} = \frac{7}{\sqrt{50}}.$$

De donde

$$\mathbf{u} = U(\mathbf{i}) = \frac{1}{\sqrt{50}}(-1, 7)$$

y

$$U(x, y) = \frac{x}{\sqrt{50}}(-1, 7) + \frac{y}{\sqrt{50}}(-7, -1) = \frac{1}{\sqrt{50}}(-x-7y, 7x-y).$$

COMPROBACIÓN.

$$U(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{50}}(-15, 5) = \frac{5}{\sqrt{50}}(-3, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ (-3, 1).$$

5.5 Definición. *Correspondiéndose con cada par de vectores no nulos* **a**, **b** *el* ***ángulo de*** **a** ***a*** **b** *es la rotación U tal que $U(\mathbf{a})$ está en la dirección de* **b**.

El ángulo de **a** a **b** se denota por $\angle\mathbf{ab}$, léase: "el ángulo de **a** a **b**" o simplemente "ángulo **ab**". Según el teorema 5.1 $\angle\mathbf{ab}$ es la rotación U determinada por

$$\mathbf{u} = U(\mathbf{i}) = \frac{1}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}).$$

Como $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ corresponde a un punto sobre la circunferencia unitaria, entonces

$$\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \quad \text{y} \quad U = U_\theta$$

donde θ es la distancia a lo largo de la circunferencia unitaria de $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{i} = (1, 0)$ (figura 15). Por tanto,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}.$$

La distancia de $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ a $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ a lo largo de la circunferencia unitaria se llama longitud del arco subtendido por el ángulo $\angle\mathbf{ab}$ sobre la circunferencia unitaria (figura 15). La longitud del arco subtendido por $\angle\mathbf{ab}$ sobre la circunferencia unitaria se llama *medida en radianes* del ángulo. Como acabamos de señalar, $\angle\mathbf{ab}$ es la rotación U_θ donde θ es la distancia a lo largo de la circunferencia unitaria de $U_\theta(\mathbf{i})$ a **i**. Como U hace girar todos los puntos de la circunferencia unitaria la misma distancia (figura 15), la longitud del arco subtendido por $\angle\mathbf{ab}$ sobre la circunferencia unitaria es igual a θ. Vemos por esto que *θ es una medida en radianes de* $\angle\mathbf{ab}$

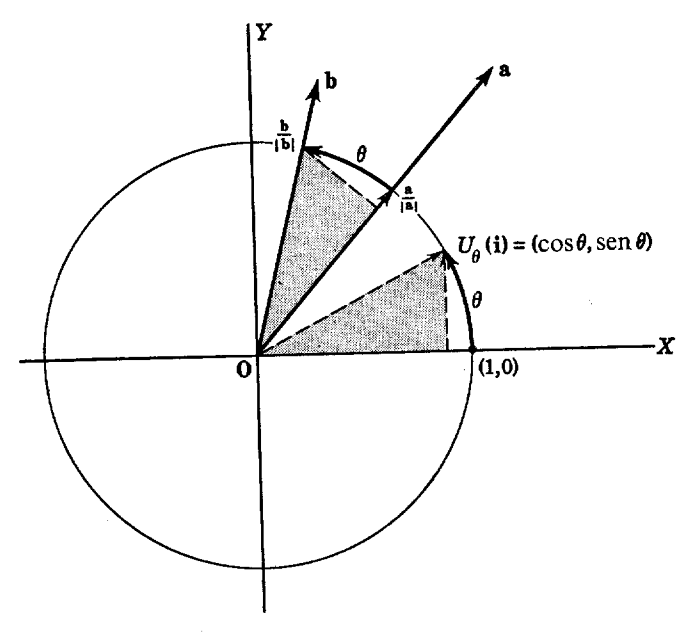


FIGURA 15

si y sólo si $\angle \mathbf{ab} = U_\theta$; *es decir, si y sólo si* $U_\theta(\mathbf{a})$ *está en la dirección de* **b**. La medida en radianes de un ángulo es un número, y como es independiente de la unidad de distancia, es una magnitud física sin dimensión.

La definición de medida en radianes no asigna una única medida en radianes a un ángulo. A pesar del hecho de que hablamos de "la longitud" θ, no queremos implicar con ello que la medida de la longitud del arco es única. Puede medirse en la dirección positiva (levógira) o en la dirección negativa (dextrógira) o puede medirse dando más de una vuelta a la circunferencia. Hay una medida en radianes única asignada a cada ángulo si, por ejemplo, restringimos la medida en radianes al intervalo $[0, 2\pi]$. No hemos impuesto esta restricción a la medida en radianes porque es conveniente que cada número real sea la medida en radianes de un ángulo. Sin embargo, un par de números reales puede ser medido en radianes de un mismo ángulo si y sólo si difiere en un múltiplo entero de 2π. El ángulo $\angle \mathbf{a}(-\mathbf{a})$ corresponde a un semicírculo y tiene medida en radianes π, $-\pi$, o cualquier múltiplo impar de π. El ángulo $\angle \mathbf{aa}^\perp$ se corresponde con un cuadrante de la circunferencia (un ángulo recto) y tiene medida en radianes $\pi/2$, $5\pi/2$, o $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k+1)\frac{\pi}{2}$ donde k es un entero cualquiera. El ángulo $\angle \mathbf{aa}$ tiene medida en radianes 0, o cualquier múltiplo par de π. El ángulo $\angle \mathbf{a}(-\mathbf{a}^\perp)$ tiene medida en radianes $-\pi/2$, $3\pi/2$, o $(4k+3)\frac{\pi}{2}$

donde k es cualquier entero. Así pues, al hablar de la medida en radianes de un ángulo y de la longitud de un arco, solamente queremos decir con ello que les hemos asignado una medida en radianes o una longitud, respectivamente.

La medida más antigua y más común de un ángulo en la trigonometría geométrica es la medida en grados. Se basa en una circunferencia cuya longitud es 360. La *medida en grados* de un ángulo es la longitud del arco subtendido por el ángulo sobre una circunferencia cuyo radio es $\dfrac{360}{2\pi} = \dfrac{180}{\pi}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 1 \text{ radián} &= 180/\pi \text{ grados}, \\ 1 \text{ grado} &= \pi/180 \text{ radianes}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, $\pi/2$ radianes se corresponde con $90°$, $\pi/4$ radianes se corresponde con $45°$, $-60°$ se corresponde con $-\pi/3$ radianes. La medida en grados del ángulo se remonta hasta Babilonia (2 000 A.C.). A menudo, en lugar de decimales, el ángulo se mide en grados (°), minutos (′), y segundos (″); $1° = 60'$, $1' = 60''$.

Nota. En análisis, cuando hablamos de un ángulo θ —donde θ es un número real— queremos siempre decir, salvo que especifiquemos lo contrario, el ángulo cuya medida en radianes es θ.

Si $\angle\mathbf{ab}$ tiene medida en radianes θ, entonces, como señalamos antes, $\mathbf{u} = U(\mathrm{i}) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$; es decir, $\angle\mathbf{ab}$ es la rotación U_θ. Se sigue de ello por el teorema 5.1 que, si θ es una medida en radianes del $\angle\mathbf{ab}$, entonces (figura 16)

5.6
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$
$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}.$$

De donde

5.7
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$$
$$\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta,$$

donde θ es una medida en radianes del ángulo de **a** a **b**. Nótese también que

5.8
$$\begin{cases} \operatorname{Comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos\theta \\ \operatorname{Comp}_{\mathbf{a}}^{\perp}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Las ecuaciones (5.8) corresponden a las definiciones usuales dadas en la trigonometría geométrica del coseno y del seno. Respecto a los triángulos

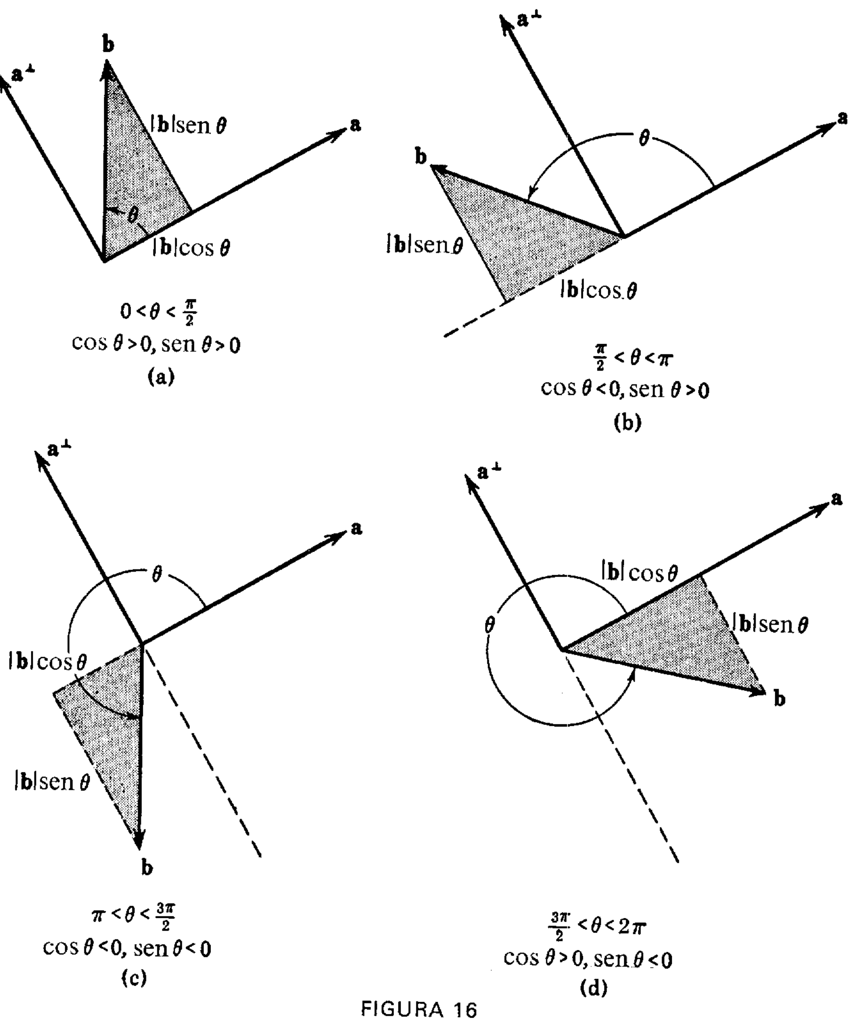


FIGURA 16

rectángulos construidos por proyección ortogonal (figura 16)

$$\cos \theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}.$$

Las longitudes de los lados adyacente y opuesto son componentes, respectivamente, de **b** sobre **a** y $\mathbf{a}^{\perp}$ y son, por tanto, longitudes dirigidas.

5.9 Ejemplo. Sea $\mathbf{a} = (2, 1)$ y $\mathbf{b} = (1, 2)$. Determínense: 1) el seno, coseno, y tangente del ángulo de **a** a **b**, 2) una medida en grados del ángulo, 3) la longitud del arco subtendido por el ángulo sobre una circunferencia de radio 13.

SOLUCIÓN. 1) Sea θ una medida en radianes del $\angle\mathbf{ab}$. Entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{4}{5} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}.$$

2) Como $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ son positivos, sabemos que θ está en el primer cuadrante. Consultando tablas vemos que

$$\tan 36^\circ 52' = 0.74991$$
$$\tan 36^\circ 53' = 0.75037.$$

De donde, aproximando hasta el minuto más próximo, $\angle\mathbf{ab} = 36^\circ 52'$.

3) En radianes

$$\theta = \left(36 + \frac{52}{60}\right)\frac{\pi}{180} = 0.6434.$$

Ésta es la longitud del arco subtendido por el ángulo sobre una circunferencia de radio 1. La longitud del arco subtendido por el ángulo sobre una circunferencia de radio r es $r\theta$. En el presente caso tenemos,

$$r\theta = (13)\,(0.6434) = 8.364.$$

Nota. Las funciones circulares seno y coseno se basaron en la circunferencia unitaria y en su relación al ángulo, el ángulo debe ser medido en radianes. Es, sin embargo, habitual en trigonometría geométrica hablar del "seno o coseno de un ángulo". El ángulo puede especificarse por un par de vectores no nulos o por su medida en grados o por su medida en radianes. Si θ es una medida en radianes del ángulo, entonces por la función trigonométrica del ángulo se entiende su valor en θ. Si, por ejemplo, θ es una medida en radianes de $<\mathbf{ab}$, entonces

$$\cos\angle\mathbf{ab} = \cos\theta$$
$$\operatorname{sen}\angle\mathbf{ab} = \operatorname{sen}\theta,$$

etcétera. Cuando en el anterior ejemplo escribimos $\tan 36^\circ 52'$ se entendió

que queríamos decir $\tan\left(36 + \frac{52}{60}\right)\frac{\pi}{180}$. En realidad, muchas tablas trigonométricas se han escrito para la trigonometría geométrica y no para el análisis y no son, estrictamente hablando, tablas de las funciones analíticas seno, coseno, tangente, etc. Para convertirlas en tablas de las funciones analíticas debemos convertir los grados en radianes. Por ejemplo, en las tablas encontramos $\tan 45° = 1$, y debemos entender que esto significa $\tan\frac{\pi}{4} = 1$. Algunos juegos de tablas dan los ángulos tanto en radianes como en grados.

Problemas

1. Determínese la rotación U con la propiedad de que $U(\mathbf{a})$ está en la dirección de $\mathbf{b}$.

a) $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$
b) $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0)$
c) $\mathbf{a} = (-1, 3)$, $\mathbf{b} = (-5, -3)$
d) $\mathbf{a} = (-5, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 3)$
e) $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{\perp}$
f) $\mathbf{b} = \mathbf{a}+\mathbf{a}^{\perp}$
g) $\mathbf{b} = \mathbf{a}-\mathbf{a}^{\perp}$
h) $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$
i) $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$
j) $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}$.

***2.** Pruébese el teorema 5.1 usando el hecho de que el producto escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ y el $\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}$ son invariantes respecto a las rotaciones (es decir, para toda rotación U, $U(\mathbf{a})\cdot U(\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ y $(U(\mathbf{a}))^{\perp}\cdot U(\mathbf{b}) = \mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b}$).

3. Exprésese un radián en términos de grados, minutos y segundos hasta el segundo más próximo.

4. Exprésese $1°$ en radianes con cuatro cifras decimales.

5. Exprésese $1'$ en radianes con dos cifras significativas.

6. Exprésese $1''$ en radianes con dos cifras significativas.

7. Una polea de 1.50 metros de diámetro tiene una velocidad angular constante de 175 revoluciones por minuto. ¿Cuál es la velocidad angular en radianes por segundo?, ¿cuál es la velocidad lineal de la faja en metros por segundo?

8. Un punto de la circunferencia de una rueda de 68 centímetros de diámetro se mueve a una velocidad de 20 metros por segundo. ¿A qué velocidad gira la rueda en revoluciones por segundo?, ¿y en radianes por segundo?

9. Demuéstrese que la longitud de la cuerda subtendida por un angulo de θ radianes en una circunferencia de radio r es $2r \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

10. Para ángulos pequeños la longitud del arco circular subtendido por un ángulo puede aproximarse por la longitud de la cuerda. Demuéstrese que esto es equivalente a decir que cuando θ está próximo a cero, sen θ es aproximadamente igual a θ.

11. Usando tablas trigonométricas, determínese la longitud de la cuerda y la longitud del arco subtendido por el ángulo θ sobre una circunferencia de radio r donde:

a) $\theta = 1$ y $r = 20$
b) $\theta = 30°$ y $r = 15$
c) $\theta = 30°$ y $r = 50$
d) $\theta = 3'$ y $r = 50$
e) $\theta = 0.10$ y $r = 1\,000$
f) $\theta = 0.01$ y $r = 1\,000$
g) $\theta = \angle(1, 0)\,(1, 2)$ y $r = 25$
h) $\theta = \angle(1, 1)\,(-1, 3)$ y $r = 8$.

12. La latitud de Nueva Orleáns es, aproximadamente, 30° N. ¿Cual es la velocidad lineal de Nueva Orleáns debida a la rotación de la tierra? (El diámetro de la tierra es aproximadamente de 8 000 millas).

13. El paralaje estelar de una estrella es el ángulo que el radio de la órbita terrestre (93×10^6 millas) subtiende en una circunferencia con centro en la estrella. Un año luz (5.9×10^{12} millas) es la distancia que la luz viaja en un año. Estímense en años luz las distancias de las siguientes estrellas a la tierra, dado que:

a) El paralaje estelar de Sirio (la estrella más brillante) es 0.38″.
b) El paralaje estelar de Alfa Centauro es 0.75″.
c) El paralaje estelar de Rigel es 0.006″.

14. Calcúlese cos θ, sen θ, tan θ, cot θ, sec θ, csc θ, donde θ es una medida en radianes de $\angle\,\mathbf{ab}$ y

a) $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$
b) $\mathbf{a} = (1, 1)$ y $\mathbf{b} = (1, 0)$
c) $\mathbf{b} = \mathbf{a}$
d) $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$
e) $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{\perp}$
f) $\mathbf{b} = -\mathbf{a}^{\perp}$
g) $\mathbf{a} = (-2, 3)$, $\mathbf{b} = (6, -4)$
h) $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 3)$.

15. Sea θ una medida en radianes de $\angle\,\mathbf{ab}$. Demuéstrese que:

a) $-\theta$ es una medida en radianes de $\angle\,\mathbf{ba}$.
b) $\theta + \pi$ es una medida en radianes de $\angle\,(-\mathbf{a})\mathbf{b}$.
c) $\pi - \theta$ es una medida en radianes de $\angle\,\mathbf{b}(-\mathbf{a})$.
d) θ es una medida en radianes de $\angle\,(r\mathbf{a})\,(s\mathbf{b})$, $rs > 0$.
e) θ es una medida en radianes de $\angle\,U(\mathbf{a})\,U(\mathbf{b})$, donde U es una rotación cualquiera alrededor del origen.
f) $\alpha + \theta$ es una medida en radianes de $\angle\,\mathbf{a}U_\alpha(\mathbf{b})$.

Ilústrese geométricamente cada uno de los anteriores casos.

Sugerencia. El número α es una medida en radianes de $\angle\,\mathbf{cd}$ si y sólo si $U_\alpha(\mathbf{c})$ está en la dirección de $\mathbf{d}$; es decir, si y sólo si $\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}/|\mathbf{c}|\,|\mathbf{d}| = \cos\alpha$, y $\mathbf{c}^{\perp}\cdot\mathbf{d}/|\mathbf{c}|\,|\mathbf{d}| = \text{sen}\,\alpha$.

16. Sea $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}| \neq 0$ y sea θ una medida en radianes de $\angle\mathbf{ab}$. Demuéstrese que

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{3}/2.$$

Ilústrense los dos casos gráficamente.

Sugerencia. Demuéstrese que $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ implica $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}|\mathbf{a}|^2$. El triángulo formado por **a**, **b**, y $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ es un triángulo equilátero.

6. FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

El propósito de esta sección es demostrar cómo una función trigonométrica de un ángulo arbitrario puede convertirse en una función trigonométrica de un ángulo agudo —es decir, de un ángulo entre 0 y $\pi/2$ (90°). Las tablas de las funciones trigonométricas (y también una regla de cálculo) dan los valores de las funciones para ángulos agudos y esta conversión es necesaria, por ejemplo, si uno desea obtener el valor de sen 32.8 de las tablas.

Las fórmulas de reducción requeridas son (k un entero):

6.1 $$\operatorname{sen}(v+k\pi) = (-1)^k \operatorname{sen} v$$

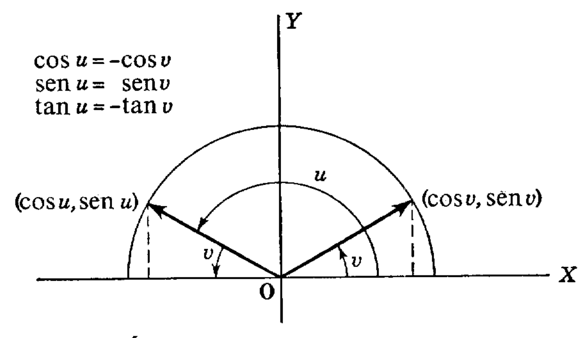
6.2 $$\cos(v+k\pi) = (-1)^k \cos v$$

6.3 $$\cos(-v) = \cos v$$

6.4 $$\operatorname{sen}(-v) = -\operatorname{sen} v$$

6.5 $$\tan(v+k\pi) = \tan v$$

6.6 $$\tan(-v) = -\tan v.$$



Ángulo u en el 2º cuadrante

$u = \pi - v$

FIGURA 17

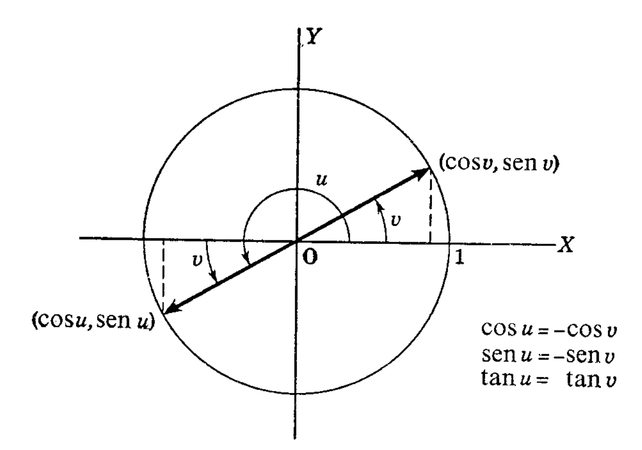
Por ejemplo

$$\text{sen}\,(110°) = \text{sen}\,(180° - 70°) = \text{sen}\,70°$$

y

$$\text{sen}\,(-690°) = \text{sen}\,(-4 \cdot 180° + 30°) = (-1)^{-4}\,\text{sen}\,30° = \text{sen}\,30°.$$

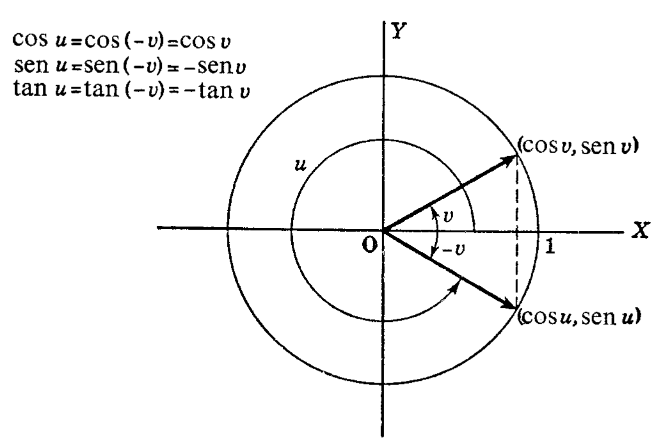
Las figuras 17, 18, y 19 facilitan recordar la reducción.



Ángulo u en el 3er cuadrante

$u = \pi + v$

FIGURA 18



Ángulo u en el 4° cuadrante

$u = 2\pi - v$

FIGURA 19

Problemas

1. Calcúlense los siguientes valores mediante el uso de tablas o una regla de cálculo:

a) $\cos 325°8'$ *b*) $\cos(-291°)$

c) $\operatorname{sen} 32.8\pi$ *d*) $\operatorname{sen} 32.8$

e) $\tan 318°15'$ *f*) $\operatorname{sen} 195°$

g) $\cos \frac{8\pi}{7}$ *h*) $\operatorname{sen} \frac{8\pi}{7}$

i) $\cot \frac{7\pi}{5}$ *j*) $\sec \frac{7\pi}{5}$

k) $\csc 200°$ *l*) $\tan \frac{15\pi}{8}$

m) $\cos \frac{15\pi}{8}$ *n*) $\operatorname{sen} \frac{15\pi}{8}$.

2. El *ángulo de inclinación* de un vector distinto de cero **a** es el ángulo de la dirección positiva del eje X a **a**; es decir, el ángulo de inclinación de **a** es $\angle$**ia**. Dada la longitud l y el ángulo de inclinación θ de un vector **a**, demuéstrese que

$$\mathbf{a} = (l \cos \theta, l \operatorname{sen} \theta).$$

Ilústrese geométricamente.

3. Dada la longitud l y el ángulo de inclinación θ de un vector **a**, determínese el vector **a**.

a) $l = 4, \theta = \frac{3\pi}{8}$ *b*) $l = 2, \theta = 220°$

c) $l = 18, \theta = -0.10$ *d*) $l = 18, \theta = -0.01$.

4. Sea α el ángulo de inclinación de una fuerza **F**. La magnitud F de la fuerza es la longitud del vector **F**; es decir, $F = |\mathbf{F}|$. Determínense los componentes horizontal y vertical de la fuerza **F**.

a) $F = 250, \quad \alpha = 32°15'$

b) $F = 250, \quad \alpha = 117°20'$

c) $F = 48, \quad \alpha = -18°$

d) $F = 93.2, \quad \alpha = 142°20'$

e) $F = 10.6, \quad \alpha = -96°38'$.

7. ÁNGULO DE INTERSECCIÓN DE RECTAS

Se asigna una dirección a una recta especificando un vector no nulo paralelo a la recta. Cuando se ha asignado una dirección a una recta, se le llama *recta dirigida*. Si **a** es un vector no nulo paralelo a una recta $\mathcal{L}$, entonces podemos asignar a $\mathcal{L}$ la dirección **a** o la dirección $-\mathbf{a}$. Supondremos en toda esta sección que todas las rectas están dirigidas como sigue: tomamos como dirección para cada recta $\mathcal{L}$ un vector distinto de cero paralelo a $\mathcal{L}$ con componente positivo horizontal si $\mathcal{L}$ no es vertical y con componente vertical positivo si $\mathcal{L}$ es vertical. Así pues, a toda recta $\mathcal{L}$ no vertical se le asigna la dirección $(1, m)$, donde m es la pendiente de $\mathcal{L}$ (figura 20), y a toda recta vertical se le asigna la dirección $\mathbf{j} = (0, 1)$. El propósito de esta convención es evitar ambigüedad cuando hablamos del ángulo de intersección de una recta con otra.

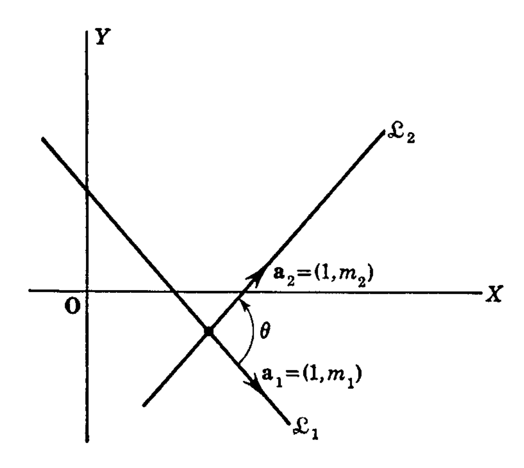


FIGURA 20

7.1 Definición. ***El ángulo de intersección de una recta*** $\mathcal{L}_1$ ***con una recta*** $\mathcal{L}_2$ *denotado por* $\angle\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$, *es, por definición, el ángulo de la dirección positiva de* $\mathcal{L}_1$ *a la dirección positiva de* $\mathcal{L}_2$*; es decir,* $\angle\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = \angle\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, *donde* $\mathbf{a}_1$ *y* $\mathbf{a}_2$ *son vectores en la dirección de* $\mathcal{L}_1$ *y* $\mathcal{L}_2$, *respectivamente.*

7.2 Definición. ***El ángulo de inclinación de una recta*** $\mathcal{L}$ *es el ángulo de intersección del eje X con* $\mathcal{L}$*; es decir, si* **a** *está en la dirección de* $\mathcal{L}$, *el ángulo de inclinación de* $\mathcal{L}$ *es* $\angle\mathbf{ia}$.

Como se indica en la figura 21, se sigue, de las anteriores definiciones y la convención adoptada, que podemos también suponer para el ángulo de

inclinación α de una recta que $\frac{-\pi}{2} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ $(-90^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ)$. Las rectas verticales tienen el ángulo de inclinación $\pi/2$.

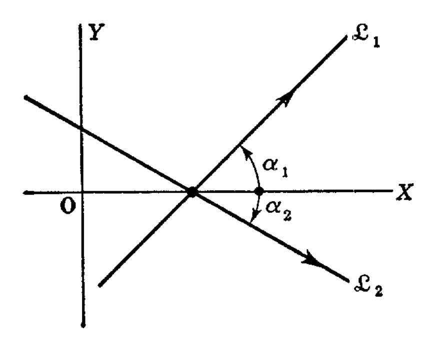


FIGURA 21

Si $\mathcal{L}$ es una recta no vertical de pendiente m, entonces es claro que (figura 22)

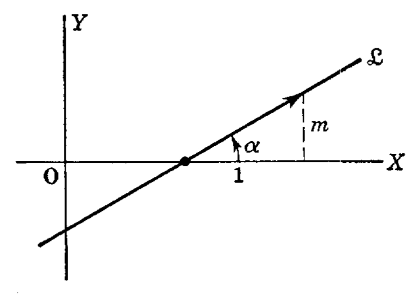


FIGURA 22

7.3 $$m = \tan \alpha,$$

donde α es el ángulo de inclinación de $\mathcal{L}$.

7.4 Ejemplo. Encuéntrese el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (5.31, 2.85) y (7.31, −3.47).

SOLUCIÓN. La recta es paralela al vector (7.31, −3.47) − (5.31, 2.85) = (2.00, −6.32), y de aquí

$$m = \tan \alpha = -3.16$$

o

$$\tan(-\alpha) = 3.16.$$

Consultando las tablas trigonométricas, encontramos que tres cifras significativas para la tan $(-\alpha)$ nos permiten concluir que

$$72°24' < -\alpha < 72°28'$$

o

$$\alpha = -72°26' \pm 2'.$$

Consideremos seguidamente el problema de determinar el ángulo θ (figura 20) de intersección de un par de rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. Si una de las rectas es vertical o si las rectas son ortogonales, el ángulo de intersección se determina fácilmente. Suponemos por ello que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son rectas no verticales y que no son ortogonales. Sean m_1 y m_2 las pendientes de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente. Entonces $\mathcal{L}_1$ está en la dirección $\mathbf{a}_1 = (1, m_1)$ y $\mathcal{L}_2$ está en la dirección $\mathbf{a}_2 = (1, m_2)$. Sea $\theta = \angle \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 = \angle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$. Entonces

7.5 $$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\mathbf{a}_1{}^{\perp} \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2} = \frac{(-m_1, 1)\cdot(1, m_2)}{(1, m_1)\cdot(1, m_2)} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Nótese que el signo del denominador de la anterior expresión es el de cos θ y el signo del numerador es el de sen θ. El cuadrante en el que el ángulo se encuentra puede, entonces, determinarse por el signo de $m_2 - m_1$ y el signo de $1 + m_1 m_2$: $+/+$ es el 1er cuadrante, $+/-$ es el 2º cuadrante, $-/-$ es el 3er cuadrante y $-/+$ es el 4º cuadrante. Si $m_2 - m_1 = 0$, $\theta = 0$. Si $1 + m_1 m_2 = 0$, las rectas son ortogonales ($\theta = \pi/2$ si $m_2 - m_1 > 0$ y $\theta = 3\pi/2$ si $m_2 - m_1 < 0$). Así pues, por el uso de 7.5 y la determinación del cuadrante de θ, el ángulo θ puede encontrarse por medio de las tablas.

Problemas

1. Determínese el ángulo de inclinación de las siguientes rectas:

a) La recta cuya ecuación es $x - y = 6$.

b) La recta que pasa por el punto (1, 0) en la dirección (2, 5).

c) La recta cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 3 + 8t$$
$$y = -4 + 6t.$$

2. Encuéntrese el ángulo de intersección de los siguientes pares de rectas:

a) Rectas *a* y *b* en el problema 1.

b) Rectas *a* y *c* en el problema 1.

c) Rectas *b* y *c* en el problema 1.

3. Encuéntrese el ángulo de intersección de $\mathcal{L}_1$ con $\mathcal{L}_2$ donde:

a) $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$

b) $m_1 = -3$ y $m_2 = 2$

c) $m_1 = -2$ y $m_2 = 3$

d) $m_1 = 2$ y $m_2 = -\frac{1}{2}$

e) $m_1 = -\frac{1}{2}$ y $m_2 = 2$

f) $m_1 = 2$ y $\mathcal{L}_2$ es el eje *Y*.

En cada uno de los restantes problemas estímese la precisión de la contestación dada.

4. Determínese el ángulo de inclinación de las siguientes rectas:

a) La recta cuya ecuación es $2.86x+5.32y = 184$.

b) La recta cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = 5.234+7.4355t$$
$$y = -2.075-85.36t.$$

5. Encuéntrese el ángulo de intersección de $\mathcal{L}_1$ con $\mathcal{L}_2$ donde:

a) $m_1 = 3.22$ y $m_2 = -5.67$

b) $\mathcal{L}_1 = \{(14.3t, 18.36t)\}$ y una ecuación de $\mathcal{L}_2$ es $165x+132y = 256$

c) $m_1 = -4.87$ y $m_2 = 0.560$

d) $m_1 = -6.374$ y $\mathcal{L}_2$ es el eje Y.

6. Calcúlese en radianes el ángulo del vector **a** al vector **b**.

a) $\mathbf{a} = (30, -10)$, $\mathbf{b} = (18,70)$

b) $\mathbf{a} = (-23, 50)$, $\mathbf{b} = (13, 36)$

c) $\mathbf{a} = (3.07, 1.56)$, $\mathbf{b} = (4.20, -38.2)$.

8. SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Sean **a**, **b**, **c** los lados de un triángulo (figura 23) donde $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

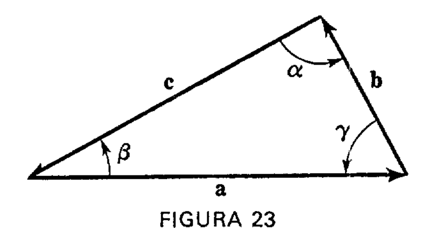


FIGURA 23

Los ángulos $\alpha = \angle \mathbf{c}(-\mathbf{b})$, $\beta = \angle \mathbf{a}(-\mathbf{c})$, y $\gamma = \angle \mathbf{b}(-\mathbf{a})$ se llaman *ángulos interiores opuestos a los lados* **a**, **b**, y **c**, respectivamente.

Un triángulo se dice que está "resuelto" si conocemos los ángulos interiores α, β, y γ, y las longitudes $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, y $|\mathbf{c}|$ de los lados. El problema en la resolución de un triángulo es encontrar todos los ángulos y las longitudes de todos los lados partiendo de cierta información dada acerca del triángulo. Al hablar de triángulos, siempre supondremos que la medida de todos los ángulos interiores es siempre de entre 0 y π (o, si está en grados, de entre 0° y 180°). Es costumbre general cuando se

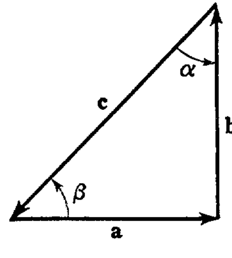


FIGURA 24

trata de medidas en el plano expresar los ángulos en grados y así lo haremos nosotros en toda esta sección.

Para un triángulo rectángulo ($\gamma = 90°$), no necesitamos fórmulas especiales para resolver el triángulo —solamente un conocimiento de las funciones trigonométricas y un juego de tablas. Para un triángulo rectángulo (figura 24), tenemos, por la definición de funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{c}|} = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{c}|} = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan \alpha = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}.$$

Sabemos también que, como la suma de los ángulos de un triángulo es π radianes o 180°, para un triángulo rectángulo

$$\alpha+\beta = 90°;$$

y por el teorema de Pitágoras sabemos que

$$|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2.$$

8.1 Ejemplo. Resuélvase el triángulo rectángulo ($\gamma = 90°$) dados $|\mathbf{c}| = 24.0$ y $\alpha = 21.0°$.

SOLUCIÓN. $\beta = 90°-21.0° = 69.0°$

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}| \operatorname{sen} 21.0° = 24.0\,(.358) = 8.60$$
$$|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| \cos 21.0° = 24.0\,(.934) = 22.4.$$

Es a menudo aconsejable, al efectuar un cálculo, formalizar el procedimiento calculatorio. Puede ser que en alguna otra ocasión se quiera resolver un problema análogo o puede ser que se estén preparando instrucciones calculatorias para una máquina o para una persona (un ayudante) que ha de efectuar los cálculos para uno. Tomamos el problema de la resolución de un triángulo rectángulo como un ejemplo sencillo.

8.2 Ejemplo. Establézcase una rutina calculatoria para la solución de un triángulo rectángulo dado un ángulo (en grados) y un lado del triángulo.

SOLUCIÓN. Dados: $\gamma = 90°$, $|\mathbf{c}|$ y α (en grados).
A determinar: $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, y β (en grados).
Condición: $0 < \alpha < 90°$.

Explicación: Las fórmulas básicas usadas son

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{c}|}, \qquad \cos\alpha = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{c}|}, \qquad \alpha+\beta = 90^\circ .$$

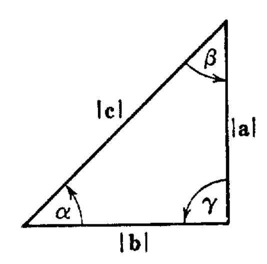


FIGURA 25

Esquema:

α	$\lvert\mathbf{c}\rvert$
sen α	$\lvert\mathbf{a}\rvert$
cos α	$\lvert\mathbf{b}\rvert$
β	

nS (= n cifras significativas)

Programa: α y $|\mathbf{c}|$: dados

sen α, cos α: de las tablas trigonométricas, α en grados

$|\mathbf{a}|$: $|\mathbf{c}|$ sen α

$|\mathbf{b}|$: $|\mathbf{c}|$ cos α

β : $90^\circ-\alpha$

Ejemplo:

21°000	24.000
.35837	8.6009
.93358	22.406
69°000	

5S

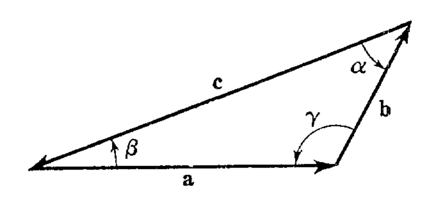


FIGURA 26

El siguiente par de fórmulas se usan para la solución de un triángulo general. Considérese un triángulo (figura 26) con lados **a**, **b**, **c**, donde $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$ y los ángulos interiores son $\alpha = \angle \mathbf{c}(-\mathbf{b})$, $\beta = \angle \mathbf{a}(-\mathbf{c})$, $\gamma = \angle \mathbf{b}(-\mathbf{a})$.

8.3 $$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\gamma \qquad \text{(ley de los cosenos)}$$

8.4 $$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{|\mathbf{a}|} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{|\mathbf{b}|} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{|\mathbf{c}|} \qquad \text{(ley de los senos).}$$

PRUEBA DE LA LEY DE LOS COSENOS.

$$|\mathbf{c}|^2 = (-\mathbf{c})\cdot(-\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$
$$= |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\gamma,$$

ya que $$\cos\gamma = \frac{\mathbf{b}\cdot(-\mathbf{a})}{|\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}|}.$$

PRUEBA DE LA LEY DE LOS SENOS. (Figura 27.) Es suficiente probar la ley de los senos para cualquier par de lados y los ángulos correspondientes. Mostraremos que $\operatorname{sen}\alpha/|\mathbf{a}| = \operatorname{sen}\gamma/|\mathbf{c}|$. Nótese primero que

$$\mathbf{b}^{\perp}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{b}^{\perp}\cdot(-\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{b}^{\perp}\cdot(-\mathbf{a}).$$

Ya que

$$\mathbf{b}^{\perp}\cdot\mathbf{c} = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\operatorname{sen}\angle\mathbf{bc} = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\operatorname{sen}(180^\circ-\alpha)$$
$$= |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\operatorname{sen}\alpha$$

y

$$\mathbf{b}^{\perp}\cdot(-\mathbf{a}) = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}|\operatorname{sen}\angle\mathbf{b}(-\mathbf{a}) = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}|\operatorname{sen}\gamma,$$

obtenemos entonces

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{|\mathbf{a}|} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{|\mathbf{c}|}.$$

FIGURA 27

8.5 Ejemplo. Dado un triángulo con $|\mathbf{a}| = 70$, $|\mathbf{b}| = 40$, y $\gamma = 34°$, encuéntrese $|\mathbf{c}|$.

SOLUCIÓN.

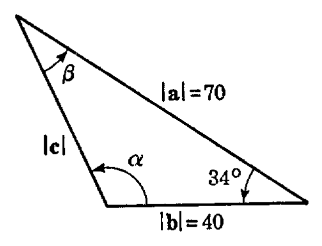


FIGURA 28

Usando la ley de los cosenos, tenemos

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}|^2 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\gamma \\ &= (49+16-56\cdot 0.83)10^2 = 19\times 10^2. \end{aligned}$$

Luego $|\mathbf{c}| = 43$.

8.6 Ejemplo. Resuélvase el triángulo dados $|\mathbf{b}| = 6.000$, $\beta = 41°31'$, y $\alpha = 25°7'$.

SOLUCIÓN. (Véase pág. 304.)

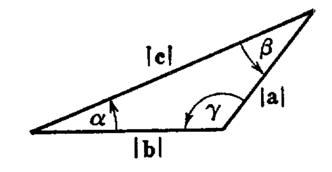


FIGURA 29

Dados: $|\mathbf{b}|$, β, y α (grados).
A determinar: $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{c}|$, y γ.
Condición: $0 < \beta+\alpha < 180°$.
Explicación: las fórmulas básicas usadas son

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{|\mathbf{a}|} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{|\mathbf{b}|} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{|\mathbf{c}|} \quad \text{(ley de los senos)}$$

y

$$\alpha+\beta+\gamma = 180°.$$

Esquema:	β	α	$|\mathbf{b}|$
			γ
	sen β	sen α	$|\mathbf{a}|$
		sen γ	$|\mathbf{c}|$

Programa: $\beta, \alpha, |\mathbf{b}|$: dados

$\gamma : 180° - \beta - \alpha$

sen β, sen α, sen γ: de tablas trigonométricas (ángulos en grados)

$$|\mathbf{a}| : \frac{|\mathbf{b}|}{\text{sen}\,\beta} \cdot \text{sen}\,\alpha$$

$$|\mathbf{c}| : \frac{|\mathbf{b}|}{\text{sen}\,\beta} \cdot \text{sen}\,\gamma.$$

Ejemplo 8.6:	41°13′	25°7′	6.000	4S
			113°40′	
	.65891	.42446	3.865	
		.91590	8.340	

Problemas

1. Resuélvanse los siguientes triángulos rectángulos en que el ángulo recto es γ.

a) $|\mathbf{c}| = 15$, $\alpha = 22°$
b) $|\mathbf{c}| = 40$, $\alpha = 55°$
c) $|\mathbf{a}| = 12$, $|\mathbf{b}| = 3$
d) $|\mathbf{b}| = 43$, $|\mathbf{c}| = 70$
e) $|\mathbf{b}| = 92.3$, $\alpha = 35°4'$
f) $|\mathbf{b}| = 21.3$, $\beta = 21.3°$
g) $\mathbf{c} = (33.85)$ y $\mathbf{b}$ es horizontal.

2. Resuélvase el triángulo dados:

a) $|\mathbf{a}| = 8$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\gamma = 30°$
b) $|\mathbf{a}| = 8$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\gamma = 120°$
c) $|\mathbf{c}| = 10$, $\alpha = 40°$, $\gamma = 50°$
d) $|\mathbf{b}| = 36.02$, $|\mathbf{c}| = 148.35$, $\alpha = 15°27'$
e) $|\mathbf{a}| = 7.03$, $|\mathbf{c}| = 9.28$, $\beta = 60°21'$
f) $|\mathbf{a}| = 7.03$, $\alpha = 125°11'$, $\beta = 24°57'$
g) Los vértices del triángulo son (1, 3), (−2, 5), y (8, 7)
h) $\mathbf{a} = (25, 0)$, $\mathbf{b} = (20,53)$
i) $\mathbf{b} = (16,0)$, $\mathbf{c} = (-8, 12)$.

3. Una antena está montada sobre una torre. Desde un punto sobre el suelo a 458 metros de la base de la torre los ángulos de elevación al

tope y a la base de la antena son, respectivamente, 36°21′ y 30°05′. ¿Qué altura tiene la antena?, ¿cuál es la altura de la antena sobre el suelo?

4. Un barco marcha hacia el este con velocidad de 47.5 kilómetros por hora (25.6 nudos). La dirección del faro es N 63°48′ E; 36 minutos después la posición del faro es N 18°32′ E. ¿A qué distancia se encuentra el barco del faro?

5. Un aeroplano vuela hacia el oeste a una velocidad de 900 kilómetros por hora respecto al suelo. La velocidad del viento respecto al suelo es de 80.5 kilómetros por hora en la dirección S 50° E. ¿Cuál es la velocidad del viento respecto al aeroplano? (La velocidad es un vector. La dirección del vector es la dirección del movimiento y la longitud del vector es la cuantía o magnitud de la velocidad. Si $\mathbf{v}_{AB}$ es la velocidad de un cuerpo A respecto a un cuerpo B, entonces $\mathbf{v}_{AC} = \mathbf{v}_{AB} + \mathbf{v}_{BC}$.)

6. Un aeroplano está volando con una velocidad respecto al aire de 804.5 kilómetros por hora siendo constantemente la dirección del aeroplano (cola-cabeza) N 30° E. La velocidad del viento es de 40.2 kilómetros por hora en la dirección N 15° O. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano respecto al suelo?, ¿en qué dirección debería colocarse el aeroplano para que su vuelo tuviera la dirección N 30° E?

7. La resultante de dos fuerzas de 29.5 kg y 15.3 kg, respectivamente es una fuerza de 17.2 kg. ¿Cuál es el ángulo entre las fuerzas?

9. COORDENADAS POLARES

Un vector queda determinado completamente por su longitud y su ángulo de inclinación (dirección). Así pues, si $r > 0$, entonces $(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$ es el vector (único) de longitud r y ángulo de inclinación θ (figura 30).

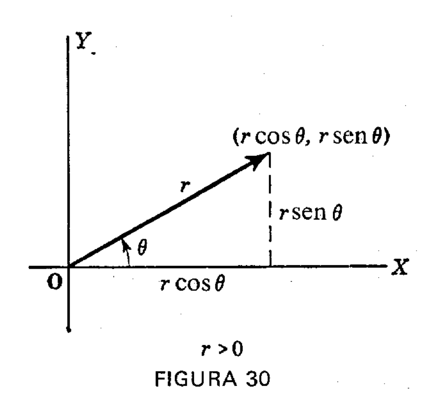


FIGURA 30

Consideremos también el vector $(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)$ cuando $r < 0$. Entonces $-r > 0$ y $(-r\cos\theta,\, -r\operatorname{sen}\theta)$ es el vector de longitud $-r$ y ángulo de inclinación θ. Ahora bien $(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)$ es el vector $(-r\cos\theta,\, -r\operatorname{sen}\theta)$ girado un ángulo π (figura 31) —es decir, si $r < 0$ entonces $(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)$ es el vector de longitud $-r$ y ángulo de inclinación $\theta+\pi$. Resumimos este resultado en el siguiente lema.

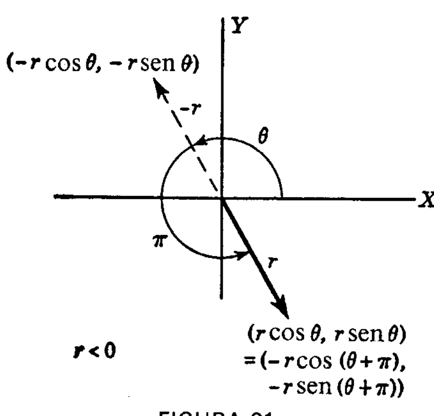


FIGURA 31

9.1 Lema. *Dados los números reales* r $(r \neq 0)$ *y* θ,

a) $(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)$ *es el vector de longitud* r *y ángulo de inclinación* θ *si* $r > 0$,

b) $(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)$ *es el vector de longitud* $-r$ *y ángulo de inclinación* $\theta+\pi$ *si* $r < 0$.

Si $r = 0$, no tenemos ninguna dificultad en identificar el vector; es el vector cero.

En esta sección nuestro principal interés está en considerar $(r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)$ como un punto en R^2 (un radio vector). Los números reales r y θ se llaman *coordenadas polares* del punto $(x, y) = (r\cos\theta,\, r\operatorname{sen}\theta)$. La relación entre coordenadas polares r, θ, y coordenadas rectangulares x, y puede también expresarse por el par de ecuaciones

9.2
$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Dadas las coordenadas polares r, θ de un punto, la ecuación (9.2) nos dice cómo calcular las coordenadas rectangulares x, y del punto.

9.3 Ejemplo. Encontrar las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas polares son: *a)* $r = 2$, $\theta = \pi/2$, *b)* $r = 2$, $\theta = 3\pi/2$, *c)* $r = -2$, $\theta = \pi/2$, *d)* $r = 2$, $\theta = 5\pi/2$.

SOLUCIÓN.

a) $(x, y) = (2 \cos \pi/2, 2 \text{ sen } \pi/2) = (0, 2)$
b) $(x, y) = (2 \cos 3\pi/2, 2 \text{ sen } 3\pi/2) = (0, -2)$
c) $(x, y) = (-2 \cos \pi/2, -2 \text{ sen } \pi/2) = (0, -2)$
d) $(x, y) = (2 \cos 5\pi/2, 2 \text{ sen } 5\pi/2) = (2 \cos \pi/2, 2 \text{ sen } \pi/2)$
$= (0, 2).$

El anterior ejemplo nos muestra que a un mismo punto se le pueden asignar distintas coordenadas polares. Esto es cierto, desde luego, ya que

$$(r \cos \theta, r \text{ sen } \theta) = (-1)^k r(\cos(\theta+k\pi), \text{sen}(\theta+k\pi)),$$

donde k es un entero cualquiera. Otra forma de decir lo mismo es que para valores dados de x, y, las soluciones r, θ a las ecuaciones (9.2) no son únicas. A menudo es conveniente tener una correspondencia uno-uno entre los puntos de R^2 y las coordenadas polares asignadas a los puntos de R^2 (distintos del origen). Puede conseguirse esto, por ejemplo, por las restricciones $r > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi\rangle$. Cuando surja la necesidad de tales restricciones, se enunciarán explícitamente.

Una función real f de variable real puede usarse para definir un conjunto $\mathcal{E}$ en R^2 conviniendo en que $r = f(\theta)$ y θ son las coordenadas polares de puntos en R^2; es decir

$$\mathcal{E} = \{(r \cos \theta, r \text{ sen } \theta) \mid r = f(\theta)\}.$$

El conjunto $\mathcal{E}$ se llama *gráfica polar* de f, y la ecuación $r = f(\theta)$ se llama *ecuación polar* de $\mathcal{E}$.

Por ejemplo, si f es la función constante c, entonces

$$r = c$$

es la ecuación polar de la circunferencia con centro en el origen y radio $|c|$. La simplicidad de esta expresión analítica para la ecuación de una circunferencia es la razón por la que las coordenadas polares son tan adecuadas para los problemas en que aparecen simetrías circulares o en problemas en que aparecen circunferencias o fronteras circulares.

9.4 Ejemplo. Encuéntrese una ecuación polar de una circunferencia que pase por el origen con su centro en el eje X (figura 32).

SOLUCIÓN 1. Sea $(a, 0)$ el centro de la circunferencia. Entonces, una ecuación de la circunferencia es

$$(x-a)^2+y^2 = a^2,$$

o

$$x^2-2ax+y^2 = 0.$$

Si r, θ son coordenadas polares de un punto sobre la circunferencia, entonces

$$(r\cos\theta)^2 - 2ar\cos\theta + (r\operatorname{sen}\theta)^2 = 0$$

o

$$r(r-2a\cos\theta) = 0\,;$$

es decir,

$$r = 0 \quad \text{o} \quad r = 2a\cos\theta.$$

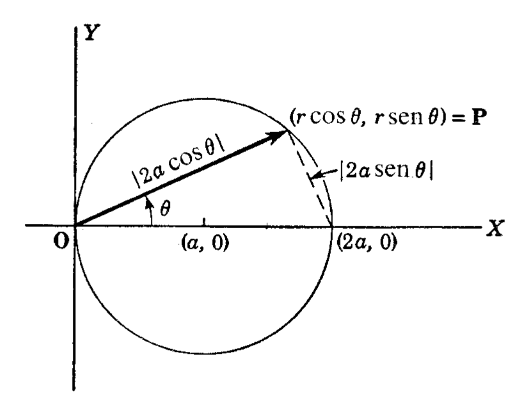


FIGURA 32

Tomando $\theta = \pi/2$, vemos que $r = 2a\cos\theta$ incluye el caso $r = 0$. Los pasos anteriores pueden ser recorridos en orden inverso y de ello se sigue que la gráfica polar de $r = 2a\cos\theta$ es la circunferencia. (En realidad, todos los puntos de la circunferencia se obtienen tomando $\theta \in \langle -\pi/2, \pi/2]$.)

Solución 2. Sea $\mathbf{P} = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ un punto sobre la circunferencia $|\mathbf{P}-(a, 0)|^2 = a^2$ (figura 32). Tenemos ahora

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\cdot[\mathbf{P}-(2a, 0)] &= [\mathbf{P}-(a, 0)+(a, 0)]\cdot[\mathbf{P}-(a, 0)-(a, 0)] \\ &= |\mathbf{P}-(a, 0)|^2 - a^2 = a^2 - a^2 = 0\,; \end{aligned}$$

es decir, el diámetro horizontal de la circunferencia es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por el radio vector $\mathbf{P}$ a un punto sobre la circunferencia y el diámetro. De donde la distancia de $\mathbf{P}$ al origen es $|2a\cos\theta|$. Así pues, si $\mathbf{P} = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ es un punto sobre la circunferencia, $|r| = |2a\cos\theta|$ y

$$r = 2a\cos\theta \quad \text{o} \quad r = -2a\cos\theta.$$

Si $r = 2a\cos\theta$, entonces

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}-(a, 0)|^2 &= a^2|(2\cos^2\theta - 1, 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)|^2 \\ &= a^2|(\cos 2\theta, \operatorname{sen} 2\theta)|^2 = a^2\,; \end{aligned}$$

es decir, todos los puntos de la gráfica polar de $r = 2a\cos\theta$ se encuentran sobre la circunferencia.

Si $r = -2a\cos\theta$, entonces

$$\begin{aligned}|\mathbf{P}-(a, 0)|^2 &= a^2|(2\cos^2\theta+1, 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)|^2 \\ &\geqslant a^2(1+2\cos^2\theta)^2\,;\end{aligned}$$

es decir, $|\mathbf{P}-(a, 0)|^2 = a^2$ solamente si $\cos\theta = 0$. De donde vemos que la ecuación polar de la circunferencia es

$$r = 2a\cos\theta$$

$r = -2a\cos\theta$ es la circunferencia de radio a con centro en $(-a, 0)$ (ejemplo 9.5).

El anterior ejemplo ilustra cómo puede determinarse la ecuación polar de una curva. El problema recíproco es el de determinar la gráfica polar de una función dada. Ahora bien, dada una función f, la gráfica polar de la función es el conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,|\,r = f(\theta)\} \\ &= \{(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\operatorname{sen}\theta)\},\end{aligned}$$

y vemos que

$$\begin{aligned}x &= f(\theta)\cos\theta = g(\theta) \\ y &= f(\theta)\operatorname{sen}\theta = h(\theta)\end{aligned}$$

son ecuaciones paramétricas de $\mathcal{E}$. Así pues, las ecuaciones polares son un caso particular —e importante— de ecuaciones paramétricas. El parámetro θ tiene un significado geométrico: es el ángulo de inclinación del radio vector al punto sobre $\mathcal{E}$ si $r > 0$.

9.5 Ejemplo. Descríbase la gráfica polar de $f = |2\cos|$.

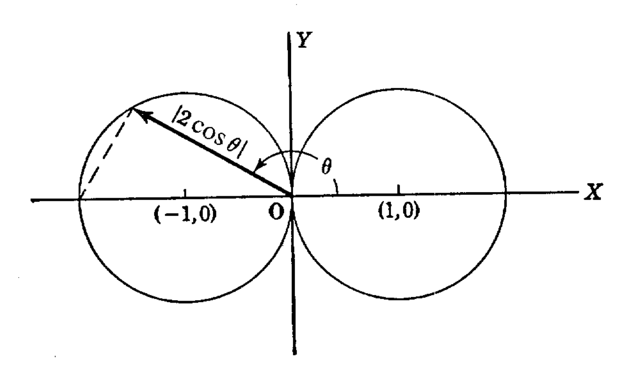


FIGURA 33

SOLUCIÓN. La ecuación polar es

$$r = f(\theta) = |2 \cos \theta|.$$

Como $f(\theta+\pi) = f(\theta)$, entonces $(f(\theta+\pi) \cos (\theta+\pi), f(\theta+\pi) \operatorname{sen} (\theta+\pi)) = -(f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \operatorname{sen} \theta)$. De donde la gráfica polar de |2 cos| es simétrica respecto al origen. Sabemos ya, por el ejemplo 9.4, que en el 1er y en el 4º cuadrantes la gráfica es una circunferencia de radio 1. De donde la gráfica polar de |2 cos| es el par de circunferencias que se muestran en la figura 33.

Problemas. (El papel de las coordenadas polares es muy útil en el ploteo de las gráficas polares y pueden usarse en los problemas que siguen.)

1. Localícense (gráficamente) y determínense analíticamente los puntos cuyas coordenadas polares son:

a) $r = 2, \theta = \pi/4$
b) $r = -2, \theta = \pi/4$
c) $r = -2, \theta = 5\pi/4$
d) $r = 1.5, \theta = 1.0$
e) $r = 3, \theta = 120°$
f) $r = -1, \theta = 280°$.

2. Encuéntrense coordenadas polares para cada uno de los siguientes puntos:

a) $(-1, 0)$
b) $(1, 1)$
c) $(-1, -1)$
d) $(3, -2)$
e) $(-13, 15)$
f) $(-22, -11)$.

3. Dibújense las gráficas polares de:

a) $r = 3$
b) $r = \theta$ *(espiral de Arquímedes)*
c) $r = \cos \theta + \operatorname{sen} \theta$
d) $r = \dfrac{2}{2 - \cos \theta}$
e) $r = \dfrac{1}{1 - \cos \theta}$
f) $r = \dfrac{2}{1-2 \cos \theta}$.

4. Discútase la gráfica polar de:

a) $r = \operatorname{sen} 2\theta$ *(rosa de cuatro hojas)*
b) $r = 1 + \cos \theta$ *(cardioide)*
c) $r = \operatorname{sen} 3\theta$ *(rosa de tres hojas)*.

5. La gráfica polar de $r = 1/\theta$ se llama *espiral hiperbólica.* Discútase la gráfica polar de esta curva y mediante el ploteo de puntos correspondientes a pequeños valores de θ demuéstrese que la curva parece aproximarse a la recta $y = 1$ cuando θ se aproxima a cero. (Esto significa que $y = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$ parece aproximarse a 1 cuando θ se aproxima a 0.)

6. Si F es una función real con dominio en R^2 (o un subconjunto de R^2), entonces

$$\mathcal{E} = \{(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) \mid F(r, \theta) = c\}$$

se llama *gráfica polar de la ecuación* $F(r, \theta) = c$ y $F(r, \theta) = c$ se llama *ecuación polar* de $\mathcal{E}$. Discútanse y dibújense las gráficas polares de las siguientes ecuaciones:

a) $\theta = c$ *b*) $r\,\text{sen}\,\theta = c$
c) $r\cos\theta = c$ *d*) $\cos\theta + \text{sen}\,\theta = 0$
e) $r\cos(\theta - \pi/4) = 0$ *f*) $r^2 = a^2\,\text{sen}\,2\theta$ *(lemniscata)*.

7. Una sección cónica es el conjunto (locus) de puntos **P** con la propiedad de que la razón de la distancia del punto **P** a un punto fijo **F** *(el foco)* a la distancia del punto **P** a una recta fija *(la directriz)* es una constante e *(la excentricidad)*. Con la directriz y el foco situados como se muestra en la figura 34, pruébese que una ecuación polar de una sección cónica es

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}.$$

(Elipse: $0 < e < 1$; parábola: $e = 1$; hipérbola: $e > 1$.)

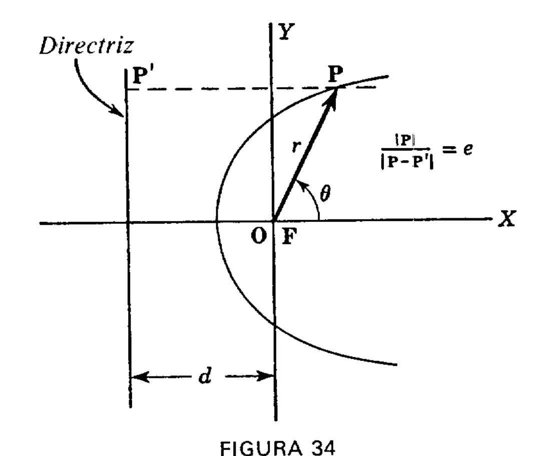


FIGURA 34

8. Encuéntrense ecuaciones en coordenadas rectangulares correspondientes a las ecuaciones polares de los problemas 3, 4, y 6.

9. Encuéntrense ecuaciones polares correspondientes a las ecuaciones rectangulares:

a) $(x^2 + y^2)^2 = ax^2y$ *(bifolio)*
b) $x^2 + y^2 = 2ay$

c) $y^2(a-x) = x^3$ *(cisoide de Diocles)*
d) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ *(lemniscata de Bernoulli)*
e) $y^2 = x^2 \dfrac{a-x}{a+x}$ *(estrofoide)*
f) $\begin{cases} x = t \cos \omega t \\ y = t \operatorname{sen} \omega t. \end{cases}$

10. RESUMEN

En este capítulo hemos comenzado nuestro estudio de las funciones trigonométricas. Las dos funciones trigonométricas básicas son las funciones circulares seno y coseno. Hemos aprendido algunas de las propiedades básicas de estas funciones y, a través de sus relaciones con el ángulo, hemos visto la aplicación de estas funciones a la trigonometría geométrica.

Problemas de repaso

1. Demuéstrese que el perímetro de un polígono regular de 32 lados inscrito en una circunferencia de radio 1 igual a 64 sen $(\pi/32)$.

2. Demuéstrese que sen $x = 16 \cos (x/2) \cos (x/4) \cos (x/16) \operatorname{sen} (x/16)$.

3. Usando los problemas 1 y 2, la identidad $2 \cos^2 x/2 = 1 - \cos x$, y una tabla de raíces cuadradas, hállese un valor aproximado de π.

4. Determínense todos los números θ que satisfacen:

a) $\operatorname{sen} \theta = 0$
b) $\cos \theta = 0$
c) $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$
d) $\cos \theta = \frac{1}{2}$
e) $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}$
f) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$
g) $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$
h) $\tan \theta = 0$.

5. Dibújense las gráficas de cada una de las siguientes funciones:

a) $5 \operatorname{sen} \circ \left(4I - \dfrac{\pi}{4}\right)$
b) $10 \cos \circ I^2$.

6. Determínense todas las rotaciones alrededor del origen que llevan la recta de pendiente 3 que pasa por el origen sobre a) el eje X, b) el eje Y.

***7.** Por definición $\angle \mathbf{ab}$ es una rotación. En realidad, si θ es una medida en radianes de $\angle \mathbf{ab}$, entonces $\angle \mathbf{ab} = U_\theta$. Si φ es una medida en radianes de $\angle \mathbf{cd}$, defínase

$$\angle \mathbf{ab} + \angle \mathbf{cd} = U_\theta \circ U_\varphi = U_{\theta-\varphi}.$$

Demuéstrese que:

$$\angle \mathbf{ab} + \angle \mathbf{bc} = \angle \mathbf{ac}.$$

***8.** Considérese el triángulo con lados y ángulos interiores que se ilustra en la figura 35. El ángulo $\delta = \angle \mathbf{ab}$ se llama *ángulo externo* obtenido por prolongación del lado **a**. Los ángulos α y β se dice que son sus ángulos interiores *opuestos*. Demuéstrese que (Euclides, Libro I, Proposición 32):

El ángulo exterior obtenido por la prolongación de un lado de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a $\angle 180°(U_\pi)$.

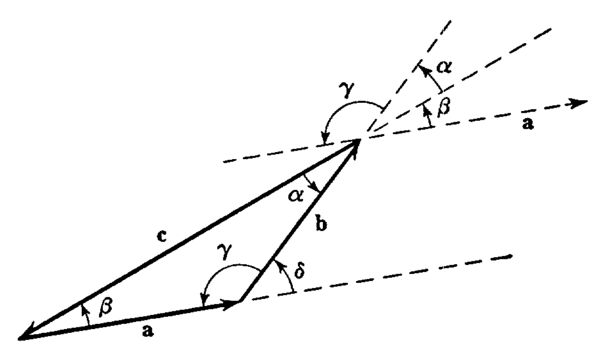


FIGURA 35

Sugerencia. Según el problema 15*d* de la sección 5, pág. 292, $\alpha = c(-b) = \angle(-c)b$. Nótese también que $\angle a(-a) - \angle 180°$.

9. Demuéstrese que: $\angle \mathbf{ab} = \angle \mathbf{cd}$ implica $\angle \mathbf{ac} = \angle \mathbf{bd}$.

Sugerencia. Es conveniente observar que puede suponerse que **a**, **b**, **c**, y **d** son vectores unitarios. Sean $U_\alpha = \angle \mathbf{ab}$, y $U_\gamma = \angle \mathbf{ac}$. $U(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, $U_\gamma(\mathbf{a}) = \mathbf{c}$, y $U_\gamma(\mathbf{b}) = ?$.

10. Demuéstrese que $\angle \mathbf{ab} = \angle \mathbf{cd}$ si y sólo si hay una rotación U con la propiedad de que $U(\mathbf{a})$ está en la dirección de **c** y $U(\mathbf{b})$ está en la dirección de **d**.

11. Una *milésima de artillería* es una unidad para medidas angulares correspondiente a 1/6 400 de la circunferencia. Una *milésima de infantería* es el ángulo subtendido por el arco de circunferencia cuya longitud es 1/1 000 del radio. La ventaja de estas unidades es que la longitud de la cuerda subtendida por un arco de circunferencia de radio r y ángulo θ es para ángulos pequeños aproximadamente $r\theta/1\,000$. Discútase la conversión de estas unidades a radianes y grados y viceversa.

12. Los vértices de un triángulo son (1, 1), (3, 8), y (−2, 5). Determínense en grados los ángulos interiores del triángulo.

13. ¿Cuál es el rango de *a*) tangente? ¿*b*) cotangente? ¿*c*) secante? ¿*d*) cosecante?

14. Determínense (aproximadamente) todos los valores de x que satisfacen:

a) $\operatorname{sen} x = -1.0356$
b) $\operatorname{sen} x = 0.84147$
c) $\sec x = \frac{1}{2}$
d) $\tan x = -14.101$
e) $\csc^2 x = 2$
f) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

15. Desde un punto de un valle, el ángulo de elevación de una montaña es $7°48'$. Desde un punto 9.65 kilómetros más cercano, el ángulo de elevación es $10°57'$. ¿Qué altura tiene la montaña sobre el valle?

16. Se le dan instrucciones a un aviador de volar hacia el norte y volver al portaaviones una hora después. Entretanto, el portaaviones marcha en dirección SE a 37.04 kilómetros por hora (20 nudos). Si la velocidad del avión es de 2 685 kilómetros (1 450 nudos), ¿cuánto puede volar hacia el norte?

17. Dibújese la gráfica polar de:

a) $r = 2+4\cos\theta$
b) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$
c) $r\cos(\theta-\alpha) = d$
d) $\begin{cases} r = 1/t \\ \theta = 8\pi t, \; t \in \langle 0, \infty \rangle. \end{cases}$

18. La latitud de Cabo Kennedy, Florida, es aproximadamente 28.5°. ¿Cuál es allí la velocidad lineal producida por la rotación de la tierra?

Capítulo 7

$\sum_{k=1}^{n} a_k$

Inducción matemática

1. INTRODUCCIÓN

En los teoremas que hasta ahora hemos probado pueden distinguirse dos diferentes métodos de prueba, el llamado "directo" y el "indirecto". En el método directo de prueba, procedemos de la hipótesis a la conclusión a través de una serie de deducciones cada una de las cuales está justificada por algún axioma o por algún teorema previamente probado. En las pruebas indirectas, comenzamos por suponer que la conclusión no es cierta y, a continuación, a través de una serie de deducciones, obtenemos una proposición que contradice la hipótesis del teorema. Luego, bajo la hipótesis, la conclusión del teorema no puede ser falsa y debe, por tanto, ser cierta.

Si un teorema es una proposición que ha de verificarse para todos los

enteros positivos, entonces es a menudo posible construir una prueba basada sobre un principio llamado de "inducción matemática".

En este capítulo introducimos el principio de inducción matemática. En realidad, damos dos principios distintos de inducción matemática. El primero dado, llamado Principio de inducción, es, para nuestros propósitos el más importante. El otro principio, llamado Segundo principio de inducción, es poco usado en esta obra y, por ello, lo analizamos muy brevemente.

Aunque estos dos principios de inducción matemática están estrechamente relacionados, probar uno partiendo del otro, es realmente complicado. En lugar de hacer esto, lo que haremos será probar ambos principios basándonos en otra propiedad de los enteros positivos llamada el principio del buen orden.

2. EL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Suponemos que los enteros positivos poseen la siguiente propiedad, llamada *principio del buen orden.*

Todo conjunto no nulo de enteros positivos posee un elemento mínimo.

Por ejemplo, el entero mínimo en el conjunto de todos los enteros positivos pares es 2 y el entero mínimo en el conjunto de todos los enteros positivos impares es 1. Por no haber definido los enteros positivos con suficiente cuidado como subconjunto de los números reales, no intentamos una prueba del principio del buen orden, sino que lo consideramos como un axioma adicional.

Usando el principio del buen orden, podemos probar:

2.1 Teorema. (Principio de inducción.) *Cualquier conjunto* $\mathcal{S}$ *de enteros positivos que*

1) *contiene a* 1 *y*
2) *contiene a* $m+1$ *siempre que contiene a* m

es el conjunto de todos los enteros positivos.

PRUEBA. Sea $\mathfrak{T}$ el conjunto de todos los enteros positivos que no están en $\mathcal{S}$. Queremos mostrar que $\mathfrak{T}$ es el conjunto nulo. Supongamos que $\mathfrak{T}$ no es nulo. Entonces, por el principio del buen orden, $\mathfrak{T}$ tiene un elemento mínimo; llamémosle b. Como $1 \in \mathcal{S}$, $b \neq 1$. Luego $b-1$ es un entero positivo. Como $b-1$ es menor que b, $b-1$ no está en $\mathfrak{T}$, luego $b-1 \in \mathcal{S}$. Pero entonces, por (2), $b = (b-1)+1 \in \mathcal{S}$. Pero esto contradice que $b \in \mathfrak{T}$, y por ello la suposición de que $\mathfrak{T}$ no es nulo no puede verificarse. Por consiguiente $\mathfrak{T}$ es el nulo; es decir, $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros positivos.

Después de reflexionar un poco, el estudiante se dará cuenta de que el principio de inducción es una propiedad de los enteros positivos que ha

usado implícitamente muchas veces. Parece perfectamente natural argüir como sigue: Sea $\mathcal{S}$ un conjunto de enteros positivos que satisfacen (1) y (2) del teorema 2.1. Por (1), $1 \in \mathcal{S}$. Entonces por (2), $1+1 = 2 \in \mathcal{S}$. De nuevo por (2), $2+1 = 3 \in \mathcal{S}$. Continuando en esta forma podemos mostrar que cualquier entero positivo n está en $\mathcal{S}$. Este argumento carece de precisión en el punto en que decimos "continuando en esta forma". Hemos mostrado que la validez de este tipo de argumento es una consecuencia del principio del buen orden.

Ilustramos ahora el principio de inducción con algunos ejemplos.

2.2 Ejemplo. Pruébese que si $0 < x < 1$ y n es un entero positivo cualquiera, $0 < x^n < 1$.

PRUEBA. Tomemos una x tal que $0 < x < 1$. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los enteros positivos n tales que $0 < x^n < 1$. Queremos mostrar que $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros positivos. Llegaremos a tal conclusión al mostrar que $\mathcal{S}$ tiene las propiedades (1) y (2) del teorema 2.1 y aplicar el principio de inducción.

1) $1 \in \mathcal{S}$ por hipótesis.
2) Si $m \in \mathcal{S}$ —es decir, si $0 < x^m < 1$—, entonces $0 < x^{m+1} < 1$ por el teorema 6.5 del capítulo 1, pág. 35 y, por tanto, $m+1 \in \mathcal{S}$.

Luego, por el principio de inducción, $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros positivos y la prueba es completa.

2.3 Ejemplo. Pruébese que para cualquier número real $p \geqslant -1$ y cualquier entero positivo n, $(1+p)^n \geqslant 1+np$.

PRUEBA. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de los enteros positivos n para los cuales $(1+p)^n \geqslant 1+np$.

1) $1 \in \mathcal{S}$ ya que $(1+p)^1 = 1+1 \cdot p$.
2) Si $m \in \mathcal{S}$ —es decir, si $(1+p)^m \geqslant 1+mp$— entonces

$$\begin{aligned}(1+p)^{m+1} &= (1+p)(1+p)^m \\ &\geqslant (1+p)(1+mp) \qquad \text{(axioma } O_4\text{)} \\ &= 1+p+mp+mp^2 \\ &\geqslant 1+(m+1)p.\end{aligned}$$

Así pues, $m \in \mathcal{S}$ implica $m+1 \in \mathcal{S}$. Aplicando el principio de inducción, podemos concluir que $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros positivos y el teorema queda probado.

2.4 Ejemplo. Demuéstrese que si n es un entero positivo cualquiera, entonces $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ es un entero.

SOLUCIÓN. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los enteros positivos n tales que $\frac{1}{3}(n^3+2n)$ es un entero.

1) $1 \in \mathcal{S}$, ya que $\frac{1}{3}(1+2) = 1$.

2) Si $m \in \mathcal{S}$ —es decir, si $\frac{1}{3}(m^3+2m)$ es un entero— entonces

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{3}[(m+1)^3+2(m+1)] &= \tfrac{1}{3}(m^3+3m^2+3m+1+2m+2)\\ &= \tfrac{1}{3}(m^3+2m)+m^2+m+1\end{aligned}$$

es un entero. Luego $m \in \mathcal{S}$ implica $m+1 \in \mathcal{S}$.

Luego $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros positivos según el principio de inducción.

Problemas

1. Pruébese que: si $x > 1$ y n es un entero positivo cualquiera, entonces $x^n > 1$.

2. Pruébese que: si $x < 0$ y n es un entero positivo cualquiera, entonces $x^{2n-1} < 0$.

3. Pruébese que: si $x \neq 0$ y n es un entero positivo cualquiera, entonces $x^{2n} > 0$.

4. Si n es un entero positivo, muéstrese que los siguientes números son enteros:

a) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *b*) $\dfrac{n^3+3n^2+2n}{3}$

c) $\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}$ *d*) $\dfrac{n^4+2n^3+n^2}{4}$.

5. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ un conjunto de números.
Si $|a_1| \leqslant 1$ y $|a_n - a_{n-1}| \leqslant 1$, pruébese que $|a_n| \leqslant n$.

6. Demuéstrese que $a-b$ es un factor de a^n-b^n para cualquier entero positivo n. *Sugerencia:* $a^n-b^n = a(a^{n-1}-b^{n-1})+b^{n-1}(a-b)$.

7. Demuéstrese que $a+b$ es un factor de $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ para todo entero positivo n.

8. Pruébese que para cualquier número real $p \geqslant 0$ y cualquier entero positivo n, $(1+p)^n \geqslant 1+np+\dfrac{n(n-1)p^2}{2}$.

9. Demuéstrese que:

a) $\cos(n\pi) = (-1)^n$ para todos los enteros positivos n.

b) Si f es una función periódica con periodo T, entonces $f(t+nT)=f(t)$ para todo $t \in \mathfrak{D}_f$ y para todos los enteros positivos n.

10. Demuéstrese que:

a) $(ab)^n = a^n b^n$ para todos los enteros positivos n.

b) $(a^m)^n = a^{mn}$ para todos los enteros positivos m y n.

11. Demuéstrese que:

a) $(-1)^{2n} = 1$ para todos los enteros positivos n.

b) $(-1)^{2n-1} = -1$ para todos los enteros positivos n.

12. Pruébese que si $0 < a < b$ entonces $0 < a^n < b^n$ para todos los enteros positivos n.

13. Demuéstrese que si $a_0 = b$ y $a_n = ca_{n-1}$ para todos los enteros positivos n, entonces $a_n = bc^n$ para todos los enteros positivos n.

3. SUMAS

La prueba de fórmulas para ciertas sumas de números es otro ejemplo del uso de la inducción matemática. Si tenemos una fórmula que parece verificarse para todos los enteros positivos —quizá la hemos adivinado porque sabemos que se verifica para unos pocos primeros enteros positivos— entonces, la inducción matemática es una forma de comprobar si la fórmula es cierta para todos los enteros positivos.

Consideremos, por ejemplo, el problema de encontrar una fórmula para la suma de los primeros n enteros. Calculamos primero esta suma para pequeños valores de n; haciendo $S_n = 1+2+\cdots+n$, tenemos: $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$, $S_4 = 10$, y $S_5 = 15$. A continuación intentamos —por inteligente adivinación— encontrar una fórmula para S_n que sea satisfecha por los valores calculados; tal fórmula es $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Podríamos comprobar esta fórmula para algunos valores de n más grandes y ganar así una mayor confianza en la corrección de la fórmula. Pero esto está lejos de probar la validez de la fórmula para todos los números positivos. No podemos estar seguros de que la fórmula no fallará para algún valor de n de los no comprobados. Como veremos, es muy fácil probar esta fórmula por el principio de inducción.

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los enteros positivos n para los que la fórmula es válida.

1) $1 \in \mathcal{S}$. Esto ya se ha verificado: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$.

2) Si $m \in \mathcal{S}$ —es decir, si $S_m = 1+2+\cdots+m = \frac{m(m+1)}{2}$, entonces

$$S_{m+1} = 1+2+\ldots+m+(m+1) = S_m+(m+1)$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{(m+1)\cdot(m+2)}{2}.$$

Así pues, $m \in \mathcal{S}$ implica $m+1 \in \mathcal{S}$, y por tanto $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros positivos según el principio de inducción.

Otro ejemplo de este tipo es encontrar la suma de los cuadrados de los primeros n enteros, es decir, $1^2+2^2+\cdots+n^2$. Como anteriormente, podríamos representar estas sumas por algún símbolo, tal como el S_n, pero tales sumas son de aparición frecuente en análisis y se usa para ellas una notación estándar.

3.1 Definición. *Si n es un entero positivo y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números, entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+ \ldots +a_n .$$

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ se lee "la suma de a_k desde $k = 1$ hasta $k = n$". Por ejemplo, la suma de los primeros n enteros puede escribirse $1+2+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k$. ("$\sum$" es la sigma mayúscula, la letra griega correspondiente a "S".)

Volviendo al problema de encontrar la suma de los cuadrados de los primeros n enteros: $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$, procedemos como anteriormente. Primero encontramos $\sum_{k=1}^{n} k^2$ para algunos valores pequeños de n.

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{2} k^2 = 1^2+2^2 = 5$$

$$\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2+2^2+3^2 = 14$$

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 30.$$

Para estos valores de n, la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6}(2n^3+3n^2+n) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

se satisface.

Probamos ahora, por inducción matemática, que esta fórmula se verifica para todos los enteros positivos n. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de los enteros positivos n para los que la fórmula se verifica.

1) $1 \in \mathcal{S}$, ya que $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = \frac{1}{6}(2)(3) = 1$.

2) Si $m \in \mathcal{S}$ —es decir, $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m}{6}(m+1)(2m+1)$— entonces

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2$$

$$= \frac{m}{6}(m+1)(2m+1) + (m+1)^2$$

$$= \frac{m+1}{6}[m(2m+1) + 6(m+1)]$$

$$= \frac{m+1}{6}(2m^2 + 7m + 6)$$

$$= \frac{m+1}{6}(m+2)(2m+3).$$

Luego $m \in \mathcal{S}$ implica $m+1 \in \mathcal{S}$. Luego $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros positivos según el principio de inducción y la fórmula está probada para todos los enteros positivos.

Adviértase que, en los ejemplos anteriores, no fuimos capaces de derivar fórmulas por inducción matemática. Tuvimos primero que imaginarnos una fórmula en la que teníamos alguna razón para suponer correcta. Luego es cuando usábamos la inducción matemática para establecer la validez de la fórmula para todos los enteros positivos. Derivaremos estas mismas fórmulas de otro modo en la próxima sección.

Problemas

1. Escríbanse en forma explícita las siguientes sumas.

a) $\sum_{k=1}^{5} k$

b) $\sum_{k=1}^{5} (6-k)$

c) $\sum_{j=1}^{7} r^j$

d) $\sum_{i=2}^{6} a^{2i}$

e) $\sum_{k=1}^{4} r^{2k-1}$

f) $\sum_{k=1}^{5} (k^3+3k^2)$.

2. Pruébese cada una de las siguientes fórmulas por inducción matemática.

a) $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

c) $\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\operatorname{sen} 2nx}{2 \operatorname{sen} x}$

d) $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = 1+(n-1)2^n$

e) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)$

f) $\sum_{k=1}^{n} (3k^2-3k+1) = n^3$.

3. Después de calcular la suma para algunos valores pequeños de n, propóngase una fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos impares. Pruébese a continuación la fórmula por inducción matemática.

4. Pruébese que:

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}, \quad (r \neq 1).$$

5. Calcúlense los valores de las siguientes sumas.

a) $\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1}$

b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{5}{3^{k-1}}$

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$.

6. ¿La siguiente fórmula es válida para todos los enteros positivos n?

$$\sum_{k=1}^{n} 8k = (2n+1)^2-1+(n-1)(n-2)(n-3).$$

7. Escríbanse explícitamente las siguientes sumas.

a) $\sum_{k=1}^{5} [k-(k-1)]$

b) $\sum_{k=1}^{5} [k^2-(k-1)^2]$

c) $\sum_{k=1}^{5} [k^3-(k-1)^3]$

d) $\sum_{k=1}^{5} (a_k-a_{k-1})$.

8. Pruébese que $a_k \leqslant b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ implica $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k$.

9. Pruébese que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

4. PROPIEDADES DE $\sum_{k=1}^{n} a_k$

En el capítulo 1 se señaló que podíamos sumar tres números a_1, a_2, y a_3 en dos formas: $(a_1+a_2)+a_3$ y $a_1+(a_2+a_3)$. Sin embargo, como $(a_1+a_2)+a_3 = a_1+(a_2+a_3)$, podíamos prescindir de los paréntesis y escribir simplemente $a_1+a_2+a_3$. Por inducción matemática puede probarse la proposición correspondiente para la suma de cualquier número finito de números reales. Esto nos permite definir $\sum_{k=1}^{n} a_k$ como lo hicimos en la definición 3.1.

La ley conmutativa de la adición puede extenderse análogamente a cualquier suma finita de números reales. Es decir, la posición de los términos en una suma puede cambiarse sin que quede afectado el resultado. Así pues, en particular,

4.1
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}\,.$$

$\sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1}$ tiene los mismos términos que $\sum_{k=1}^{n} a_k$ pero el orden en que los términos están escritos es el inverso. El estudiante debe comprobar lo afirmado para el caso $n = 5$.

Pasamos ahora a probar la extensión de la ley distributiva para cualquier suma finita.

4.2 Teorema. *Para cualquier entero positivo n*

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

PRUEBA. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de los enteros positivos n para los que $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$.

1) $1 \in \mathcal{S}$, ya que $\sum_{k=1}^{1} ca_k = ca_1 = c\sum_{k=1}^{1} a_k$.

2) Si $m \in \mathcal{S}$ —es decir, $\sum_{k=1}^{m} ca_k = c\sum_{k=1}^{m} a_k$—, entonces

$$\sum_{k=1}^{m+1} ca_k = \sum_{k=1}^{m} ca_k + ca_{m+1}$$

$$= c\sum_{k=1}^{m} a_k + ca_{m+1}$$

$$= c\left(\sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}\right) \qquad \text{(axioma D)}$$

$$= c \sum_{k=1}^{m+1} a_k \,.$$

Así pues $m \in \mathcal{S}$ implica $m+1 \in \mathcal{S}$, de donde, por el principio de inducción, $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros positivos.

Otra propiedad de las sumas que tendremos ocasión de usar es:

4.3 Teorema. *Para cualquier entero positivo n*

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \,.$$

PRUEBA. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los enteros positivos n para los que

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \,.$$

1) $1 \in \mathcal{S}$, ya que $\sum_{k=1}^{1} (a_k + b_k) = a_1 + b_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k + \sum_{k=1}^{1} b_k$.

2) Si $m \in \mathcal{S}$ —es decir, $\sum_{k=1}^{m} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} b_k$— entonces

$$\sum_{k=1}^{m+1} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{m} (a_k + b_k) + (a_{m+1} + b_{m+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} b_k + a_{m+1} + b_{m+1}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} b_k + b_{m+1}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} a_k + \sum_{k=1}^{m+1} b_k \,.$$

Así pues, $m \in \mathcal{S}$ implica $m+1 \in \mathcal{S}$, de donde $\mathcal{S}$, por el principio de inducción, es el conjunto de todos los enteros positivos.

Las propiedades de las sumas finitas pueden usarse para evaluar $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$ directamente sin necesidad de fórmulas tentativas (con pruebas subsiguientes por inducción matemática). Consideremos primero $\sum_{k=1}^{n} k$.

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Entonces

$$2S_n = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) \qquad [4.1]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (n+1) \qquad [4.3]$$

$$= n(n+1).$$

Por tanto

4.4
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Obsérvese que $\sum_{k=1}^{n} (n+1)$ expresa la suma de n términos cada uno de los cuales es igual a $n+1$. En general

4.5
$$\sum_{k=1}^{n} c = nc.$$

Derivaremos ahora la fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k$ de otra forma. Este método está basado en la fórmula

4.6
$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

y tiene la ventaja de que puede también ser usado para derivar fórmulas $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$, etc. La validez de (4.6) es clara si escribimos explícitamente la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{n-1} - a_{n-2}) + (a_n - a_{n-1})$$

$$= a_n - a_0 .$$

La fórmula (4.6) puede también probarse de un modo más formal:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n - a_0 .$$

Si $a_k = k^2$ entonces (4.6) toma la forma $\sum_{k=1}^{n} (k^2 - (k-1)^2) = n^2$.

Así

$$n^2 = \sum_{k=1}^{n} [k^2-(k-1)^2]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} (-1) \qquad [4.3]$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k-n. \qquad [4.2, 4.5]$$

Por tanto $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(n^2+n)$.

La fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k^2$ puede derivarse de un modo análogo. Adviértase que $\sum_{k=1}^{n} (k^3-(k-1)^3) = n^3$. Por otra parte,

$$\sum_{k=1}^{n} [k^3-(k-1)^3] = \sum_{k=1}^{n} (3k^2-3k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (3k^2-3k) + \sum_{k=1}^{n} 1 \qquad [4.3]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} (-3k)+n \qquad [4.3, 4.5]$$

$$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2-3\sum_{k=1}^{n} k+n. \qquad [4.2]$$

Por tanto

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2-3\sum_{k=1}^{n} k+n = n^3$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left(n^3+3\sum_{k=1}^{n} k-n\right)$$

$$= \frac{1}{3}[n^3+\tfrac{3}{2}n(n+1)-n] \qquad [4.4]$$

$$= \frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n).$$

Usando la anterior técnica podemos derivar una fórmula para $\sum_{k=1}^{n} k^3$ y luego para $\sum_{k=1}^{n} k^4$ y así sucesivamente.

Problemas

1. Escríbanse explícitamente las sumas: $\sum_{k=1}^{6} 3a_k$ y $3\sum_{k=1}^{6} a_k$.

2. Escríbanse explícitamente las sumas: $\sum_{k=1}^{5} (a_k+b_k)$ y $\sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k$.

3. Derívese la fórmula $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)$.

4. Calcúlense las siguientes sumas:

a) $\sum_{k=1}^{10} k^2$

b) $\sum_{k=3}^{8} k^2$

c) $\sum_{k=1}^{n} (k^2+2k+1)$

d) $\sum_{k=1}^{n} (k^3+k)$

e) $\sum_{k=4}^{12} (k-3)^3$

f) $\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)^2$.

5. Derívese la fórmula para la suma geométrica:

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a\,\frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1).$$

Sugerencia: Considérese $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} - r\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$.

6. Derívese la fórmula para la suma aritmética:

$$\sum_{k=1}^{n} (a+kd) = an+\tfrac{1}{2}n(n+1)d.$$

5. EL TEOREMA DEL BINOMIO

Antes de enunciar el teorema del binomio, introducimos unas cuantas notaciones estándar para cantidades que se presentan en el enunciado del teorema.

5.1 Definición. $n!$, *léase "factorial de n", donde n es un entero no negativo, se define como sigue:*

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n, \text{ para } n \geqslant 1, \text{ y}$$
$$0! = 1.$$

Por analogía, con la notación para sumas, podíamos usar una pi mayúscula para representar productos. Luego

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

El coeficiente binomial, $\binom{n}{k}$, está definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}, \quad k \leqslant n.$$

Enunciamos ahora el teorema del binomio:

5.2 Teorema. (Teorema del binomio.) *Si x y y son números reales distintos de cero y n es un entero positivo, entonces*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

PRUEBA. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de los enteros positivos n para los que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

1) $1 \in \mathcal{S}$ ya que

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \frac{1!}{1!\,0!} x^1 y^0 + \frac{1!}{0!\,1!} x^0 y^1$$

$$= x+y.$$

2) Si $m \in \mathcal{S}$, es decir, si

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k,$$

entonces

$$\begin{aligned}(x+y)^{m+1} &= (x+y)\cdot(x+y)^m \\ &= (x+y) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k (x+y) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left[\binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k + \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1}\right]\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x^{m+1-k} y^k$$

$$= \binom{m}{0} x^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}\right] x^{m+1-k} y^k + \binom{m}{m} y^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k$$

como $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m+1}{0}$, $\binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$, y $\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$

(problemas 1a y 5a). Así pues, $m \in \mathcal{S}$ implica $m+1 \in \mathcal{S}$, de donde $\mathcal{S}$, por el principio de inducción, es el conjunto de todos los enteros positivos.

5.3 Ejemplo. Encuéntrese la expansión de $(a-2)^4$.

SOLUCIÓN

$$(a-2)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} (-2)^k$$

$$= \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 (-2)^1 + \binom{4}{2} a^2 (-2)^2 + \binom{4}{3} a^1 (-2)^3 + \binom{4}{4} (-2)^4$$

$$= a^4 + 4a^3(-2) + 6a^2(-2)^2 + 4a(-2)^3 + (-2)^4$$

$$= a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16.$$

Problemas

1. Demuéstrese que

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

b) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

c) $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$.

2. Usando las propiedades del problema 1, calcúlese

a) $\binom{6}{k}$, $\quad k = 0, 1, \ldots, 6$

b) $\binom{8}{k}$, $\quad k = 0, 1, \ldots, 8$

c) $\binom{100}{k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 97, 98, 99, 100.$

3. Desarróllense:

a) $(2x-1)^5$ *b)* $(x-y)^7$

c) $(2a+3)^4$ *d)* $(3x^2+2)^6$

e) $(\sqrt{x}-2)^5$ *f)* $(\sqrt{x}-\sqrt[3]{y})^6$.

4. Determínese $(98)^5$ por desarrollo de $(10^2-2)^5$.

5. *a)* Demuéstrese que $\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}=\binom{m+1}{k}$, donde $k = 1, \ldots, m$.

b) Constrúyase un arreglo triangular de números, conocido como triángulo de Pascal, como sigue:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

En este arreglo, los números que ocupan los lugares primero y último en cada fila son 1. Los números en cada uno de los otros lugares se obtienen tomando la suma de los dos números sobre cada lado de él en la fila precedente. Demuéstrese que los números en la fila $(n+1)$-ésima son los coeficientes de la expansión binomial de $(x+y)^n$.

6. Proporciónese el término que contiene y^7 en la expansión de $(x+y)^{11}$.

7. Proporciónese el término que contiene x^8 en la expansión de

$$\left(2x^3 - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^5.$$

8. Demuéstrese que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

6. EL SEGUNDO PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Más adelante tendremos ocasión de usar otro tipo de inducción matemática. Está dada en el siguiente teorema y probada con base en el principio del buen orden.

6.1 Teorema. (Segundo principio de inducción.) *Cualquier conjunto* $\mathcal{S}$ *de enteros positivos que*

1) *contiene* 1 *y*

2) *contiene* $m+1$ *siempre que contiene todos los enteros positivos* $k \leqslant m$,

es el conjunto de todos los enteros positivos.

PRUEBA. Sea $\mathfrak{J}$ el conjunto de los enteros positivos que no están en $\mathcal{S}$. Supongamos que $\mathfrak{J}$ no sea vacío o nulo. Entonces, por el principio del buen orden, $\mathfrak{J}$ tiene un elemento mínimo; llamémosle b. Entonces, para todo $k \leqslant b-1$, $k \in \mathcal{S}$. Por tanto, $b \in \mathcal{S}$ por (2). Pero $b \in \mathfrak{J}$ y por tanto $b \notin \mathcal{S}$. Esta contradicción muestra que nuestra suposición de que $\mathfrak{J}$ era no vacío no puede verificarse. $\mathfrak{J}$ vacío significa que $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros positivos.

7. RESUMEN

El propósito de este capítulo es el de introducir dos conceptos que serán de considerable importancia en nuestro estudio del análisis; la prueba por inducción matemática y la notación con sigmas para la suma.

El principio de inducción y el segundo principio de inducción proporcionan un método de prueba de ciertas proposiciones que se verifican para todos los enteros positivos. La notación con sigmas para las sumas se introdujo en este momento no solamente para dar ejemplos del uso de la inducción matemática sino también para que el estudiante pueda familiarizarse con esta importante notación.

Problemas de repaso

1. Pruébese que $2^n > n$, donde n es un entero positivo.

2. Demuéstrese que $\dfrac{4^n-1}{3}$ es un entero, si n es un entero positivo.

3. Demuéstrese que $\dfrac{5^n-1}{4}$ es un entero, si n es un entero positivo.

4. Demuéstrese que $x^n \geqslant x$ si $x \geqslant 1$, donde n es un entero positivo.

5. Pruébese que si $\mathcal{S}$ es un conjunto de enteros mayores que o iguales a un entero q_0 para el que se verifican las siguientes dos proposiciones:

1) $q_0 \in \mathcal{S}$, y

2) $m \in \mathcal{S}$ implica $m+1 \in \mathcal{S}$,

entonces $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros mayores que o iguales a q_0.

6. Pruébese que $2^n < n!$, si n es un entero y $n \geqslant 4$.

7. Pruébese que $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

8. Pruébese que $\prod_{k=0}^{n} (1+a^{2^k}) = \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} \quad (a \neq 1)$.

9. Pruébese que $\prod_{k=2}^{2n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n+1}$.

10. Pruébese que $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(2k-1)x = \frac{1-\cos 2nx}{2 \operatorname{sen} x}$.

11. Derívese la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n).$$

12. Calcúlese

a) $\sum_{k=3}^{10} k^4$ *b*) $\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)^4$

c) $\sum_{k=1}^{8} (k+2)^4$ *d*) $\sum_{k=1}^{n} (k^2-3k+5)$.

13. Desarróllense, usando el teorema del binomio:

a) $(3x-2)^4$ *b*) $\left(x^2 y + \frac{1}{x}\right)^4$.

14. Determínese $(101)^6$ por desarrollo de $(10^2+1)^6$.

15. Encuéntrese el término que contiene $x^{12}y^2$ en la expansión de $\left(x^2 y - \frac{1}{y^2}\right)^8$.

16. Por el problema 6 de la sección 2, pág. 318, sabemos que $1-x$ es un factor de $1-x^n$, es decir, $1-x^n = (1-x)\,P(x)$. Usando la fórmula para una suma geométrica (problema 5, pág. 318), determínese $P(x)$.

Capítulo

$\lim_{x \mapsto n} x$

8

Límites y derivadas

"Si consideramos las matemáticas desde el comienzo del mundo hasta el tiempo en que Newton vivió, lo que él hizo fue con mucho la mitad mejor." — Leibniz.

1. INTRODUCCIÓN

La noción de diferenciación y de derivada se desarrolla durante siglos de dedicación humana a la resolución de ciertos problemas especiales, entre los que estaban el de encontrar las tangentes a las curvas y el problema con él relacionado de determinar los valores máximo y mínimo de las funciones. Las raíces del problema de las tangentes llegan, desde luego, hasta los griegos. Pero no fue sino hasta el comienzo del siglo XVII que los

primeros signos claros del concepto de derivada aparecen en la obra del matemático francés Pierre Fermat (1601-1665). En 1629 Fermat anticipaba la derivada en los métodos que usaba para encontrar los valores máximo y mínimo de funciones y en el procedimiento general que dio para encontrar la recta tangente en un punto a la gráfica de una función. Fermat concibió la recta tangente como la posición límite de la secante cuando los dos puntos de intersección de la secante con la curva se aproximan uno a otro. Pronto, el proceso de diferenciación había sido introducido y formalizado, y hacia finales del siglo XVII Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) hacían, independientemente, su gran descubrimiento.

Pero esto nos lleva adelante de nuestra historia y más allá de la discusión de la derivada. Fueron, aquellos, tiempos de grandes logros matemáticos y científicos y el hombre tuvo en sus manos una poderosa herramienta matemática. El conocimiento de esta herramienta era intuitivo y gran parte de lo que posteriormente se hizo con él fue exigir una base, una fundamentación más firme. La concepción de Fermat sobre lo que debía entenderse por "posición límite de la secante" era ciertamente vaga y los conceptos de límite y función quedaron sin ser aclarados a todo lo largo del siglo XVIII. Una vez que se alcanzó una mejor comprensión del concepto de límite, se hizo posible dar significados más precisos a conceptos tales como el de función continua, curva continua, continuidad de los procesos físicos, y las nociones de velocidad y dirección instantáneas de un cuerpo en movimiento.

Son tales conceptos los que van a constituir nuestro tema básico en este capítulo. Definiremos límite —el concepto fundamental— y estudiaremos sus propiedades básicas. La continuidad y la derivada se definirán después en términos de límite, siendo la derivada un tipo especial de límite relacionado geométricamente con la pendiente de la recta tangente y físicamente con la cuantía del cambio instantáneo. Las propiedades fundamentales de la derivada se estudiarán a continuación, derivaremos las reglas para la diferenciación, y finalmente presentaremos algunas aplicaciones para ilustrar las ideas. En el capítulo 10 volveremos a estudiar distintas aplicaciones con más detalle.

2. TANGENTES

En esta sección presentaremos una discusión intuitiva de las tangentes como un preliminar para la introducción del concepto de límite. En la sección 8, pág. 377, daremos una definición precisa de recta tangente.

Consideremos el siguiente problema geométrico. Sea g una función real de variable real dada y sea $P_0 = (x_0, g(x_0))$ un punto sobre la gráfica de g. ¿Qué es la recta tangente a la gráfica de g en $\mathbf{P}_0$? Primero debemos decidir qué es lo que queremos decir por recta tangente a una curva. La noción griega de recta tangente estaba limitada a las secciones cónicas (Apolonio,

hacia el 262 A.C.). Para los griegos, la recta tangente a una sección cónica era una recta con un punto sobre la curva y con todos los restantes fuera de la curva. Limitada a las secciones cónicas, esta definición era adecuada y permitió a los griegos establecer todas las propiedades importantes de las tangentes a las secciones cónicas; por ejemplo, el hecho de que la tangente a una circunferencia en un punto es ortogonal al radio de la circunferencia en ese punto. Una de las debilidades de la noción griega de tangente es que no puede extenderse fácilmente a arcos de curvas que no tengan "exterior" (figura 1) y que no sugiere —al contrario de lo que sucede con el concepto de tangente de Fermat— un procedimiento analítico para la determinación de las rectas tangentes.

En la figura 1, la recta $\mathfrak{T}$ es la tangente a la gráfica de g en el punto $\mathbf{P}_0$ de acuerdo con el concepto de Fermat de tangente. Esta recta $\mathfrak{T}$ tiene la propiedad de que la recta que pasa por $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{Q}$, llamada recta secante, se aproxima a la coincidencia con $\mathfrak{T}$ cuando $\mathbf{Q}$ se aproxima a $\mathbf{P}_0$ a lo largo de la curva. En realidad, ésta es la propiedad definitoria de la recta tangente.

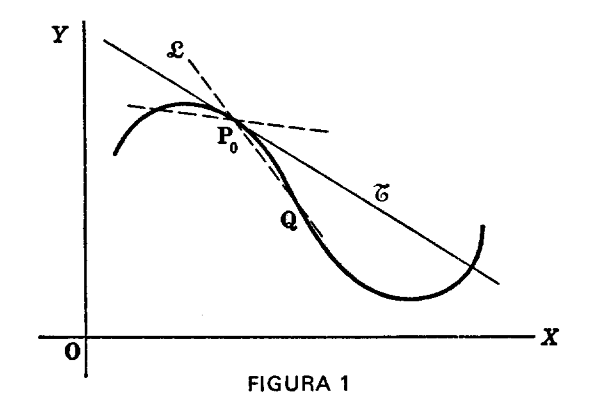


FIGURA 1

Para desarrollar un procedimiento analítico de determinación de rectas tangentes a curvas, debemos analizar lo que queremos expresar cuando decimos que la recta secante que pasa por $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{Q}$ se aproxima a la coincidencia con la recta tangente. Sea $\mathbf{Q} = (x, g(x))$ un punto sobre la gráfica de g distinto de $\mathbf{P}_0 = (x_0, g(x_0))$. La recta

$$\mathfrak{L} = \{\mathbf{P}_0 + t(\mathbf{Q} - \mathbf{P}_0) \mid t \in \mathrm{R}\} = \{(x_0, g(x_0)) + t(x - x_0, g(x) - g(x_0)) \mid t \in \mathrm{R}\}$$

que pasa por $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{Q}$ es una secante a la gráfica de g. La secante por $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{Q}$ es paralela a $\mathbf{Q} - \mathbf{P}_0 = (x - x_0, g(x) - g(x_0))$ y tiene pendiente

$$f(x) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \quad (x \neq x_0).$$

Si la gráfica de g no tiene interrupciones, entonces esperamos que $x - x_0$ próximo a cero sea equivalente a $\mathbf{Q}$ próximo a $\mathbf{P}_0$. Si existe un número m al

que podemos aproximar tanto como deseemos el valor de $f(x)$ tomando x suficientemente próximo a x_0 (es decir, tomando $x-x_0$ suficientemente pequeño), entonces el número m se llama límite de f en x_0 y está denotado por

2.1
$$m = \lim_{x_0} f = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Si existe un número m, entonces la recta que pasa por $\mathbf{P}_0$ con pendiente m es la recta tangente $\mathfrak{T}$. Así pues

$$\mathfrak{T} = \{(x_0, g(x_0)) + t(1, m)\}.$$

La pendiente de una curva en un punto $\mathbf{P}_0$ se define como la pendiente de la tangente a la curva en $\mathbf{P}_0$.

2.2 Ejemplo. Encuéntrese la tangente a la parábola $y = g(x) = x^2$ en el punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, x_0^2)$.

SOLUCIÓN. (Figura 2.) Sea $\mathbf{Q} = (x, x^2)$ un punto sobre la parábola distinto

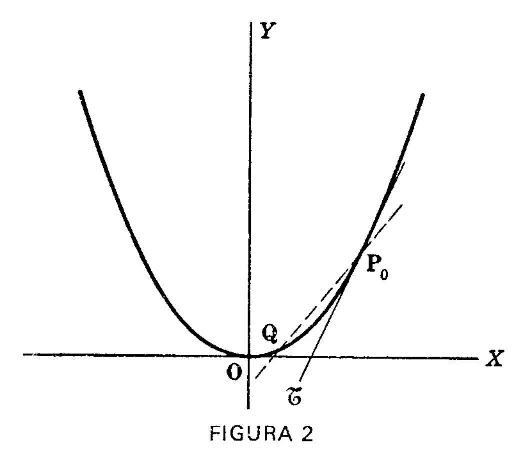


FIGURA 2

de $\mathbf{P}_0$ (es decir, con $x \neq x_0$). La secante que pasa por $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{Q}$ tiene pendiente

2.3
$$\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}.$$

Ahora bien, si $x \neq x_0$ entonces la fracción $\dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1$ y, si x está próxima a x_0, el factor $x+x_0$ está muy cercano a $2x_0$. En realidad, $\dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0}$ puede hacerse tan próximo a $2x_0$ como deseemos, tomando x suficientemente

próximo a x_0. La pendiente de la tangente en $\mathbf{P}_0$ es $2x_0$. Nótese que $\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}$ no está definida en x_0 ya que entonces tendríamos la división por cero. La recta tangente en $\mathbf{P}_0$ es

$$\mathfrak{T} = \{(x_0, x_0^2)+t(1, 2x_0)\} = \{(x_0+t, x_0^2+2tx_0)\}.$$

Tomando $n = (-2x_0, 1)$ obtenemos una ecuación para $\mathfrak{T}$:

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{P}-\mathbf{P}_0) = (-2x_0, 1)\cdot[(x, y)-(x_0, x_0^2)] = 0$$

o

$$y = x_0^2+2x_0(x-x_0) = 2x_0x-x_0^2.$$

Las frases tales como "x es próximo a x_0" y "$x+x_0$ es próximo a $2x_0$" que acabamos de emplear, carecen de precisión. Una de las cosas que debe hacerse, es obtener expresiones precisas para estas ideas. $|x-x_0|$ es la distancia de x a x_0 y es una medida de la proximidad de x a x_0. El requerimiento de que $x \neq x_0$ es equivalente al de que $0 < |x-x_0|$. Ahora bien, si $0 < |x-x_0| < \delta$ donde δ es algún número positivo, entonces $x \neq x_0$, y en el anterior ejemplo

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - 2x_0\right| = \left|\frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} - 2x_0\right|$$

$$= |x+x_0-2x_0| = |x-x_0| < \delta.$$

De aquí vemos que, ciertamente, podemos hacer

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - 2x_0\right|$$

tan pequeño como deseemos tomando $|x-x_0|$ suficientemente pequeño.

En la ecuación (2.1) tenemos un ejemplo de un "límite". Este particular límite, relacionado con el concepto geométrico de tangente de la gráfica de una función g en un punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, g(x_0))$, se llama "derivada de g en x_0".

Problemas

1. Encuéntrese la pendiente de la secante que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0 = (x_0, x_0^2+2)$ y $\mathbf{Q} = (x, x^2+2)$ de la gráfica de $g = I^2+2$ si

a) $x_0 = 0, x = x_0+h$ y $h = \pm 1, \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{1}{50}, \pm\frac{1}{100}, \pm\frac{1}{1000}$

b) $x_0 = 1, x = x_0+h$ y $h = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2^2}, \pm\frac{1}{2^4}, \pm\frac{1}{2^8}$.

2. Estímese la pendiente de la tangente a la gráfica de $I^{1/2}$ en

a) $x_0 = 1$ tomando $x = 1.1, 0.9, 1.01, 0.99$, y 1.001
b) $x_0 = 2$ tomando $x = 2.1, 2.01, 2.001$, y 1.999.

3. Estímese la pendiente de la tangente a la gráfica de sen en $x_0 = 0$ tomando $x = 1.00, 0.50, 0.25, 0.10, 0.01$.

4. Estímese la pendiente de la tangente a la gráfica de tan en $x_0 = 0$ tomando $x = 1.00, 0.10, 0.01$.

5. Sea la función $g = 3I^2$. Demuéstrese que si $0 < |x-x_0| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - 6x_0\right| < 3\delta.$$

6. Para la función $g = I^3$ demuéstrese que si $0 < |x-2| < \delta \leqslant 1$, entonces $1 < x < 3$ y

$$\left|\frac{g(x)-g(2)}{x-2} - 12\right| < 7\delta.$$

7. Demuéstrese que $0 < |x-x_0| < \delta \Leftrightarrow x \neq x_0$ y $x \in \langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle$.

3. LÍMITES

En la sección 2 obtuvimos alguna idea de lo que es un límite, pero necesitamos una definición precisa de límite sobre la que basaremos nuestro estudio del cálculo. Frases descriptivas tales como "tan cerca como deseemos" y "suficientemente cerca" no proporcionan una definición adecuada.

3.1 Definición. *El número L se dice que es el* ***límite de la función f en*** *x_0 si para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el dominio de f y*

$$0 < |x-x_0| < \delta$$

entonces

$$|f(x)-L| < \varepsilon.$$

Las notaciones

$$\lim_{x_0} f = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se usan para denotar que L es el límite de f en x_0.

Nota. Siempre que hablemos del límite de una función f en x_0, supondremos que todo intervalo abierto que contiene a x_0 contiene también un punto x, distinto de x_0, en el dominio de f. Si tal es el caso, entonces el punto x_0 se dice que es un ***punto de acumulación*** del dominio de f. Si x_0 no es un punto de acumulación del dominio de f, entonces el límite de f en x_0 no es único. En realidad, todo número L es, entonces, el límite de f en x_0. Pues si x_0 no es un punto de acumulación del dominio de f y δ es suficientemente pequeño, no hay ningún número x en el dominio de f que satisfaga $0 < |x-x_0| < \delta$, y todo número L satisface los requerimientos para ser el límite de f en x_0.

Usualmente los dominios de nuestras funciones serán intervalos, y todo punto de un intervalo es un punto de acumulación del intervalo. En realidad, para un intervalo abierto finito $\langle a, b\rangle$ (donde $a < b$) todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ es un punto de acumulación de $\langle a, b\rangle$. Por ejemplo, b es un punto de acumulación, ya que todo intervalo abierto $\langle c, d\rangle$ que contiene b también contiene números x menores que b y mayores que tanto c como a.

La imagen geométrica de la definición 3.1 es la siguiente (figura 3): localícese el punto (x_0, L). Para un número $\varepsilon > 0$ dado, dibújense las dos rectas horizontales $y = L-\varepsilon$ y $y = L+\varepsilon$. Ahora, la definición de $\lim_{x_0} f = L$

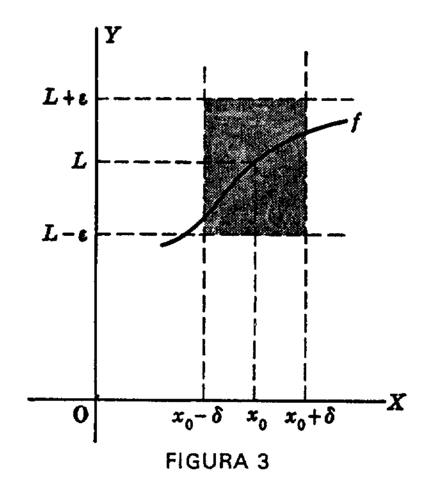


FIGURA 3

requiere que dado $\varepsilon > 0$, podamos escoger $\delta > 0$ tal que aquellos puntos $(x, f(x))$ sobre la gráfica de f (con $x \neq x_0$) que se encuentren entre las rectas verticales $x = x_0-\delta$ y $x = x_0+\delta$ se encuentren también entre las rectas horizontales $y = L-\varepsilon$ y $y = L+\varepsilon$.

Nota. Obsérvese que una vez que se ha encontrado un número δ correspondiente a un ε dado, cualquier número δ_1 con $0 < \delta_1 < \delta$

puede usarse en la definición 3.1. Pues, supongamos, $0 < |x-x_0| < \delta$ implica que $|f(x)-L| < \varepsilon$. Si $\delta_1 < \delta$, entonces por la propiedad transitiva, axioma O_2 de los números reales, $0 < |x-x_0| < \delta_1$ implica $0 < |x-x_0| < \delta$ y, por tanto, implica $|f(x)-L| < \varepsilon$.

La desigualdad $0 < |x-x_0|$ en la definición 3.1 implica que $x \neq x_0$. Nosotros excluimos específicamente $x = x_0$ para ser capaces de considerar el límite de f en x_0 cuando no puede definirse $f(x_0)$. La ecuación 2.1 es un ejemplo en que la función no está definida en x_0.

Ilustramos ahora el concepto de límite con varios ejemplos. En estos ejemplos, con el fin de aplicar la definición de límite, comenzamos por adivinar el límite L para, a continuación, aplicar la definición y mostrar que L es ciertamente el límite deseado.

3.2 Ejemplo. Sea f la función cuya regla de correspondencia es $f(x) = x+2$. ¿Existe el límite de f en 2? En caso afirmativo, ¿cuál es su valor?

SOLUCIÓN. Para x próximo a 2, pero no igual a 2, $f(x)$ está próximo a 4 (figura 4). Parece, pues, que el límite de f en 2 debe ser 4. La definición de

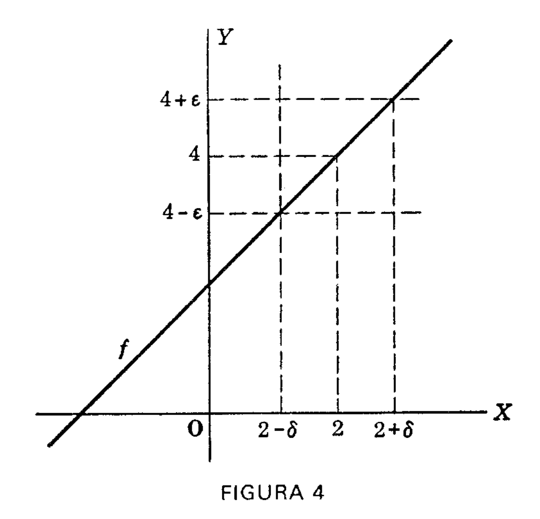


FIGURA 4

límite requiere que: para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)-4| = |x+2-4| = |x-2| < \varepsilon$$

siempre que $0 < |x-2| < \delta$. En este caso, para cada número $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon$. Entonces $0 < |x-2| < \delta = \varepsilon$ implica que

$$|f(x)-4| = |x-2| < \varepsilon.$$

3.3 Ejemplo. Sea g la función cuya regla de correspondencia es

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \quad (x \neq 2).$$

El dominio de g es el conjunto de todos los números reales excepto 2. Encuéntrese $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$.

SOLUCIÓN. Para $x \neq 2$

$$g(x) = \frac{x^2-4}{x-2} + \frac{x-2}{x-2} \cdot (x+2) = x+2.$$

Así pues, cuando $x \neq 2$, $g(x) = f(x)$, donde f es la función del ejemplo 3.2. Como el límite de una función en x_0 no depende del valor de la función en x_0,

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} f(x)$$

o

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4.$$

3.4 Ejemplo. Demuéstrese que el límite de f en x_0, donde f es la función constante $\{(x, c)\}$, es c; es decir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} c = c.$$

SOLUCIÓN. Debemos demostrar que para cada número $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x)-c| = |c-c| = 0 < \varepsilon$$

siempre que $0 < |x-x_0| < \delta$. En este caso podemos tomar como δ cualquier número positivo y $|f(x)-c| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x-x_0| < \delta$.

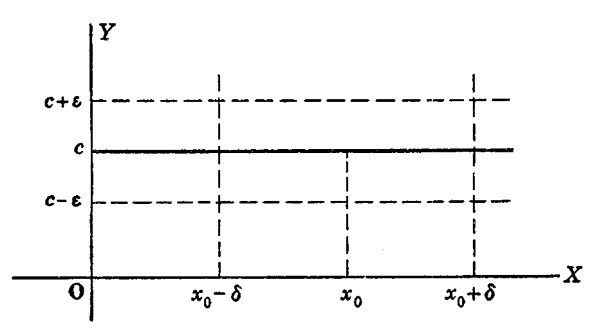


FIGURA 5

3.5 Ejemplo. Demuéstrese que el límite de la función I en x_0 donde I es la función idéntica $\{(x, x)\}$, es x_0; es decir,

$$\lim_{x_0} I = \lim_{x \to x_0} x = x_0 .$$

SOLUCIÓN. Debemos demostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|I(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$$

siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$. Tomemos $\delta = \varepsilon$. Entonces $0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ implica que $|I(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$.

En un problema particular, con el fin de aplicar la definición para demostrar que L es el límite deseado, debemos demostrar que dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

siempre que $x \in \mathfrak{D}_f$ y

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Lo que se requiere es demostrar cómo se escogerá δ para un ε dado cualquiera. Es decir, debemos dar una regla para la selección de δ en términos de ε. Una forma de hacer esto es la siguiente. Sáquese $|x - x_0|$ como factor de $|f(x) - L|$:

$$|f(x) - L| = |g(x)|\,|x - x_0|.$$

Ahora, si es posible encontrar un número positivo η tal que siempre que $0 < |x - x_0| < \eta$, g quede acotada, digamos que $|g(x)| \leqslant M$, entonces

$$|f(x) - L| = |g(x)|\,|x - x_0| \leqslant M|x - x_0|$$

siempre que $0 < |x - x_0| < \eta$. Por otra parte

$$M|x - x_0| < \varepsilon$$

siempre que $|x - x_0| < \varepsilon/M$. De donde si $\delta = \text{mín}\,\{\eta, \varepsilon/M\}$ las dos anteriores desigualdades se verifican y

$$|f(x) - L| = |g(x)|\,|x - x_0| \leqslant M|x - x_0| < \varepsilon$$

siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.

3.6 Ejemplo. Encuéntrese $\lim_{x \to 3} (2x^2 - 3x + 1)$.

SOLUCIÓN. Esperamos que $\lim_{x \to 3} (2x^2 - 3x + 1) = 18 - 9 + 1 = 10$. Ahora

$$|(2x^2 - 3x + 1) - 10| = |2x^2 - 3x - 9| = |2x + 3|\,|x - 3|.$$

Si $|x - 3| < 1$, entonces $2 < x < 4$, $7 < 2x + 3 < 11$, y

$$|2x + 3|\,|x - 3| < 11\,|x - 3|.$$

Pero

$$11\,|x-3| < \varepsilon$$

siempre que $|x-3| < \varepsilon/11$. De donde si $\delta = \text{mín}\,\{1, \varepsilon/11\}$, entonces

$$|(2x^2-3x+1)-10| = |2x+3|\,|x-3| \leqslant 11\,|x-3| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |x-3| < \delta.$$

La elección $\eta = 1$ fue una elección adecuada, pero no ciertamente necesaria. Si hubiéramos escogido $\eta = 2$, entonces $1 < x < 5$, $5 < 2x+3 < 13$ y habríamos escogido $\delta = \text{mín}\,\{2, \varepsilon/13\}$.

Es a menudo útil saber que todo límite en x_0 puede considerarse como un límite en cero. Tenemos el siguiente teorema.

3.7 Teorema. $\lim\limits_{x_0} f = L$ *si y sólo si* $\lim\limits_{0} f \circ (x_0+I) = L$. *Es decir, si alguno de los límites existe, el otro límite también existe y*

$$\lim_{x_0} f = \lim_{0} f \circ (x_0+I).$$

Prueba. Mostramos primero que $\lim\limits_{x_0} f = L$ implica $\lim\limits_{0} f \circ (x_0+I) = L$. Si $\lim\limits_{x_0} f = L$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que siempre que x está en el dominio de f y

$$0 < |x-x_0| < \delta$$

entonces

$$|f(x)-L| < \varepsilon.$$

Si reemplazamos x por x_0+h, vemos que siempre que h está en el dominio de $f \circ (x_0+I)$ y

$$0 < |h| < \delta$$

entonces

$$|f(x_0+h)-L| < \varepsilon;$$

es decir,

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{0} f \circ (x_0+I) = L.$$

Recíprocamente, $\lim\limits_{0} f \circ (x_0+I) = L$ implica $\lim\limits_{x_0} f = L$, ya que reemplazando h por $x-x_0$ podemos recorrer en sentido inverso los pasos anteriores.

El próximo ejemplo ilustra el uso de este teorema.

3.8 Ejemplo. Encuéntrese $\lim\limits_{2}\,(I^3-2I^2-10I+7)$.

SOLUCIÓN. Por el teorema 3.7,

$$\lim_{2} (I^3 - 2I^2 - 10I + 7) = \lim_{0} [(I+2)^3 - 2(I+2)^2 - 10(I+2) + 7]$$

$$= \lim_{0} [I^3 + 4I^2 - 6I - 13],$$

y esperamos que el límite en cero sea -13. Ahora bien

$$|[h^3 + 4h^2 - 6h - 13] - (-13)| = |h^3 + 4h^2 - 6h| = |h^2 + 4h - 6|\,|h|.$$

Si $|h| < 1$, entonces

$$|h^2 + 4h - 6| \leqslant |h|^2 + 4|h| + 6 < 11$$

y

$$|h^2 + 4h - 6|\,|h| < 11\,|h|.$$

De donde, si $\delta = \text{mín}\,\{1, \varepsilon/11\}$, entonces

$$|[h^3 + 4h^2 - 6h - 13] - (-13)| = |h^2 + 4h - 6|\,|h| < 11\,|h| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |h| < \delta.$$

Por tanto

$$\lim_{2} (I^3 - 2I^2 - 10I + 7) = -13.$$

Como ilustra el siguiente ejemplo, es posible que una función no tenga límite alguno en un punto x_0. Si x_0 es un punto de acumulación del dominio de f, entonces f no tiene un límite en x_0 si y sólo si para todo L existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ hay un x en el dominio de f tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ y $|f(x) - L| \geqslant \varepsilon$.

3.9 Ejemplo. Sea g la función cuya regla de correspondencia es

$$g(x) = \frac{|x|}{x}, \qquad (x \neq 0).$$

¿Existe el límite de g en 0?

SOLUCIÓN. Damos primero un argumento intuitivo que nos permite conjeturar que el límite no existe. Para $x > 0$, $|x| = x$, de modo que $g(x) = +1$ para $x > 0$. Por otra parte, para $x < 0$, $|x| = -x$, de modo que $g(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$ para $x < 0$. No hay ningún número L que satisfaga los requerimientos de la definición 3.1. Pues no importa cuán pequeño escojamos $\delta > 0$ habrá algunos valores de x en el intervalo $-\delta < x < \delta$ tales que $g(x) = 1$ y algunos tales que $g(x) = -1$. Puntos

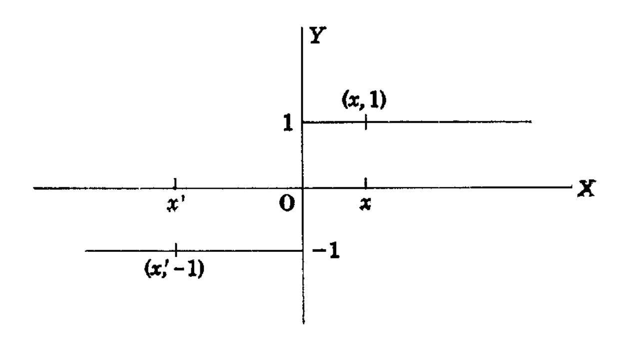


FIGURA 6

$(x, g(x))$ de ambos tipos no pueden estar en la misma faja horizontal de ancho menor que 2, de forma que si $\varepsilon \leqslant 1$, la banda horizontal determinada por las rectas $y = L \pm \varepsilon$ debe excluir al menos uno de los tipos de puntos (figura 6).

Para demostrar analíticamente que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ no existe, debemos mostrar que para cualquier número L existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todos los números $\delta > 0$ hay una x tal que $0 < |x| < \delta$ y $|g(x)-L| \geqslant \varepsilon$. Consideramos dos casos.

Caso 1. Si $L \geqslant 0$, tomamos $\varepsilon = 1$. Para cualquier $\delta > 0$, tomamos x_1 tal que $-\delta < x_1 < 0$. Entonces $|g(x_1)-L| = |-1-L| = L+1 \geqslant 1 = \varepsilon$.
Caso 2. Si $L < 0$, tomamos $\varepsilon = 1$. Para cualquier $\delta > 0$, tómese un x_2 tal que $0 < x_2 < \delta$. Entonces $|g(x_2)-L| = 1-L > 1 = \varepsilon$.

3.10 Ejemplo. Pruébese que $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 = \dfrac{x^2}{2}\right) = 1$.

Solución. Debemos demostrar que dado cualquier $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$\left|1 - \frac{x^2}{2} - 1\right| < \varepsilon$$

siempre que $0 < |x-0| = |x| < \delta$. Ahora bien,

$$\left|1 - \frac{x^2}{2} - 1\right| = \left|\frac{x^2}{2}\right| < \varepsilon$$

si

$$|x^2| < 2\varepsilon$$

o

$$|x| < \sqrt{2\varepsilon}.$$

Así pues, si $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, entonces

$$\left|1 - \frac{x^2}{2} - 1\right| < \varepsilon$$

siempre que $0 < |x-0| < \delta$. Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) = 1$

3.11 Ejemplo. Demuéstrese que

$$\lim_{a} I^{1/2} = a^{1/2} \text{ donde } a \geqslant 0.$$

SOLUCIÓN. Dividimos el problema en dos casos.

Caso 1. $a = 0$. Aquí deseamos demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0.$$

Es decir, deseamos demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\sqrt{x}-0| = \sqrt{x} < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |x-0| = |x| < \delta \quad \text{y} \quad x \in \mathfrak{D}_I{}^{1/2};$$

es decir, siempre que $0 < x < \delta$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Tenemos que $\sqrt{x}\varepsilon$ si $x\varepsilon^2$. De donde si $\delta = \varepsilon^2$, entonces

$$\sqrt{x} < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |x-0| < \delta,$$

y por tanto

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0.$$

Caso 2. $a > 0$. En este caso notamos que para todo $x \geqslant 0$,

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}(\sqrt{x} - \sqrt{a}) = \frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}.$$

Por tanto

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}|x-a|.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$. Entonces

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}|x-a| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |x-a| < \delta$$

si

$$\delta = \sqrt{a}\,\varepsilon.$$

3.12 Ejemplo. Demuéstrese que

$$\lim_{x\to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}.$$

SOLUCIÓN. Dividimos el problema en dos casos.

Caso 1. $a = 0$. Aquí deseamos demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0.$$

Es decir, deseamos demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|\sqrt[3]{x}-0| = |\sqrt[3]{x}| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |x-0| = |x| < \delta.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$. Sabemos que $|\sqrt[3]{x}| < \varepsilon$ si $|x| < \varepsilon^3$. De donde si $\delta = \varepsilon^3$, entonces

$$|\sqrt[3]{x}| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |x-0| < \delta$$

y por tanto

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0.$$

Caso 2. $a \neq 0$. En este caso notamos que

$$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}| = \left|\frac{x^{2/3}+(xa)^{1/3}+a^{2/3}}{x^{2/3}+(xa)^{1/3}+a^{2/3}}\right| \cdot |x^{1/3}-a^{1/3}|$$

$$= \frac{1}{|x^{2/3}+(xa)^{1/3}+a^{2/3}|} \cdot |x-a| = |g(x)|\,|x-a|$$

donde

$$|g(x)| = \frac{1}{|x^{2/3}+(xa)^{1/3}+a^{2/3}|}.$$

Ahora bien, como $a \neq 0$, existe un número η tal que si $|x-a| < \eta$ entonces x y a tienen el mismo signo y $xa > 0$. Así pues, si $|x-a| < \eta$, $|g(x)| < a^{-2/3}$ y

$$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}| = |g(x)|\,|x-a| < a^{-2/3}|x-a|.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$. Entonces

$$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}| = |g(x)|\,|x-a| < a^{-2/3}|x-a| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |x-a| < \delta$$

donde $\delta = \text{mín}\,\{\eta, \varepsilon a^{2/3}\}$. Por tanto

$$\lim_{x\to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}.$$

Ahora que hemos dado varios ejemplos sobre límites, pasamos a fijarnos en tres teoremas a ellos concernientes. Antes de considerar estos teoremas, probamos un lema que nos será útil tanto aquí como en discusiones posteriores.

3.13 Lema. *Si* $|a| \leqslant \varepsilon$ *para toda* $\varepsilon > 0$, *entonces* $a = 0$.

PRUEBA. Si $a \neq 0$, entonces $\frac{1}{2}|a| > 0$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}|a|$ tenemos $|a| \leqslant \frac{1}{2}|a|$ o $\frac{1}{2}|a| \leqslant 0$ —es decir, una contradicción.

El primero de nuestros tres teoremas concierne a la unicidad del límite. A este respecto se debe recordar que, de acuerdo a la nota de la pág. 339, siempre que hablamos del límite de una función f en x_0, suponemos que x_0 es un punto de acumulación del dominio de f. Si no ponemos esta restricción sobre el punto x_0, entonces el siguiente teorema no es cierto.

3.14 Teorema. *Si* $\lim_{x_0} f = L_1$ *y* $\lim_{x_0} f = L_2$, *entonces* $L_1 = L_2$.

PRUEBA. Tómese $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x_0} f = L_1$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x)-L_1| < \varepsilon/2$$

siempre que x esté en el dominio de f y

$$0 < |x-x_0| < \delta_1.$$

Además, como $\lim_{x_0} f = L_2$, existe un $\delta_2 > 0$ tal que

$$|f(x)-L_2| < \varepsilon/2$$

siempre que x esté en el dominio de f y

$$0 < |x-x_0| < \delta_2.$$

Ahora bien, como x_0 es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_f$, f está definida en algún punto $x_1 \neq x_0$ en el intervalo abierto $\langle x_0-\delta_1,\ x_0+\delta_1\rangle \cap \langle x_0-\delta_2,\ x_0+\delta_2\rangle$. Luego

$$\begin{aligned} |L_1-L_2| &= |L_1-f(x_1)+f(x_1)-L_2| \\ &\leqslant |L_1-f(x_1)|+|f(x_1)-L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Por tanto, de acuerdo con el lema 3.13, $L_1 = L_2$.

3.15 Teorema. *Si existe un intervalo abierto* $\mathfrak{J}$ *que contiene a* x_0 *tal que para todo* $x \neq x_0$ *en* $\mathfrak{J}$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, *y si* $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = L$, *entonces* $\lim_{x_0} g$ *existe y* $\lim_{x_0} g = L$.

PRUEBA. (Figura 7.) Tómese $\varepsilon > 0$. Para cada ε existe un número $\delta_1 > 0$ tal que $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$ para $0 < |x-x_0| < \delta_1$ ya que $\lim_{x_0} f = L$. Además $\lim_{x_0} h = L$ implica que para tal ε también existe un número $\delta_2 > 0$ tal que $L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$ para $0 < |x-x_0| < \delta_2$. Suponemos que δ_1 y δ_2 se han escogido tan pequeños que los intervalos $\langle x_0-\delta_1,\ x_0+\delta_1\rangle$ y $\langle x_0-\delta_2,\ x_0+\delta_2\rangle$ están contenidos en $\mathfrak{J}$. Si δ es el más pequeño de δ_1 y δ_2,

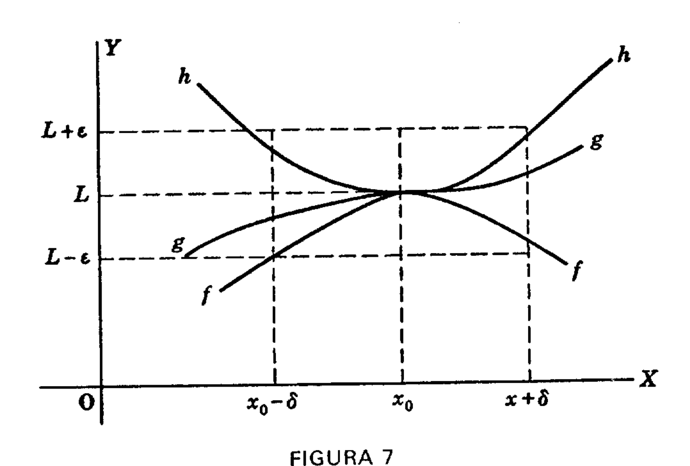


FIGURA 7

entonces para $0 < |x-x_0| < \delta$, tenemos

$$L-\varepsilon < f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) < L+\varepsilon$$

y por tanto

$$L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon .$$

Pero esto significa

$$\lim_{x_0} g = L .$$

3.16 Teorema. *Si* $\lim_{x_0} f = L$ *y* $a < L < b$, *entonces existe un número* $\delta > 0$ *tal que*

$$a < f(x) < b$$

para todo x *en el dominio de* f *que satisfaga* $0 < |x-x_0| < \delta$.

PRUEBA. (Figura 8.) Tómese $\varepsilon = \text{mín } \{b-L, L-a\}$, entonces

3.17 $$a \leqslant L-\varepsilon < L < L+\varepsilon \leqslant b .$$

Ahora bien, como $\lim_{x_0} f = L$, para cada ε existe un $\delta > 0$ tal que siempre que x está en el dominio de f y $0 < |x-x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x)-L| < \varepsilon$$

o

$$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon .$$

Combinando esta última desigualdad con 3.17, obtenemos

$$a \leqslant L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \leqslant b$$

para toda x en el dominio de f que satisfaga $0 < |x-x_0| < \delta$.

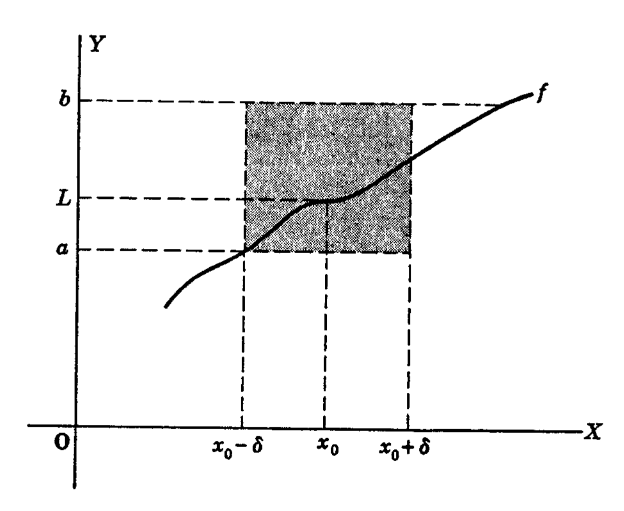


FIGURA 8

A veces es conveniente considerar el concepto de límite restringido a un conjunto $\mathcal{E}$.

3.18 Definición. *Sea $\mathcal{E}$ un conjunto y sea $f_{\mathcal{E}}$ la función con dominio $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}_f$ y regla de correspondencia*

$$f_{\mathcal{E}}(x) = f(x) \text{ para } x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}_f.$$

Entonces el ***límite de f en x_0 restringido a*** *$\mathcal{E}$ es L, escrito*

$$\lim_{x_0} f = L \quad (\text{sobre } \mathcal{E})$$

o

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad (x \in \mathcal{E} \cap \mathcal{D}_f),$$

si y sólo si

$$\lim_{x_0} f_{\mathcal{E}} = L.$$

Hay dos casos especiales que son de particular importancia.

3.19 Definición. *El límite de f en x_0 restringido a $\mathcal{E} = \langle -\infty, x_0 \rangle$ se llama* ***límite izquierdo de f en*** *x_0.*

Las notaciones

$$\lim_{x_0^-} f = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

se usan para denotar que L es el límite izquierdo de f en x_0.

3.20 Definición. *El límite de f en x_0 restringido a $\mathcal{E} = \langle x_0, \infty \rangle$ se llama* ***límite derecho de f en*** *x_0.*

Las notaciones

$$\lim_{x_0^+} f = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

se usan para denotar que L es el límite derecho de f en x_0.

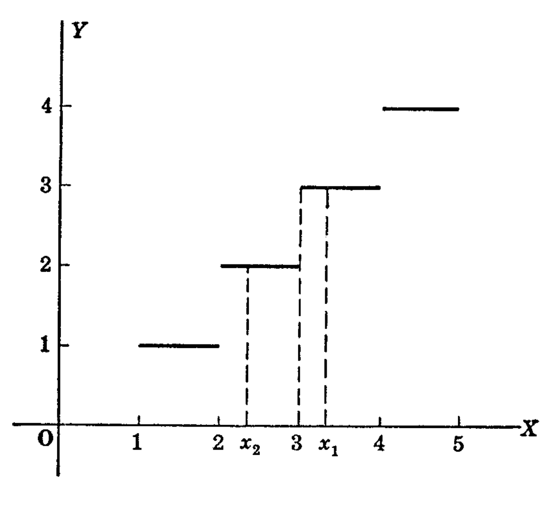
3.21 Ejemplo. ¿Existen $\lim_{x \to n} [x]$ y $\lim_{x \to n^+} [x]$ para n un entero?

SOLUCIÓN. (Figura 9.) Para $x \in [n-1, n\rangle$, $[x] = n-1$. De donde esperamos que $\lim_{x \to n} [x] = n-1$. Tenemos

$$\lim_{x \to n^-} [x] = n-1$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|[x]-(n-1)| < \varepsilon$$



(El caso $n = 3$)

FIGURA 9

siempre que $x \in \langle -\infty, n\rangle$ y

$$0 < |x-n| < \delta .$$

Es decir, siempre que

$$0 < n-x < \delta$$

o, equivalentemente,

$$n-\delta < x < n .$$

Si $\delta \leqslant 1$, entonces $x \in [n-\delta, n\rangle \subset [n-1, n\rangle$ y

$$|[x]-(n-1)| = |(n-1)-(n-1)| = 0 < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. De donde

$$\lim_{x \to n^-} [x] = n-1 .$$

De un modo análogo podemos mostrar que $\lim\limits_{x \to n^+} [x] = n$ (problema 7).

Nota. Si

$$\lim_{x_0} f = L ,$$

entonces para cada conjunto $\mathcal{E}$ tal que x_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}_f$

$$\lim_{x_0} f = L \quad \text{(sobre } \mathcal{E}\text{)}.$$

De donde, si existen conjuntos $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ tales que x_0 es un punto de

acumulación de $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{D}_f$ y $\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{D}_f$ y si

$$\lim_{x_0} f = L_1 \quad (\text{sobre } \mathcal{E}_1)$$

y

$$\lim_{x_0} f = L_2 \quad (\text{sobre } \mathcal{E}_2)$$

con $L_1 \neq L_2$, entonces $\lim_{x_0} f$ no existe. Además, si para algún conjunto $\mathcal{E}$ tal que x_0 es un punto de acumulación de $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}_f$ el límite de f restringido a $\mathcal{E}$ no existe, entonces $\lim_{x_0} f$ no existe. En particular, si f está definido en un intervalo abierto que contiene a x_0 y cualquiera de los límites $\lim_{x_0^-} f$ o $\lim_{x_0^+} f$ no existe, entonces $\lim_{x_0} f$ no existe. Si $\lim_{x_0^-} f$ y $\lim_{x_0^+} f$ ambos existen y $\lim_{x_0^-} f = \lim_{x_0^+} f$, entonces $\lim_{x_0} f$ existe y $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0^-} f = \lim_{x_0^+} f$ (problema 10).

En el ejemplo 3.21 vimos que $\lim_{x \to n^-} [x] = n-1$ y $\lim_{x \to n^+} [x] = n \neq n-1$. De ello, de acuerdo con la nota anterior, podemos concluir que $\lim_{x \to n} [x]$ no existe (figura 9).

3.22 Ejemplo. Encuéntrese $\lim_{0} f$ donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para} \quad x > 0 \\ x & \text{para} \quad x < 0 \end{cases}$$

si el límite existe.

SOLUCIÓN. (Figura 10.) Tenemos ahora

$$\lim_{0^+} f = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

ya que para cualquier $\varepsilon > 0$

$$|x^2 - 0| = x^2 < \varepsilon$$

siempre que $0 < x - 0 = x < \delta$ si $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Además

$$\lim_{0^-} f = \lim_{x \to 0^-} x = 0$$

ya que para cualquier $\varepsilon > 0$

$$|x - 0| = |x| = -x < \varepsilon$$

siempre que $0 < 0 - x = -x < \delta$ si

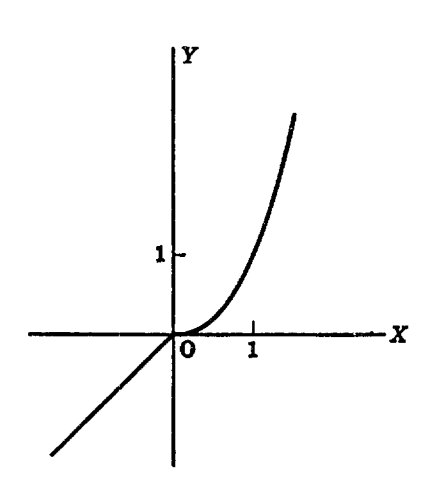


FIGURA 10

$\delta = \varepsilon$. De donde como $\lim_{0^-} f$ y $\lim_{0^+} f$ ambos existen y son iguales a cero, $\lim_{0} f$ y $\lim_{0} f = 0$.

3.23 Ejemplo. Encuéntrese $\lim_{x \to 2} f(x)$, si existe, para la función f con regla de correspondencia

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{para} \quad x \in \langle -\infty, 2] \\ (x-2)^2 & \text{para} \quad x \in \langle 2, \infty \rangle . \end{cases}$$

SOLUCIÓN. Tenemos

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x+2) = 0$$

ya que para un $\varepsilon > 0$, entonces $|-x+2-0| = |2-x| < \varepsilon$ siempre que $0 < 2-x < \delta = \varepsilon$. Análogamente

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-2)^2 = 0$$

ya que para un $\varepsilon > 0$, entonces $|(x-2)^2 - 0| = (x-2)^2 < \varepsilon$ siempre que $0 < x-2 < \delta = \sqrt{\varepsilon}$. Por tanto, existe $\lim_{x \to 2} f(x)$ y

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0 .$$

Problemas

1. Pruébese que

a) $\lim_{x \to 0} 1 = 1$

b) $\lim_{x \to 1} (3-x) = 2$

c) $\lim_{x \to 7} (2x+1) = 15$

d) $\lim_{x \to 0} (2x+1) = 1$

e) $\lim_{x \to 2} (x^2 - x) = 2$

f) $\lim_{x \to 3} (x^2 + x) = 12$

g) $\lim_{x \to 5} (x^3 + x^2 - 2x) = 140$

h) $\lim_{x \to 0} (x^3 + 2x + 3) = 3$

2. Encuéntrese cada uno de los siguientes límites y pruébese su aserción.

a) $\lim_{3} (3 - I)$

b) $\lim_{2} 3I$

c) $\lim_{1} I/2$

d) $\lim_{2} I^2$

e) $\lim_{2} (I^2 + I)$

f) $\lim_{x_0} aI$

g) $\lim_{x_0} aI^2$

h) $\lim_{x \to 3} \dfrac{3-x}{9-3x}$

i) $\lim_{x \to 3} (3-\sqrt{3x})$

j) $\lim_{x \to 3} (3+\sqrt{3x})$

k) $\lim_{x \to 1} (3-3\sqrt{x})$

l) $\lim_{2} (I^3+3I+2)$

m) $\lim_{2} (aI^2+bI+c)$

n) $\lim_{x_0} (aI^2+bI+c)$.

3. Pruébese que: $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

4. Demuéstrese que: $\lim_{x_0} f = L$ si y sólo si $\lim_{x_0} |f-L| = 0$.

5. Pruébese que: si $\lim_{x_0} |f| = L$, entonces $\lim_{x_0} f = L$. Proporciónese un ejemplo para demostrar que el recíproco es falso.

6. Pruébese que si $\lim_{x_0} |f| = 0$, entonces $\lim_{x_0} f = 0$.

7. Pruébese que: $\lim_{x \to n+} [x] = n$ para n un entero.

8. Pruébese que: $\lim_{x \to 0} x \cos x = 0$.

9. Pruébese el recíproco del teorema 3.16: si $a < f(x) < b$ para todo x en un intervalo $\langle c, d \rangle$, $x_0 \in \langle c, d \rangle$, y $\lim_{x_0} f$ existe, entonces $a \leqslant \lim_{x_0} f \leqslant b$.

10. Pruébese que: si f está definida en un intervalo abierto que contiene a x_0, si $\lim_{x_0-} f$ y $\lim_{x_0+} f$ existen ambos, y si $\lim_{x_0-} f = \lim_{x_0+} f$, entonces existe $\lim_{x_0} f$ y $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0-} f = \lim_{x_0+} f$.

11. Demuéstrese que:

$$\lim_{x_0+a} f = \lim_{x_0} f \circ (I+a).$$

Sugerencia. Redúzcanse ambos límites a límites en cero.

12. Demuéstrese que:

a) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(2x)$

b) $\lim_{0} f = \lim_{0} f \circ cI$, $c \neq 0$

c) $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h^2)$

13. Encuéntrese $\lim_{x \to 0} f(x)$, si es que existe, si

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{para} \quad x \in \langle -\infty, 0] \\ x^2 & \text{para} \quad x \in \langle 0, \infty \rangle. \end{cases}$$

14. Demuéstrese que:

a) Si f es una función constante, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$.

b) Si $f = I$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 1$.

c) Si $f = I^2$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2x_0$.

¿Qué es lo que estos resultados significan geométricamente?

15. Encuéntrese $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, para $x_0 = 0$, si es que existe, donde

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{para} \quad x \in \langle -\infty, 0] \\ x^2, & \text{para} \quad x \in \langle 0, \infty \rangle . \end{cases}$$

16. Demuéstrese que: si $a \neq 0$, entonces $\lim\limits_{t \to t_0} f(at) = L$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to at_0} f(x) = L$.

4. ALGUNOS LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

En esta sección establecemos los siguientes límites:

4.1 $$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0,$$

4.2 $$\lim_{x \to 0} \cos x = 1,$$

4.3 $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Estos límites no pueden verificarse usando la definición de límite directamente sino que requieren el uso de algunos de los teoremas de la sección 3.

Estableceremos los límites anteriores basándonos en teoremas relacionados con la geometría de la figura 11. Sea **P** un punto en el primer cuadrante de la circunferencia de radio unitario y centro en el origen. Supongamos que el arco $\widehat{\mathbf{QP}}$ tiene longitud x; entonces $0 < x < \pi/2$. Sea [**P**, **R**] tangente a la circunferencia unitaria en **P** y [**Q**, **S**] tangente a la circunferencia unitaria en $\mathbf{Q} = (1, 0)$. Tenemos que $\mathbf{P} = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ y x es la medida en radianes del ángulo **QOP** mientras que $\mathbf{S} = (1, \tan x)$.

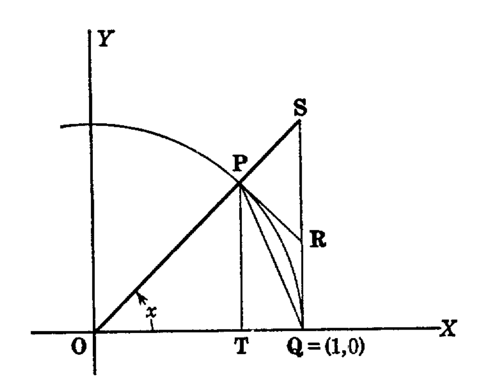


FIGURA 11

Como [P, Q] es una línea poligonal inscrita y [P, R] ∪ [R, Q] es una línea poligonal circunscrita,

$$|\mathbf{Q}-\mathbf{P}| < x < |\mathbf{R}-\mathbf{P}|+|\mathbf{Q}-\mathbf{R}|.$$

Ahora bien, [P, Q] es la hipotenusa del triángulo rectángulo **PTQ** y [R, S] es la hipotenusa del triángulo rectángulo **SPR**. Así pues, $|\mathbf{Q}-\mathbf{P}| > |\mathbf{T}-\mathbf{P}| = \operatorname{sen} x$ y $|\mathbf{R}-\mathbf{P}| < |\mathbf{R}-\mathbf{S}|$. Combinando estas desigualdades tenemos

$$\operatorname{sen} x < |\mathbf{Q}-\mathbf{P}| < x < |\mathbf{R}-\mathbf{P}|+|\mathbf{Q}-\mathbf{R}| < |\mathbf{R}-\mathbf{S}|+|\mathbf{Q}-\mathbf{R}| = |\mathbf{Q}-\mathbf{S}| = \tan x.$$

Así, para $0 < x < \pi/2$, tenemos

4.4 $$\operatorname{sen} x < x < \tan x.$$

Multiplicando la primera de estas desigualdades por $1/x$ y la segunda por $\frac{\cos x}{x}$, tenemos $\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$ y $\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ respectivamente. Ahora bien,

$$|\mathbf{Q}-\mathbf{P}| = \sqrt{(\cos x-1)^2+(\operatorname{sen} x-0)^2} = \sqrt{2-2\cos x} < x$$

de modo que para $0 < x < \pi/2$,

$$2-2\cos x < x^2$$

o

$$1-\frac{x^2}{2} < \cos x.$$

Luego para $0 < x < \pi/2$,

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 .$$

Si $-\pi/2 < x < 0$, entonces $\pi/2 > -x > 0$ y

$$1 - \frac{(-x)^2}{2} < \cos(-x) < \frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} < 1$$

o, lo que es equivalente,

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 .$$

Por tanto

4.5 $$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

para $-\pi/2 < x < 0$ o $0 < x < \pi/2$.

Pero, por el ejemplo 3.10 (pág. 345), $\lim_{x \to 0}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 1$, y por el problema de la (pág. 354), $\lim_{x \to 0} 1 = 1$.

Por tanto, los límites 4.2 y 4.3 se siguen del teorema 3.15 (pág. 349). De 4.4, para $0 < x < \pi/2$,

$$0 < \operatorname{sen} x < x$$

mientras que si $-\pi/2 < x < 0$

$$0 < \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x < -x .$$

Así pues, para $-\pi/2 < x < 0$ o $0 < x < \pi/2$

$$0 < |\operatorname{sen} x| < |x| .$$

Esta última desigualdad implica que $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$. Como $\lim_{x \to 0} 0 = 0$ y $\lim_{x \to 0} |x| = 0$, $\lim_{x \to 0} |\operatorname{sen} x| = 0$ por el teorema 3.15. Luego, por el problema 5 (pág. 355), $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

5. TEOREMAS SOBRE LÍMITES

La definición de límite dada en la sección 3 es en ocasiones bastante difícil de aplicar a funciones particulares ya que antes de que podamos aplicar la definición debemos habernos supuesto cual es el límite. En esta

sección damos algunos teoremas que nos permiten reducir el límite de una combinación de funciones a una combinación de límites más sencillos.

5.1 Teorema. *Si f y g son funciones tales que*

$$\lim_{x_0} f = L_1 \quad y \quad \lim_{x_0} g = L_2$$

y si x_0 es un punto de acumulación de D_{f+g}, entonces $\lim_{x_0}(f+g)$ *existe y*

$$\lim_{x_0} [f+g] = \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} g = L_1 + L_2 .$$

PRUEBA. Tomemos $\varepsilon > 0$. Deseamos demostrar que existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x está en el dominio de $f+g$ y $0 < |x-x_0| < \delta$ entonces

$$|[f+g](x)-(L_1+L_2)| < \varepsilon .$$

Usando ahora la desigualdad del triángulo, tenemos

$$\begin{aligned} |[f+g](x)-(L_1+L_2)| &= |f(x)-L_1+g(x)-L_2| \\ &\leqslant |f(x)-L_1|+|g(x)-L_2| . \end{aligned}$$

Por tanto, si podemos hacer cada uno de estos términos menores que $\varepsilon/2$ para x suficientemente próximo a x_0, tendremos el resultado deseado.

Como $\lim_{x_0} f = L_1$, para cada $\varepsilon/2$ hay un número $\delta_1 > 0$ tal que siempre que $x \in \mathfrak{D}_f$ y $0 < |x-x_0| < \delta_1$, entonces $|f(x)-L_1| < \varepsilon/2$. Además, como $\lim_{x_0} g = L_2$, hay un número $\delta_2 > 0$ tal que siempre que $x \in \mathfrak{D}_f$ y $0 < |x-x_0| < \delta_2$, entonces $|g(x)-L_2| < \varepsilon/2$.

Sea δ el mínimo de δ_1 y δ_2. Entonces, siempre que $x \in \mathfrak{D}_{f+g}(\mathfrak{D}_{f+g} = \mathfrak{D}_f \cap \mathfrak{D}_g)$ y $0 < |x-x_0| < \delta$, tenemos

$$|[f+g](x)-(L_1+L_2)| \leqslant |f(x)-L_1|+|g(x)-L_2| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon .$$

5.2 Teorema. *Si f y g son funciones tales que*

$$\lim_{x_0} f = L_1 \quad y \quad \lim_{x_0} g = L_2$$

y si x_0 es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_{fg}$, entonces $\lim_{x_0}(fg)$ *existe y*

$$\lim_{x_0} [fg] = [\lim_{x_0} f]\,[\lim_{x_0} g] = L_1 L_2 .$$

PRUEBA. Tomemos $\varepsilon > 0$. Expresamos $(fg)(x)-L_1 L_2$ en términos de $|f(x)-L_1|$ y $|g(x)-L_2|$ para demostrar que hay un número $\delta > 0$ tal que siempre que $x \in \mathfrak{D}_{fg}$ y $0 < |x-x_0| < \delta$, entonces $|(fg)(x)-L_1 L_2| < \varepsilon$.

Sumando y restando el término $g(x)L_1$, tenemos

$$\begin{aligned}|[fg](x)-L_1L_2| &= |f(x)\,g(x)-g(x)L_1+g(x)L_1-L_1L_2| \\ &\leqslant |g(x)|\,|f(x)-L_1|+|L_1|\,|g(x)-L_2|.\end{aligned}$$

Si $|g(x)|$ no se hace "grande" para x próximo a x_0, podemos hacer $|(fg)(x)-L_1L_2|$ tan pequeño como queramos haciendo $|f(x)-L_1|$ y $|g(x)-L_2|$ suficientemente pequeño.

Como $\lim\limits_{x_0} g = L_2$, para el número 1 existe un número $\delta_1 > 0$ tal que si $x\in\mathfrak{D}_g$ y $0 < |x-x_0| < \delta_1$, entonces $|g(x)-L_2| < 1$. Por la desigualdad del triángulo tenemos:

5.3 $$|g(x)| < |L_2|+1 \quad (x\in\mathfrak{D}_g \text{ y } 0 < |x-x_0| < \delta_1).$$

Hay ahora números $\delta_2 > 0$ y $\delta_3 > 0$ tales que

5.4 $$|f(x)-L_1| < \frac{\varepsilon}{2(|L_2|+1)} \quad (x\in\mathfrak{D}_f \text{ y } 0<|x-x_0|<\delta_2)$$

y

5.5 $$|g(x)-L_2| < \frac{\varepsilon}{2(|L_1|+1)}{}^{1} \quad (x\in\mathfrak{D}_g \text{ y } 0<|x-x_0|<\delta_3).$$

Sea $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$; entonces, siempre que $x\in\mathfrak{D}_{fg}$ y $0 < |x-x_0| < \delta$. las desigualdades 5.3, 5.4, y 5.5, todas, se verifican. Así pues

$$\begin{aligned}|[fg](x)-L_1L_2| &\leqslant |g(x)|\,|f(x)-L_1|+|L_1|\,|g(x)-L_2| \\ &< (|L_2|+1)\frac{\varepsilon}{2(|L_2|+1)} + |L_1|\frac{\varepsilon}{2(|L_1|+1)} \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon \quad (x\in\mathfrak{D}_{fg} \text{ y } 0<|x-x_0|<\delta).\end{aligned}$$

Por tanto, por la definición de límite

$$\lim_{x_0}\,[fg] = L_1L_2.$$

5.6 Corolario. *Si* $\lim\limits_{x_0} g = L$, *entonces* $\lim\limits_{x_0} cg = cL$.

PRUEBA. Sea la función f del teorema 5.2 la función constante $\{(x, c)\}$. De acuerdo con lo visto en el ejemplo 3.4 (pág. 341), $\lim\limits_{x_0} c = c$.

[1] Como $_{-1}$ podía ser cero, el 1 ha sido añadido a L_2 para evitar la posibilidad de división por cero.

5.7 Corolario. *Si f y g son funciones tales que*

$$\lim_{x_0} f = L_1 \quad y \quad \lim_{x_0} g = L_2$$

y si x_0 es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_{f-g}$, entonces $\lim_{x_0} (f-g)$ *existe y*

$$\lim_{x_0} [f-g] = \lim_{x_0} f - \lim_{x_0} g = L_1 - L_2 .$$

PRUEBA

$$\begin{aligned} \lim_{x_0} [f-g] &= \lim_{x_0} [f+(-1)g] \\ &= \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} (-1)g && [5.1] \\ &= \lim_{x_0} f + (-1) \lim_{x_0} g && [5.6] \\ &= \lim_{x_0} f - \lim_{x_0} g = L_1 - L_2 . \end{aligned}$$

5.8 Teorema. *Si* $\lim_{x_0} g = L \neq 0$, *entonces* $\lim_{x_0} g^{-1}$ *existe y*

$$\lim_{x_0} g^{-1} = \frac{1}{L} .$$

PRUEBA. Tómese $\varepsilon > 0$. Deseamos demostrar que hay un número $\delta > 0$ tal que si $x \in \mathfrak{D}_{1/g}$ y $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces

$$\left| \left[\frac{1}{g}\right](x) - \frac{1}{L} \right| < \varepsilon .$$

Ahora bien,

5.9

$$\left| \left[\frac{1}{g}\right](x) - \frac{1}{L} \right| = \frac{1}{|g(x)||L|} \, |L - g(x)| .$$

De donde si $\dfrac{1}{g(x)}$ no se hace "grande" para x próximo a x_0, podemos hacer 5.9 tan pequeño como deseemos haciendo $L - g(x)$ suficientemente pequeño.

Como $\lim_{x_0} g = L \neq 0$, usando el teorema 3.16, hay un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x)|\tfrac{1}{2} > |L| \quad (x \in \mathfrak{D}_g \text{ y } 0 < |x - x_0| < \delta_1) .$$

Entonces

$$\frac{2}{|g(x)|} < \frac{1}{|L|} \quad (x \in \mathfrak{D}_{g^{-1}} \text{ y } 0 < |x - x_0| < \delta_1) .$$

Como $\lim\limits_{x_0} g = L$, hay un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x)-L| < \frac{|L|^2\varepsilon}{2} \quad (x\in\mathfrak{D}_g \text{ y } 0<|x-x_0|<\delta_2).$$

Sea δ el mínimo de δ_1 y δ_2. Entonces

$$\left|\left[\frac{1}{g}\right](x) - \frac{1}{L}\right| = \frac{1}{|g(x)|\,|L|}\,|L-g(x)| < \frac{2}{|L|}\,\frac{1}{|L|}\,\frac{|L|^2\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon \quad (x\in\mathfrak{D}_{g^{-1}} \text{ y } 0<|x-x_0|<\delta).$$

Por tanto, $\lim\limits_{x_0} g^{-1} = \dfrac{1}{L}$.

5.10 Corolario. *Si* $\lim\limits_{x_0} f = L_1$ *y* $\lim\limits_{x_0} g = L_2$, *si* $L_2 \neq 0$, *y si* x_0 *es un punto de acumulación del dominio de* $\dfrac{f}{g}$, *entonces* $\lim\limits_{x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)$ *existe y*

$$\lim_{x_0}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{L_1}{L_2}.$$

PRUEBA. Usando los teoremas 5.2 y 5.8, tenemos

$$\lim_{x_0}\left[\frac{f}{g}\right] = \lim_{x_0}\left[f\frac{1}{g}\right] = \lim_{x_0} f \lim_{x_0}\left[\frac{1}{g}\right] = L_1\frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}.$$

5.11 Ejemplo. Encuéntrese $\lim\limits_{2}(I^2+3I-2)$.

SOLUCIÓN.

$$\lim_{2}[I^2+3I-2] = \lim_{2} I^2 + \lim_{2}[3I-2] \qquad [5.1]$$

$$= \lim_{2} I^2 + \lim_{2}[3I] + \lim_{2} -2 \qquad [5.1]$$

$$= \lim_{2} I \lim_{2} I + 3\lim_{2} I + \lim_{2} -2 \qquad [5.2,\ 5.6]$$

$$= 2\cdot 2 + 3\cdot 2 - 2 = 8. \qquad [3.5,\ 3.4]$$

5.12 Ejemplo. Encuéntrese $\lim\limits_{2}\dfrac{I^2+2}{3I}$.

SOLUCIÓN. Como $\lim_{2} [3I] = 3 \lim_{2} I = 6 \neq 0$,

$$\lim_{2} \frac{I^2+2}{3I} = \frac{\lim_{2} [I^2+2]}{\lim_{2} [3I]} \qquad [5.10]$$

$$= \frac{\lim_{2} I \lim_{2} I + \lim_{2} 2}{3 \lim_{2} I} \qquad [5.1, 5.2]$$

$$= \frac{2 \cdot 2 + 2}{6} = 1 \qquad [3.5, 3.4]$$

5.13 Teorema. *Si* $\lim_{x_0} f = L$ *y* $\lim_{t_0} g = x_0$, *si* t_0 *es un punto de acumulación de* $\mathfrak{D}_{f \circ g}$, *y si existe un número* $c > 0$ *tal que* $g(t) \neq x_0$ *siempre que* $0 < |t - t_0| < c$, *entonces*

$$\lim_{t_0} [f \circ g] = L.$$

PRUEBA. Como $\lim f = L$, para cualquier número $\varepsilon > 0$ hay un número $\eta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad (x \in \mathfrak{D}_f \text{ y } 0 < |x - x_0| < \eta).$$

Podemos reemplazar esta desigualdad por

5.14 $$|f(g(t)) - L| < \varepsilon \quad (g(t) \in \mathfrak{D}_f \text{ y } 0 < |g(t) - x_0| < \eta).$$

Como $\lim_{t_0} g = x_0$, hay un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(t) - x_0| < \eta \quad (t \in \mathfrak{D}_g \text{ y } 0 < |t - t_0| < \delta_1).$$

Como por hipótesis $|g(t) - x_0| > 0$ siempre que $t \in \mathfrak{D}_g$ y $0 < |t - t_0| < c$, si δ es el menor de los dos números δ_1 y c, entonces tenemos

5.15 $$0 < |g(t) - x_0| < \eta \quad (t \in \mathfrak{D}_g \text{ y } 0 < |t - t_0| < \delta).$$

Combinando 5.14 y 5.15, tenemos

$$|f(g(t)) - L| < \varepsilon \quad (t \in \mathfrak{D}_g, g(t) \in \mathfrak{D}_f, \text{ y } 0 < |t - t_0| < \delta).$$

Es decir,

$$\lim_{t_0} [f \circ g] = \lim_{t \to t_0} f(g(t)) = L.$$

Problemas

1. Dada la función $f = I+3$, encuéntrense

a) $\lim_{0} f$

b) $\lim_{2} f$

c) $\lim_{3} f$

d) $\lim_{x \to 0} [f(x)-f(x+2)]$

e) $\lim_{h \to 0} f(3+h)$

f) $\lim_{h \to 0} f(2+h)$.

2. Encuéntrese el límite de cada una de las siguientes funciones en $x=0$

a) $f(x) = \dfrac{(3+x)^3-3^3}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{3+x} - \dfrac{1}{3}\right)$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{(3+x)^2-9}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{3(3+x)-9}{x}$

f) $f(x)= \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{-3+x} + \dfrac{1}{3}\right)$.

3. Encuéntrese $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f = I^2$

b) $f = I^3$

c) $f = I^4$

d) $f = I^{-1}$

e) $f = I^{-2}$

f) $f = I^0$

4. Encuéntrese cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2h}{h}$

b) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 h}{h}$

c) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 h}{h^2}$

d) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3h}{h^2}$

e) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\tan h}{h}$

f) $\lim_{h \to 0} h \cos h$

g) $\lim_{h \to 0} \dfrac{\tan^2 h}{h \operatorname{sen} h}$

h) $\lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \cos\left(x + \dfrac{1}{2}h\right) \operatorname{sen} \dfrac{1}{2}h$.

5. Pruébese directamente el corolario 5.7 usando la definición de límite.

6. Pruébese para las siguientes funciones que $\lim_{x_0} f = f(x_0)$

a) $f = 2I^2+3I+1$

b) $f = 5I^3+2I+3$

c) $f = \dfrac{2I+1}{I^2+1}$

d) $f = \dfrac{2I+1}{I^2-1}$ $(x_0 \neq \pm 1)$.

6. CONTINUIDAD

Para una función definida sobre un intervalo, nuestra idea intuitiva de continuidad es que la curva que represente la gráfica de la función debe constituir un trazo ininterrumpido. Si la gráfica de una función tiene interrupciones o saltos, como es el caso con la función "máximo entero contenido", entonces la función no es continua en los puntos en donde las rupturas aparecen. Ahora bien, si la gráfica de una función f no tiene interrupción alguna en el punto $(x_0, f(x_0))$ (figura 12), entonces, cuando x tiende a aproximarse a x_0, $f(x)$ debe aproximarse a $f(x_0)$. Nos lleva esto a la siguiente definición de continuidad.

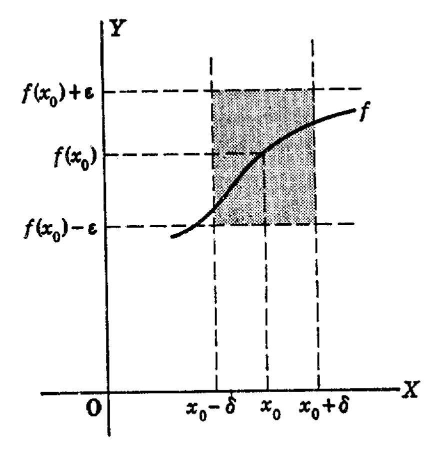


FIGURA 12

6.1 Definición. *La función f es* ***continua en el punto*** *x_0 en $\mathfrak{D}_f$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

siempre que $x \in \mathfrak{D}_f$ y $|x-x_0| < \delta$.

Si x_0 pertenece a $\mathfrak{D}_f$, pero no es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_f$, entonces f es continua en x_0, pues podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que no haya ningún punto de $\mathfrak{D}_f$ distinto del x_0 en $\langle x_0-\delta, x_0+\delta \rangle$, y entonces el único punto que satisface $x \in \mathfrak{D}_f$ y $|x-x_0| < \delta$ es x_0 y $|f(x_0)-f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ para cualquier $\varepsilon > 0$. De dónde, como afirmamos, f es continua en x_0.

Si x_0 es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_f$, entonces la definición 6.1 es equivalente a la función f es continua en el punto x_0 en $\mathfrak{D}_f$ si

$$\lim_{x_0} f = f(x_0).$$

En este caso no necesitamos la restricción $0 < |x-x_0|$ ya que claramente $|f(x_0)-f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

6.2 Ejemplo. Demuéstrese que si $f = I+2$, entonces f es continua en 2.

SOLUCIÓN. El dominio de f es $R = \langle -\infty, \infty\rangle$ y, por tanto, 2 es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_f$. Tenemos $f(2) = 4$ y, de acuerdo con el ejemplo 3.2 (pág. 340), $\lim\limits_{2} f = 4$. Así pues, $\lim\limits_{2} f = 4 = f(2)$. Luego f es continua en 2.

6.3 Definición. *La función f es* ***continua sobre un conjunto*** $\mathcal{S} \subset \mathfrak{D}_f$ *si la función restringida $f_{\mathcal{S}}$ es continua en cada punto de $\mathcal{S}$.*

En la mayoría de los casos de interés $\mathcal{S}$ es un intervalo. Si $\mathcal{S}$ es un intervalo abierto, entonces la definición 6.3 es equivalente a la función f es continua sobre el intervalo abierto $\mathfrak{J}$ si f es continua en cada punto de $\mathfrak{J}$.

Si $\mathcal{S}$ es un intervalo cerrado, entonces la definición 6.3 es equivalente a la función f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ si f es continua sobre el intervalo abierto $\langle a, b\rangle$ y si

$$\lim_{a^+} f = f(a)$$

y

$$\lim_{b^-} f = f(b).$$

De los ejemplos 3.4 y 3.5 (pág. 341), se sigue que la función constante, c, y la función identidad, I, son continuas en todos los puntos x_0. Así pues, estas funciones son continuas sobre el intervalo $\langle -\infty, \infty\rangle$. El ejemplo 3.21 (pág. 351) muestra que la función "máximo entero contenido" $\{(x, [x])\}$ no es continua en n donde n es un entero, ya que en este caso $\lim\limits_{x\to n} [x]$ no existe — $\lim\limits_{x\to n^-} [x] = n-1$ y $\lim\limits_{x\to n^+} [x] = n$. Sin embargo, la función "máximo entero contenido" es continua sobre el intervalo $[n, n+1\rangle$— en n sólo se requiere que $\lim\limits_{x\to n^+} [x] = n = [n]$.

Correspondiéndose con los teoremas sobre límites 5.1, 5.2, y los corolarios 5.7, 5.10, tenemos el siguiente teorema sobre continuidad.

6.4 Teorema. *Si las funciones f y g son continuas en x_0, entonces $f+g$, $f-g$, y fg son continuas en x_0, y $\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0 siempre que $g(x_0) \neq 0$.*

PRUEBA. Si x_0 no es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_{f+g}$, entonces $f+g$ es continua en x_0. Si x_0 es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_{f+g}$, entonces x_0 es un punto de acumulación tanto de $\mathfrak{D}_f$ como de $\mathfrak{D}_g$ y $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$

y $\lim\limits_{x_0} g = g(x_0)$. Por el teorema 5.1,

$$\lim_{x_0} [f+g] = \lim_{x_0} f + \lim_{x_0} g$$

$$= f(x_0)+g(x_0) = [f+g](x_0)$$

y $f+g$ es continua en x_0.

Si x_0 no es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_{fg}$, entonces fg es continua en x_0. Si x_0 es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_{fg}$, entonces x_0 es un punto de acumulación tanto de $\mathfrak{D}_f$ como de $\mathfrak{D}_g$, y $\lim\limits_{x_0} f = f(x_0)$ y $\lim\limits_{x_0} g = g(x_0)$. Por el teorema 5.2,

$$\lim_{x_0} [fg] = \lim_{x_0} f \lim_{x_0} g = f(x_0)\,g(x_0) = [fg](x_0)$$

y fg es continua en x_0.

Las pruebas para la diferencia, $f-g$, y el cociente, f/g, son análogas y se dejarán como problemas (1 y 2).

6.5 Teorema. *Si f es continua en x_0, $\lim\limits_{t_0} g = x_0$, y t_0 es un punto de acumulación del dominio de $f \circ g$, entonces*

$$\lim_{t_0} [f \circ g] = f(x_0).$$

PRUEBA. Como f es continua en x_0, para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\eta > 0$ tal que

6.6 $$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

siempre que $x \in \mathfrak{D}_f$ y $|x-x_0| < \eta$. Además, como $\lim\limits_{t_0} g = x_0$, para $\eta > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que

6.7 $$|g(t)-x_0| < \eta$$

siempre que $t \in \mathfrak{D}_g$ y $0 < |t-t_0| < \delta$.

Ahora bien, si $t \in \mathfrak{D}_{f\circ g}$ y $0 < |t-t_0| < \delta$, entonces $t \in \mathfrak{D}_g$ y por 6.7.

$$|g(t)-x_0| < \eta.$$

Además $g(t) \in \mathfrak{D}_f$, y de ello, por 6.6

$$|f(g(t))-f(x_0)| < \varepsilon.$$

Hemos mostrado así que para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|[f \circ g](t)-f(x_0)| < \varepsilon$$

siempre que $t \in \mathfrak{D}_{f\circ g}$ y $0 < |t-t_0| < \delta$. Es decir, que

$$\lim_{t_0} [f \circ g] = f(x_0).$$

Nota. Obsérvese que si $\lim_{t_0} g$ existe y f es continua en $\lim_{t_0} g$, entonces el teorema 6.5 nos dice que

$$\lim_{t \to t_0} f(g(t)) = f(\lim_{t \to t_0} g(t)).$$

6.8 Corolario. *Si g es continua en t_0 y f es continua en $g(t_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en t_0.*

PRUEBA. Si t_0 no es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_{f \circ g}$, entonces $f \circ g$ es continua en t_0. Si t_0 es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_{f \circ g}$, entonces, como $\mathfrak{D}_{f \circ g} \subset \mathfrak{D}_g$, t_0 debe ser un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_g$ y $\lim_{t_0} g = g(t_0)$. Entonces, por el teorema 6.5,

$$\lim_{t_0} [f \circ g] = f(g(t_0)) = [f \circ g](t_0)$$

y $f \circ g$ es continua en t_0.

Recuérdese que una función de la forma

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k I^k,$$

donde las a_k son funciones constantes, se llama *función polinomial* o simplemente polinomio. Como una función polinomial está construida por multiplicación y adición de la función identidad y de funciones constantes, y estas funciones son continuas sobre el intervalo $\langle -\infty, \infty \rangle$, entonces, por el teorema 6.4, se sigue por inducción que cualquier función polinomial es continua sobre el intervalo $\langle -\infty, \infty \rangle$.

Una *función racional* es una función que es el cociente de dos funciones polinomiales. Por el teorema 6.4 una función racional es continua en todos los puntos, excepto en aquéllos en que el denominador se hace cero. Sin embargo, una función racional no está definida en tales puntos; por tanto, las funciones racionales son continuas en todos los puntos de su dominio de definición.

Una función se llama continua si es continua en todos los puntos de su dominio. Las funciones polinomiales y las funciones racionales son funciones continuas.

El ejemplo 3.11 (pág. 346) muestra que la función raíz cuadrada, $I^{1/2}$, es continua en su dominio de definición $[0, \infty\rangle$ y el ejemplo 3.12 (pág. 347) muestra que la raíz cúbica, $I^{1/3}$, es continua en su dominio de definición $\langle -\infty, \infty \rangle$. Más adelante, en el capítulo 14, definiremos I^r para todo número real r y veremos que I^r es una función continua. Así pues, usando el corolario 6.8, podremos concluir que todas las funciones algebraicas simples son funciones continuas.

Ahora bien, es también cierto que las funciones trigonométricas son continuas en todos los puntos en que están definidas. Primero vamos a demostrar que la función seno es continua en el intervalo $\langle -\infty, \infty \rangle$. Usando los límites 4.1 y 4.2, los teoremas 5.1 y 5.2 y el corolario 5.6, tenemos, para cualquier $x \in \langle -\infty, \infty \rangle$

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(x+h) &= \lim_{h \to 0} [\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h] \\ &= \operatorname{sen} x \lim_{h \to 0} \cos h + \cos x \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} h \\ &= \operatorname{sen} x \,. \end{aligned}$$

Así pues, la función seno es continua en el intervalo $\langle -\infty, \infty \rangle$. Análogamente, $\lim_{h \to 0} \cos(x+h) = \cos x$ para cualquier $x \in \langle -\infty, \infty \rangle$, de modo que la función coseno es también continua en el intervalo $\langle -\infty, \infty \rangle$. De ello y del teorema 6.4, se sigue que las restantes funciones trigonométricas son continuas en todos los puntos en que están definidas. Por ejemplo, la función coseno es cero en $n\pi + \pi/2$ con n un entero. Para estos valores las funciones tangente y secante no están definidas y por consiguiente no son continuas en $n\pi + \pi/2$. Sin embargo, son continuas en todos los puntos de su dominio de definición.

En resumen, sabemos ahora que *todas las funciones polinomiales, racionales, potenciales y trigonométricas son funciones continuas*. Además, del corolario 6.8 se sigue que todas las composiciones de estas funciones son también funciones continuas.

El siguiente teorema es análogo al teorema 3.16 (pág. 350).

6.9 Teorema. *Si f es una función continua en x_0 y $a < f(x_0) < b$, entonces existe un número $\delta > 0$ tal que*

$$a < f(x) < b$$

para todo x en el dominio de f que satisfaga $|x - x_0| < \delta$.

PRUEBA. (Figura 13.) Sea $\varepsilon = \text{mín}\,\{b - f(x_0),\, f(x_0) - a\}$; entonces

6.10 $$a \leqslant f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon \leqslant b.$$

Ahora bien, como f es continua en x_0, existe para el ε tomado un $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en $\mathfrak{D}_f$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

o

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

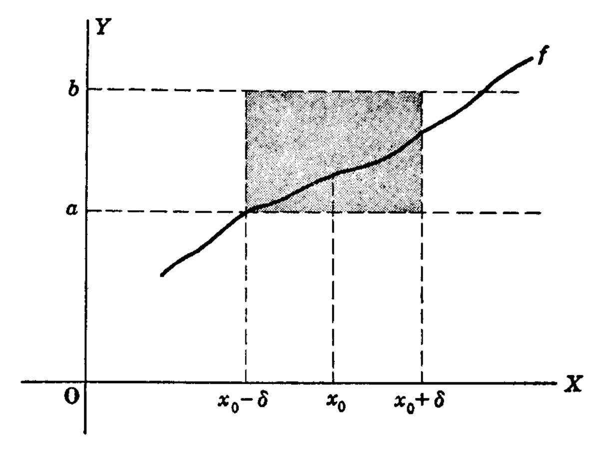


FIGURA 13

Combinando esta última desigualdad con 6.10, obtenemos

$$a \leqslant f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon \leqslant b$$

para todo x en $\mathfrak{D}_f$ que satisfaga $|x-x_0| < \delta$.

6.11 Corolario. *Si f es una función continua en x_0 y $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$), entonces existe un número $\delta > 0$* tal que *$f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) siempre que x esté en $\mathfrak{D}_f$ y $|x-x_0| < \delta$.*

Problemas

1. Pruébese que: si las funciones f y g son continuas en x_0, entonces $f-g$ es continua en x_0.

2. Pruébese que: si las funciones f y g son continuas en x_0 y $g(x_0) \neq 0$, entonces f/g es continua en x_0.

3. Pruébese el corolario 6.11.

4. Pruébese que la función coseno es continua en el intervalo $\langle -\infty, \infty\rangle$.

5. Demuéstrese que las siguientes funciones son continuas en el intervalo $\langle -\infty, \infty\rangle$:

a) $f(x) = \operatorname{sen}(Ax+B)$ *b*) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x)$.

6. Pruébese que la función f definida por

$$\begin{cases} f(x) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

es continua en $\langle -\infty, \infty\rangle$.

7. ¿ Es la función f definida por

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\tan x}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

continua en $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$?

8. Para las siguientes funciones f encuéntrense los puntos (si es que hay algunos) donde la función no es continua:

a) $f(x) = \cot x$

b) $f(x) = x^5 - x^3 + 1$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^3-4x^2+4x}$

d) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+x+1}$

e) $\begin{cases} f(x) = x^2-2, \; x \in \langle -\infty, 3] \\ f(x) = 2x+1, \; x \in \langle 3, \infty \rangle \end{cases}$

f) $\begin{cases} f(x) = 0, \; x \in \langle -\infty, 0] \\ f(x) = x, \; x \in \langle 0, 1 \rangle \\ f(x) = 1, \; x \in [1, \infty \rangle \end{cases}$

9. Pruébese que la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en $\langle -\infty, \infty \rangle$.

10. Demuéstrese que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} ch}{h} = c.$$

Sugerencia. Nótese que, para $h \neq 0$, $\dfrac{\operatorname{sen} ch}{h} = cf(ch)$ donde f es la función del problema 9.

***11.** Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las funciones definidas y continuas sobre un intervalo $\mathfrak{J}$. Muéstrese que $\mathcal{C}$ es un grupo respecto a la operación de adición de funciones.

***12.** Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las funciones f definidas y continuas sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y tales que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathfrak{J}$. ¿Demuéstrese que $\mathcal{C}$ es un grupo respecto a la multiplicación de funciones.

7. VELOCIDAD

Daremos ahora un ejemplo de problema físico que requiere la noción de límite. Nos ocuparemos del movimiento de un punto geométrico u objeto cuyas dimensiones son despreciables comparadas con la distancia entre los objetos o con el movimiento que se estudia. Este objeto se llama partícula. Así, por ejemplo, la tierra puede considerarse una partícula cuando se considera su movimiento respecto del sol, pero está muy lejos de ser una partícula para nosotros cuando nos movemos sobre su superficie.

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta (figura 14). Cuando el tiempo cambia, la posición de la partícula en la

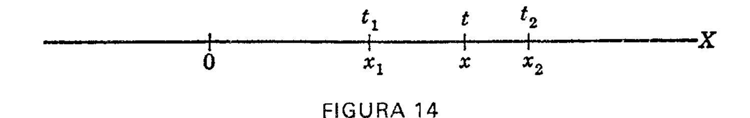


FIGURA 14

recta cambia. Denotemos por $x(t)$ la distancia dirigida de la partícula a punto de referencia 0 en el instante t; entonces $x = \{(t, x(t))\}$ es una función —la función tiempo-desplazamiento. En el tiempo t_1 la partícula tiene la posición $x_1 = x(t_1)$ y en el tiempo t_2 la posición $x_2 = x(t_2)$. La distancia $x_2 - x_1$ se llama desplazamiento de la partícula en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$. Si, como se muestra en la figura 14, $x_2 > x_1$, entonces $x_2 - x_1$ es un desplazamiento positivo. La velocidad media $\bar{v}$ de la partícula durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ está definida como

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Supongamos ahora que intentamos definir la velocidad instantánea de la partícula en el instante t_0 cuando está pasando por la posición $x_0 = x(t_0)$. Si encontramos las velocidades medias sobre intervalos de tiempo más y más pequeños que comiencen o terminen en t_0, estas velocidades medias pueden aproximarse a un valor bien definido denotado por $x'(t_0)$ (léase "x prima en t_0"). Este valor límite

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

de las velocidades medias medidas sobre intervalos de tiempo más y más pequeños alrededor de t_0, si existe, es ciertamente una medida de cuán rápido se mueve la partícula cerca de t_0. Es, pues, natural definir la *velocidad*, $v(t_0)$, *en el tiempo* t_0, como $x'(t_0)$.

Es a menudo conveniente representar gráficamente el desplazamiento y la velocidad. Podemos hacer esto dibujando la gráfica de la función tiempo-desplazamiento $x = \{(t, x(t))\}$ (figura 15). En el tiempo t_1 la partícula tiene un desplazamiento $x_1 = x(t_1)$ desde **O** y está representada por el

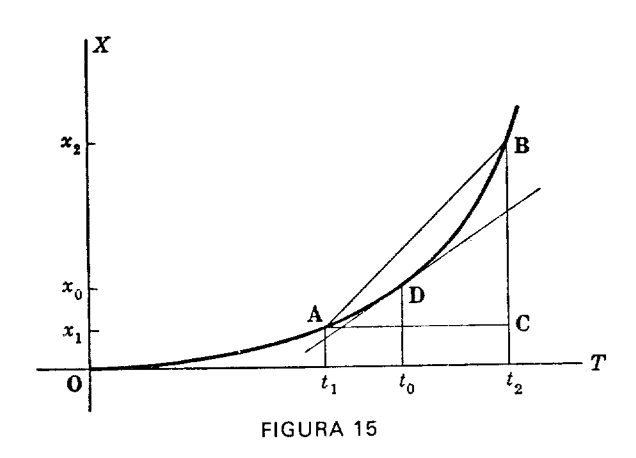


FIGURA 15

punto $\mathbf{A} = (t_1, x(t_1))$. Análogamente, en t_2 la partícula tiene un desplazamiento $x_2 = x(t_2)$ desde **O** y está representada por el punto **B**. La velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es

$$\frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$$

y corresponde geométricamente a la pendiente de la secante $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. La velocidad instantánea $x'(t_0)$ corresponde a la pendiente de la tangente a la gráfica de la función desplazamiento x en el punto $\mathbf{D} = (t_0, x(t_0))$.

7.1 Ejemplo. Considérese una partícula que se mueve a lo largo de una recta para la que la función tiempo-desplazamiento es

$$x = \{(t, t^2)\}.$$

¿Cuál es la velocidad en el tiempo t_0?

SOLUCIÓN. La velocidad en t_0 es

$$v(t_0) = x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{t^2-t_0^2}{t-t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \left[\left(\frac{t-t_0}{t-t_0}\right)(t+t_0)\right] = \lim_{t \to t_0} (t+t_0) = 2t_0.$$

Compárese este resultado con el ejemplo 2.2 (pág. 336).

Problemas

1. Encuéntrese la velocidad en el tiempo t_0 para los movimientos a lo largo de una recta descritos por las siguientes funciones tiempo-desplazamiento:

a) $x = \{(t, 16t^2)\}$ *b)* $x = \{(t, 4)\}$
c) $x = \{(t, 16t^2+5)\}$ *d)* $x = \{(t, t+2)\}$
e) $x = \{(t, 2t^3-3)\}$ *f)* $x = \{(t, t^4)\}$.

2. La aceleración promedio $\bar{a}$ de una partícula durante el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ se define por

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Defínase la aceleración instantánea en el tiempo t_0 usando la definición de velocidad instantánea como modelo.

3. Lo siguiente es un registro tiempo-distancia del comportamiento de dos automóviles en una prueba sobre aceleración:

Tiempo (segundos)	Distancia (en metros)	
	Auto A	Auto B
0	0	0
5	35	40
10	80	100
15	150	210
20	240	320
25	380	470
30	600	670
35	900	900
40	1 220	1 200

Preséntese, dibujando gráficas continuas, una comparación del comportamiento de los dos carros respecto a

a) tiempo-distancia,
b) tiempo (en segundos)-velocidad (en kilómetros por hora),
c) tiempo (en segundos)-aceleración (en kilómetros por hora/segundo).

8. LA DERIVADA

En la sección 2, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función g en un punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, g(x_0))$ se definía por

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x_0} \frac{g-g(x_0)}{I-x_0}.$$

En la sección 7 definimos la velocidad como

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t_0} \frac{x-x(t_0)}{I-t_0},$$

donde x era la función tiempo-desplazamiento de una partícula que se movía a lo largo de una recta.

Estas dos definiciones contienen el mismo tipo de límite. Como esta clase de límite ocurre frecuentemente en matemáticas y en las aplicaciones de las matemáticas, se estudia como si constituyera una entidad por sí solo y se le da el nombre de "derivada".

Nota. Siempre que consideremos derivadas de funciones, supondremos que todas las funciones que aparezcan en nuestras discusiones están definidas sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ consistente en más de un punto o en la unión de varios de tales intervalos.

8.1 Definición. *Si f es una función, entonces f' (léase "f prima"), la* ***derivada*** *de f, es una función con regla de correspondencia*

$$f'(x_0) = \lim_{x_0} \frac{f-f(x_0)}{I-x_0}$$

que tiene como dominio el conjunto de todos los números del dominio de f para los que existe tal límite.

Así pues, la derivada de una función f en x_0 se denota por $f'(x_0)$ y

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Sea

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

como

$$\lim_{x_0} g = \lim_{0} g \circ (x_0+I) = \lim_{h \to 0} g(x_0+h),$$

obtenemos

$$f'(x_0) = \lim_{0} \frac{f\circ(x_0+I)-f(x_0)}{I} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

La cantidad $f(x_0+h)-f(x_0)$ es el cambio de valor de la función cuando x_0 cambia en la cantidad h, y la razón $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ es una razón de cambio promedio. La derivada de f en x_0 es el límite de esta razón de cambio promedio y se llama razón "instantánea" de cambio en x_0 (figura 16).

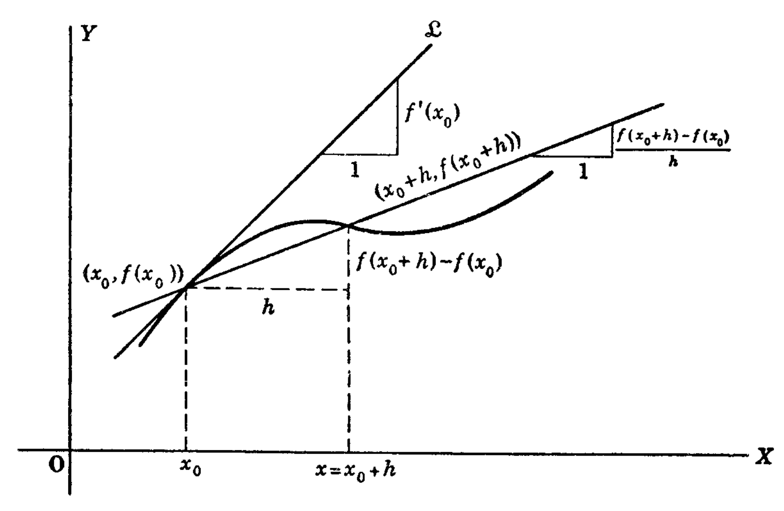


FIGURA 16

La definición de recta tangente puede formularse ahora usando el concepto de derivada (figura 16): la *recta tangente* $\mathcal{L}$ a la gráfica de una función f en el punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, f(x_0))$ es la recta que pasa por $\mathbf{P}_0$ de pendiente $f'(x_0)$ —la derivada de f en x_0— si la derivada existe. Así pues, la recta tangente a la gráfica en $\mathbf{P}_0$ es la recta

$$\mathcal{L} = \{(x_0, f(x_0)) + t(1, f'(x_0))\};$$

una ecuación de la recta tangente $\mathcal{L}$ es

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

La velocidad de una función x en el tiempo t_0 es $x'(t_0)$, la derivada de x en t_0, si es que la derivada existe.

Si x es un número en el dominio de f', entonces decimos que f es *diferenciable* en x.

8.2 Definición. *La función f es **diferenciable sobre un intervalo** $\mathfrak{J}$ si la función restringida $f_{\mathfrak{J}}$ es diferenciable en cada punto de $\mathfrak{J}$.*

Si $\mathfrak{J}$ es un intervalo abierto, entonces la definición 8.2 es equivalente a la función f es diferenciable en el intervalo abierto $\mathfrak{J}$ si f es diferenciable en todo punto de $\mathfrak{J}$.

Si $\mathfrak{J}$ es un intervalo cerrado $[a, b]$ $(a < b)$, entonces la definición 8.2 es equivalente a la función f es diferenciable en el intervalo cerrado $[a, b]$ si f es diferenciable en cada punto del intervalo abierto $\langle a, b\rangle$ y si

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

y

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

existen.

Además de f', se usará con frecuencia la notación Df para denotar a la derivada de f. Advertimos al estudiante que Df no significa f multiplicado por D sino que más bien lo que representa es una función derivada de la función f por la operación de tomar la derivada de f —la operación se llama *diferenciación.* Cuando se usa esta notación, se escribe frecuentemente $D_x f(x)$ para denotar a $f'(x)$ en lugar de escribir $[Df](x)$. Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen} x$, escribiremos $f'(x) = D_x \operatorname{sen} x$.

8.3 Ejemplo. Encuéntrese el valor de la derivada de f en 2 si $f = I^2$.

SOLUCIÓN. Tenemos

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}.$$

Éste es el límite evaluado en el ejemplo 3.3 (pág. 341). Por tanto, $f'(2) = 4$

8.4 Ejemplo. Encuéntrese la derivada f' de f, si $f = I^2$.

SOLUCIÓN. Tenemos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{h}{h}(2x+h)\right] = 2x.$$

Así pues, esta función es diferenciable para todos los números en el intervalo $\langle -\infty, \infty \rangle$. $DI^2 = 2I$ y la regla de correspondencia de la derivada de f es $f'(x) = 2x$ o $D_x x^2 = 2x$. Nótese que este resultado contiene el resultado del ejemplo 8.3. Compárese este resultado con los ejemplos 2.2 (pág. 336) y 7.1 (pág. 373).

8.5 Ejemplo. Encuéntrese la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (2, 4).

SOLUCIÓN. La pendiente de la recta tangente es $f'(2)$ donde $f = I^2$. Pero, por el ejemplo 8.4, $f'(2) = 4$. Por tanto, la recta tangente es

$$\mathfrak{L} = \{(2, 4) + t(1, 4)\}.$$

Una ecuación para la recta tangente $\mathfrak{L}$ es

$$y = 4(x-2)+4$$

o

$$y = 4x-4.$$

8.6 Ejemplo. Encuéntrese la derivada f' de la función constante $f = \{(x, c)\}$.

SOLUCIÓN.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Así pues, la derivada de cualquier función constante $\{(x, c)\}$ es la función cero $\{(x, 0)\}$. La gráfica de una función constante es una recta horizontal. Es su propia recta tangente en cada uno de sus puntos y esta tangente tiene pendiente 0.

8.7 Ejemplo. Encuéntrese sen D.

SOLUCIÓN. Usando 3.29 del capítulo 6 (pág. 277), para cualquier $x \in R$,

$$D_x \operatorname{sen} x = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2 \cos(x+\frac{1}{2}h) \operatorname{sen}(\frac{1}{2}h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos (x+\frac{1}{2}h) \operatorname{sen} (\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos (x+\tfrac{1}{2}h) \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} (\frac{1}{2}h)}{\frac{1}{2}h}$$

$$= \cos x,$$

donde el límite de 4.3 (pág. 356) y la continuidad de la función coseno han sido empleados. Así pues

$$D \operatorname{sen} = \cos.$$

8.8 Ejemplo. Encuéntrese la derivada DI de la función identidad $I = \{(x, x)\}$.

SOLUCIÓN. Para cualquier $x \in R$,

$$D_x I(x) = D_x x = \lim_{h\to 0} \frac{I(x+h)-I(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

8.9 Ejemplo. Encuéntrese $DI^{1/2}$.

SOLUCIÓN.

$$D_x\sqrt{x} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$, obtenemos

$$D_x\sqrt{x} = \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}]} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

donde se usó la continuidad de la función raíz cuadrada para obtener el límite (ejemplo 3.11, pág. 346).

El siguiente teorema enuncia una relación entre diferenciabilidad de una función en un punto y continuidad en el punto.

8.10 Teorema. *Si la función f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.*

PRUEBA. Si f es diferenciable en x_0, entonces

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

La función f es continua en x_0 si

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) = \lim_{h\to 0} f(x_0)$$

o, equivalentemente, si

$$\lim_{h\to 0} \{f(x_0+h)-f(x_0)\} = 0.$$

Ahora bien,

$$\lim_{h\to 0} \{f(x_0+h)-f(x_0)\} = \lim_{h\to 0} \left\{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

de modo que f es continua en x_0.

El recíproco del teorema 8.10 no es cierto. Es decir, una función f puede ser continua en x_0, pero no ser diferenciable en x_0. Por ejemplo, la función valor absoluto $f = \{(x, |x|)\}$ es continua en cero, pero no es diferenciable en cero. La función valor absoluto no es diferenciable en cero porque

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

no existe, como mostramos en el ejemplo 3.9 (pág. 344). Sin embargo, la función es continua en 0 ya que por el problema 3 (pág. 355) sabemos que

$$\lim_{h\to 0} |0+h| = \lim_{h\to 0} |h| = 0 = |0|.$$

La gráfica de esta función no se rompe en cero, pero no tiene una tangente en cero (figura 17).

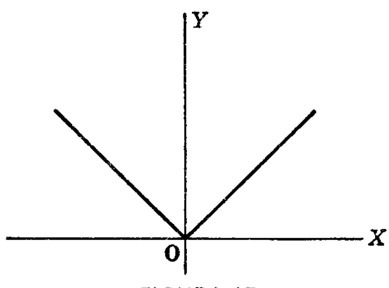


FIGURA 17

8.11 Corolario. *Si la función f es diferenciable sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces f es continua en $\mathfrak{J}$.*

PRUEBA. Aplíquese el teorema 8.10 a $f_{\mathfrak{J}}$.

Nota. Se pueden introducir las derivadas izquierda y derecha que se definen como sigue: la derivada izquierda de f en x_0 es

$$f'^{-}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

y la derivada derecha de f en x_0 es

$$f'^{+}(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Si una función f está definida en un intervalo abierto que contiene a x_0, entonces f tiene una derivada (es diferenciable) en x_0 si y sólo si tiene tanto derivada izquierda como derivada derecha en x_0 y ambas son iguales (problema 4). Por ejemplo, la función valor absoluto $f = \{(x, |x|)\}$ tiene una derivada izquierda en cero, $f'^{-}(0) = -1$, y una derivada derecha en cero, $f'^{+}(0) = +1$. Sin embargo, no son iguales. Por tanto, la función valor absoluto no es diferenciable en cero. La función valor absoluto es diferenciable en $\langle -\infty, 0]$ y en $[0, \infty\rangle$, pero no es diferenciable en cero.

Problemas

1. Usando el ejemplo 8.7 como modelo, demuéstrese que

$$D \cos = -\text{sen}.$$

2. Encuéntrese para cada uno de los siguientes casos la derivada de f:

a) $f = 2I+1$

b) $f = 5-6I^2$

c) $f = mI+b$

d) $f = I^2+3I$

e) $f = aI^2$

f) $f = aI^2+bI+c$

g) $f = \dfrac{1}{I+5}$

h) $f = \dfrac{I}{I-2}$

i) $f = \dfrac{I}{I^2+3}$

j) $f = \dfrac{1}{2I^2+1}$

k) $f = \dfrac{I^3+2I}{I}$

l) $f = \dfrac{I^2+2}{I}$.

3. Encuéntrese la derivada de f cuando:

a) $f(x) = 2-3x$

b) $f(x) = mx+b$

c) $f(x) = ax^2$

d) $f(x) = 2x-x^2$

e) $f(x) = 4x^2+2x^3$

f) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+2}$

h) $f(x) = \dfrac{x+4}{x}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

j) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$.

4. Pruébese que: si una función f está definida en un intervalo abierto que contiene a x_0, entonces f es diferenciable en x_0 si y sólo si tiene tanto derivada derecha como derivada izquierda en x_0 y las dos son iguales.

5. Encuéntrese la derivada de f cuando:

a) $f(x) = [x]$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

c) $\begin{cases} f(x) = 2x, & x\in\langle -\infty, 3] \\ f(x) = 3, & x\in\langle 3, \infty\rangle \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(x) = x^2, & x\in\langle -\infty, 0] \\ f(x) = 0, & x\in\langle 0, \infty\rangle \end{cases}$

9. TEOREMAS SOBRE DERIVADAS

En esta sección sistematizaremos nuestro estudio de las derivadas estableciendo algunas de sus propiedades fundamentales e ilustrando cómo estas propiedades (que pueden llamarse reglas) pueden aplicarse para calcular numerosas derivadas partiendo de las pocas y sencillas fórmulas que hemos derivado por el cálculo directo del límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

9.1 Teorema. *Si f y g son diferenciables en un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces $f+g$ es diferenciable en $\mathfrak{J}$ y*

$$D[f+g] = Df+Dg \text{ en } \mathfrak{J}.$$

PRUEBA. En la prueba podemos suponer que las funciones f y g tienen, ambas, como dominio el intervalo $\mathfrak{J}$. En otro caso, f y g se reemplazarían por las funciones restringidas a $\mathfrak{J}$. En particular, en los puntos extremos de un intervalo cerrado únicamente pedimos derivadas a un solo lado. Sea x

un número cualquiera en $\mathfrak{J}$, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f+g](x+h)-[f+g](x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= Df(x)+Dg(x) = [Df+Dg](x).$$

Por tanto

$$D[f+g] = Df+Dg \text{ en } \mathfrak{J}.$$

No es cierto que $f+g$ diferenciable en $\mathfrak{J}$ implique f y g diferenciables en $\mathfrak{J}$. Por ejemplo, si

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ para } x \text{ racional} \\ 0 \text{ para } x \text{ irracional} \end{cases} \quad \text{y } g(x) = \begin{cases} 0 \text{ para } x \text{ racional} \\ 1 \text{ para } x \text{ irracional} \end{cases}$$

entonces $f+g = 1$ sobre R y ni f es diferenciable ni g lo es.

9.2 Ejemplo. Encuéntrese $D(I^2+I+4)$.

SOLUCIÓN. DI^2, DI, y $D4$ están definidas sobre toda la recta $\langle-\infty, \infty\rangle$. Por tanto $D(I^2+I+4)$ está definida sobre $\langle-\infty, \infty\rangle$ y

$$\begin{aligned} D[I^2+I+4] &= DI^2+D[I+4] && [9.1]\\ &= DI^2+DI+D4 && [9.1]\\ &= 2I+1+0 && [8.4, 8.8, 8.6]. \end{aligned}$$

9.3 Teorema. *Si f y g son diferenciables en un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces fg es diferenciable en $\mathfrak{J}$ y*

$$D[fg] = fDg+gDf \text{ en } \mathfrak{J}.$$

PRUEBA. En la prueba, podemos suponer que las funciones f y g tienen el intervalo $\mathfrak{J}$ como dominio. Sea x un número cualquiera en $\mathfrak{J}$, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{[fg](x+h)-[fg](x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h}.$$

Sumando y restando el término $f(x+h)\,g(x)$ en el numerador —el término $f(x)\,g(x+h)$ puede, si se quiere, usarse en su lugar— y reagrupando

términos, la expresión anterior toma la forma

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,[g(x+h)-g(x)]+g(x)\,[f(x+h)-f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\,Dg(x)+g(x)\,Df(x) = [fDg+gDf]\,(x).$$

Por tanto

$$D[fg] = fDg+gDf \text{ en } \mathfrak{J}.$$

Adviértase que $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ ya que $f'(x)$ existe y, por tanto, por el teorema 8.10 (pág. 379), f es continua en x.

9.4 Corolario. *Si g es diferenciable en un intervalo $\mathfrak{J}$ y c es una función constante, entonces cg es diferenciable en $\mathfrak{J}$ y*

$$D[cg] = cDg \text{ en } \mathfrak{J}.$$

PRUEBA. Sea, en el teorema 9.3, la función f la función constante $c = \{(x, c)\}$. Por el ejemplo 8.6 (pág. 378), c es diferenciable en R y $Dc = 0$ en R. De donde c es diferenciable en $\mathfrak{J}$ y $Dc = 0$ en $\mathfrak{J}$.

9.5 Ejemplo. Encuéntrese $D[(I^2+I+4)\text{ sen}]$.

SOLUCIÓN. (I^2+I+4) y sen son diferenciables sobre R (ejemplos 9.2 y 8.7). Por tanto (I^2+I+4) sen es diferenciable sobre R y

$$D[(I^2+I+4)\text{ sen}] = (I^2+I+4)\,D\text{ sen} + \text{sen } D(I^2+I+4) \quad [9.3]$$
$$= (I^2+I+4)\cos + (2I+1)\text{ sen} \quad [8.7, 9.2].$$

9.6 Teorema. *Si g es diferenciable en un intervalo $\mathfrak{J}$ y para todo $x\in\mathfrak{J}$, $g(x) \neq 0$, entonces g^{-1} es diferenciable en $\mathfrak{J}$ y*

$$Dg^{-1} = -g^{-2}Dg \text{ en } \mathfrak{J}.$$

PRUEBA. De nuevo podemos suponer en la prueba que la función g tiene el intervalo $\mathfrak{J}$ como dominio. Sea x un número cualquiera en $\mathfrak{J}$; entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{g^{-1}(x+h)-g^{-1}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+h)} - \dfrac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{hg(x+h)\,g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{-1}{g(x+h)\,g(x)} \; \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right\}$$

$$= \frac{-1}{g^2(x)} D_x g(x) = -g^{-2}(x) D_x g(x)$$

pues la diferenciabilidad de g en x y $g(x) \neq 0$ implica

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} = \frac{1}{g(x)}.$$

Por tanto

$$Dg^{-1} = -g^{-2} Dg \text{ en } \mathfrak{J}.$$

9.7 Corolario. *Si f y g son diferenciables en un intervalo $\mathfrak{J}$ y para toda $x \in \mathfrak{J}$, $g(x) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es diferenciable en $\mathfrak{J}$ y*

$$D\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{gDf - fDg}{g^2} \text{ en } \mathfrak{J}.$$

PRUEBA.

$$D\left[\frac{f}{g}\right] = D[fg^{-1}]$$

$$= fDg^{-1} + g^{-1}Df \qquad [9.3]$$

$$= -fg^{-2}Dg + g^{-1}Df \qquad [9.6]$$

$$= \frac{gDf - fDg}{g^2}.$$

Por tanto

$$D\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{gDf - fDg}{g^2} \text{ en } \mathfrak{J}.$$

9.8 Ejemplo. Encuéntrese D tan.

SOLUCIÓN. Como sen y cos son diferenciables sobre R, para cualquier intervalo $\mathfrak{J}$ que no contenga punto alguno en que cos sea cero,

$$D \tan = D \frac{\text{sen}}{\cos}$$

$$= \frac{\cos D \,\text{sen} - \text{sen}\, D \cos}{\cos^2} \qquad [9.7]$$

$$= \frac{\cos^2 + \operatorname{sen}^2}{\cos^2} \qquad [8.7, \text{ problema 1, pág. 381}]$$

$$= \frac{1}{\cos^2} = \sec^2 .$$

Con la ayuda de los teoremas 9.3 y 9.6, podemos ahora encontrar la derivada de las funciones potenciales I^n para n un entero cualquiera.

9.9 Teorema. $DI^n = nI^{n-1}$ *para n un entero cualquiera.*

> *Nota.* Debe notarse que cuando $n < 0$, 0 no está en el dominio de I^n y, por ello, es claro que tampoco en el dominio de DI^n.

PRUEBA. Estableceremos primero la fórmula para un n entero positivo por inducción matemática. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los enteros positivos n para los que la fórmula se verifica.

1) $1 \in \mathcal{S}$ ya que, por 8.8, $DI = 1 = 1I^{1-1}$.
2) Si $k \in \mathcal{S}$, es decir, si $DI^k = kI^{k-1}$, entonces

$$DI^{k+1} = D[I^k I] = I^k DI + IDI^k \qquad [9.3]$$

$$= I^k + I(kI^{k-1}) \qquad [8.8]$$

$$= (1+k)I^k$$

y $k+1 \in \mathcal{S}$. Por tanto, por el principio de inducción, $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros positivos y la fórmula queda probada para cualquier n entero positivo.

Para $n = 0$, por 8.6, $DI^0 = D1 = 0 = 0I^{-1}$ y la fórmula se verifica para $n = 0$.

Si n es un entero negativo, si $m = -n$, entonces m es un entero positivo y podemos aplicar el teorema 9.6. Por tanto

$$DI^n = DI^{-m} = D(I^m)^{-1} = -(I^m)^{-2} DI^m \qquad [9.6]$$

$$= -I^{-2m} mI^{m-1}$$

$$= -mI^{-m-1} = nI^{n-1}$$

y la fórmula se verifica para un entero cualquiera n.

> *Nota.* Más adelante, en el capítulo 14, veremos que la fórmula del teorema 9.9 se verifica para cualquier número real r. Hasta este momento, I^r se ha definido sólo para un número racional r. De aquí en adelante usaremos la fórmula $DI^r = rI^{r-1}$ para cualquier número racional r aunque sólo la hayamos probado para r entero o igual a $\frac{1}{2}$ (en el ejemplo 8.9) o igual a $\frac{1}{3}$ (en el problema 5*b* de la sección 8).

9.10 Ejemplo. Encuéntrese $D(5I^5+2I^3+3I)$.

SOLUCIÓN. Como cada término en $5I^5+2I^3+3I$ es diferenciable en R, $5I^2+2I^3+3I$ es diferenciable en R y

$$\begin{aligned} D(5I^5+2I^3+3I) &= 5DI^5+2DI^3+3DI && [9.1, 9.4] \\ &= 25I^4+6I^2+3 && [9.9]. \end{aligned}$$

Problemas

1. Pruébese que: si f y g son diferenciables en un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces $f-g$ es diferenciable en $\mathfrak{J}$ y $D(f-g) = Df-Dg$ en $\mathfrak{J}$.

2. Demuéstrese que: $D \cot = -\csc^2$.

3. Demuéstrese que: $D \sec = \sec \tan$.

4. Demuéstrese que: $D \csc = -\csc \cot$.

5. Pruébese que para n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ diferenciables en un intervalo $\mathfrak{J}$,

$$D \sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} Df_i \text{ en } \mathfrak{J}.$$

6. Demuéstrese que si f es una función polinomial

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k I^k,$$

entonces

$$Df = \sum_{k=1}^{n} k a_k I^{k-1} \text{ en R}.$$

7. Encuéntrese cada una de las siguientes derivadas:

a) $D(5I^2+2I+3)$

b) $D(I+\frac{2}{3}I^3+\frac{1}{5}I^5)$

c) $D(I^2+\text{sen})$

d) $D(I^3+\cos)$

e) $D(\text{sen}+\tan)$

f) $D(\sec-\tan)$

g) $D(\sec^2-\tan^2)$

h) $D(2I \tan)$

i) $D(2 \tan)$

j) $D(2I \cot)$

k) $D(I^2-\text{sen})$

l) $D(\text{sen}-I^2)$

m) $D(I^2 \text{ sen})$

n) $D\left(\frac{I^2}{1+I}\right)$

o) $D\left(\frac{\cos}{1+I^2}\right)$

p) $D\left(\frac{\cos}{\cot}\right)$

q) $D\left(\dfrac{\text{sen}}{\text{csc}}\right)$ *r*) $D(\text{sen csc})$

s) $D\left(\dfrac{1+\text{sen}}{1+\cos}\right)$ *t*) $D[I^2 \circ (I^2+1)]$.

8. Encuéntrese cada una de las siguientes derivadas:

a) $D_x(4x^4+4x^2+3x)$ *b*) $D_x(\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5)$
c) $D_x(x^2+\cos x)$ *d*) $D_x(x+\text{sen } x)$
e) $D_x(x^2 \cos x)$ *f*) $D_x(\text{sen } x+\cos x)$
g) $D_x(\text{sen}^2 x+\cos^2 x)$ *h*) $D_x(\text{sen } x-\cos x)$
i) $D_x(2 \text{ sen } x)$ *j*) $D_x(2\cos x)$
k) $D_x(\cos x+x \text{ sen } x)$ *l*) $D_x(x+1)^2$

m) $D_x\left(\dfrac{\text{sen } x}{x}\right)$ *n*) $D_x\left(\dfrac{1}{a}\text{ sen } x\right)$

o) $D_x(\text{sen } x \cos x)$ *p*) $D_x\left(\dfrac{3x^2+5x}{\sec x}\right)$

q) $D_x(x^3 \text{ sen } x)$ *r*) $D_x(\tan x \cot x)$

s) $D_x\left(\dfrac{\text{sen } x}{\tan x}\right)$ *t*) $D_x(2x+1)^{-2}$

u) $D_x(\text{sen } x \tan x)$ *v*) $D_x\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

w) $D_x[(2x-3)\cos x]$ *x*) $D_x(3 \text{ sen } x-2\cos x)$

y) $D_x\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)$ *z*) $D_x(x \csc x)$.

10. LA DERIVADA DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

En esta sección consideraremos un teorema que da una regla, llamada a veces "regla de la cadena", para encontrar la derivada de la composición de dos funciones. Muchas funciones que aparecen en el análisis y sus aplicaciones están o definidas por una composición de dos o más funciones o, aunque no estén definidas explícitamente en tal forma, pueden expresarse como una composición de funciones simples. Por ejemplo, si $F(x) = \text{sen }(x^2+2x+3)$, podemos reconocer que $F = f \circ g$, donde $f = \text{sen}$ y $g = I^2+2I+3$. Puede entonces aplicarse la regla de la cadena para calcular

la derivada de F, ya que esta regla da la derivada de F en términos de las derivadas de f y g y estas derivadas son ya conocidas.

Antes de considerar este teorema, haremos la siguiente observación. Si f es una función diferenciable en un punto x_0, entonces, para cualquier punto $x_0+h\in\mathfrak{D}_f$, podemos escribir $f(x_0+h)$ en la forma

10.1 $$f(x_0+h) = f(x_0)+hf'(x_0)+h_\varphi(h)$$

donde $\varphi(0)$ se define como 0 y φ es continua en 0. Fácilmente se deduce lo afirmado si observamos que para $h \neq 0$, 10.1 implica

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

y

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right] = f'(x_0)-f'(x_0) = 0.$$

Por tanto, φ es continua en 0 ya que $\varphi(0) = 0$.

10.2 Teorema. *Si g es diferenciable sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y f es diferenciable sobre un intervalo que contiene $g(\mathfrak{J}) = \{g(x) : x\in\mathfrak{J}\}$, entonces $f\circ g$ es diferenciable en $\mathfrak{J}$ y*

$$D[f\circ g] = [(Df)\circ g]Dg \quad en\ \mathfrak{J}.$$

PRUEBA. (Figura 18.) Suponemos que si una función g es continua en un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces el conjunto $g(\mathfrak{J}) = \{g(x)\,|\,x\in\mathfrak{J}\}$ es un intervalo. Es decir, la imagen de un intervalo bajo una función continua es un intervalo. Probaremos este resultado en el teorema 4.6 de la página 435. De nuevo, aquí podemos suponer que la función g tiene el intervalo $\mathfrak{J}$ como dominio y la función f el intervalo $g(\mathfrak{J})$. Sea x_0 un número cualquiera en $\mathfrak{J}$. Queremos demostrar que

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(g(x_0+k))-f(g(x_0))}{k} = f'(g(x_0))\,g'(x_0).$$

Sea $h(k) = g(x_0+k)-g(x_0)$. Como g es diferenciable en x_0, g es continua en x_0. De donde h es continua en 0 con $h(0) = 0$. Usando 10.1, tenemos

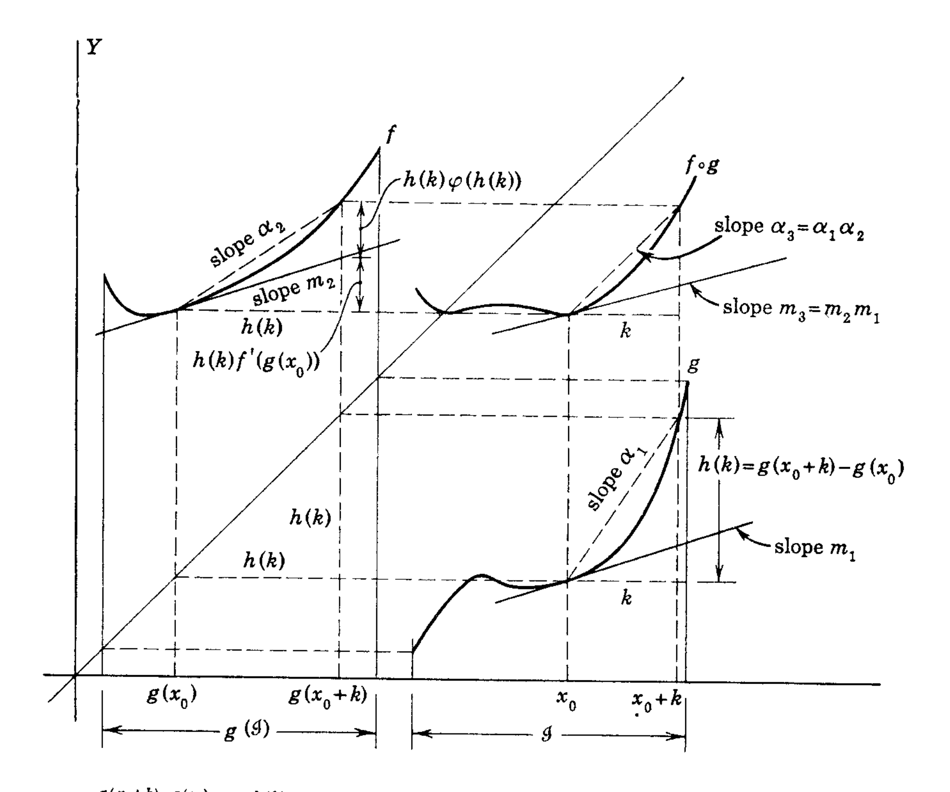
$$\begin{aligned} f(g(x_0+k)) &= f(g(x_0)+h(k)) \\ &= f(g(x_0))+h(k)\,[f'(g(x_0))+\varphi(h(k))], \end{aligned}$$

donde $\varphi(0)$ está definida como 0 y φ es continua en 0. Entonces

$$\frac{f(g(x_0+k))-f(g(x_0))}{k} = \frac{g(x_0+k)-g(x_0)}{k}[f'(g(x_0))+\varphi(h(k))],$$

y

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(g(x_0+k)) - f(g(x_0))}{k} = g'(x_0) f'(g(x_0))$$



$$\alpha_1 = \frac{g(x_0+k) - g(x_0)}{k} = \frac{h(k)}{k} \qquad m_1 = g'(x_0)$$

$$\alpha_2 = \frac{f(g(x_0+k)) - f(g(x_0))}{h(k)} = f'(g(x_0)) + \varphi(h(k)) \qquad m_2 = f'(g(x_0))$$

$$\alpha_3 = \frac{f(g(x_0+k)) - f(g(x_0))}{k} = \alpha_1 \alpha_2 \qquad m_3 = D[f \circ g](x_0) = m_2 m_1 = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

FIGURA 18

ya que, por el corolario 6.8 (pág. 368), $\lim_{k \to 0} \varphi(h(k)) = \varphi(h(0)) = 0$. Por tanto, $D(f \circ g)$ está definido en x_0 y

$$D[f \circ g] = [(Df) \circ g] Dg \text{ en } \mathfrak{J}.$$

Como una consecuencia inmediata de los teoremas 10.2 y 9.9 sobre funciones potenciales, tenemos el siguiente importante corolario.

10.3 Corolario. *Si g es diferenciable en un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces g^n, donde n es un entero, es diferenciable en $\mathfrak{J}$ y*

$$Dg^n = ng^{n-1}\, Dg \text{ en } \mathfrak{J}.$$

Nótese que para $n \leqslant 0$ debemos exigir que para todo $x \in \mathfrak{J}$, $g(x) \neq 0$.

PRUEBA. Tomemos $f = I^n$; entonces $f \circ g = I^n \circ g = g^n$ y

$$\begin{aligned} Dg^n &= D[I^n \circ g] = [(DI^n) \circ g]\, Dg \\ &= [nI^{n-1} \circ g]\, Dg = ng^{n-1}\, Dg. \end{aligned}$$

10.4 Ejemplo. Encontrar D_x sen (x^2+2x+3).

SOLUCIÓN. Podemos aplicar el teorema 10.2 con f como la función seno y g como la función polinomial I^2+2I+3. Como f y g son ambas diferenciables en R, $f \circ g$ es diferenciable en R. Tenemos entonces $Df = \cos$, $Dg = 2I+2$, y

$$D[\text{sen} \circ (I^2+2I+3)] = [\cos \circ (I^2+2I+3)]\,(2I+2)$$

o

$$D_x \text{ sen } (x^2+2x+3) = [\cos (x^2+2x+3)]\,(2x+2).$$

10.5 Ejemplo. Encuéntrese $D_x(\text{sen}^2 x+2 \text{ sen } x+3)$.

SOLUCIÓN. En este caso g es la función seno y f es la función polinomial I^2+2I+3. Como f y g son, ambas, diferenciables en R, $f \circ g$ es diferenciable en R. Entonces $Df = 2I+2$, $Dg = \cos$, y

$$D[(I^2+2I+3) \circ \text{sen}] = [(2I+2) \circ \text{sen}] \cos = [2 \text{ sen} + 2] \cos$$

o

$$D_x[\text{sen}^2 x+2 \text{ sen } x+3] = [2 \text{ sen } x+2] \cos x.$$

10.6 Ejemplo. Encontrar $D_x(x^2+2x+4)^5$.

SOLUCIÓN. Podríamos efectuar la operación indicada en $(x^2+2x+4)^5$ obteniendo así un polinomio de grado 10 y usar entonces el teorema 9.1 repetidamente. Sin embargo, usando el teorema 10.2 (o el corolario 10.3) con $f = I^5$ y $g = I^2+2I+4$, tenemos

$$D[I^5 \circ (I^2+2I+4)] = [5I^4 \circ (I^2+2I+4)]\,(2I+2) = 5(I^2+2I+4)^4\,(2I+2)$$

o

$$D_x(x^2+2x+4)^5 = 5(x^2+2x+4)^4\,(2x+2)$$

en R, ya que f, g, y por tanto $f \circ g$, son diferenciables en R.

Vamos ahora a presentar aquí juntas todas las fórmulas de derivación que hemos desarrollado en las últimas tres secciones. Estas fórmulas no

son válidas sin restricciones. Las restricciones sobre su validez pueden encontrarse en los teoremas correspondientes

9.1 $D[f+g] = Df+Dg$

9.3 $D[fg] = fDg+gDf$

9.4 $D[cg] = cDg$

10.3 $Dg^n = ng^{n-1}Dg$ (n, un entero cualquiera)

9.7 $D\left[\dfrac{f}{g}\right] = \dfrac{gDf-fDg}{g^2}$

10.2 $D[f\circ g] = [(Df)\circ g]Dg.$

Las siguientes son fórmulas de derivadas de algunas funciones particulares:

8.6 $Dc = 0$

8.8 $DI = 1$

9.9 $DI^n = nI^{n-1}$ (n, un entero cualquiera)

8.7 $D \text{ sen} = \cos$

$D\cos = -\text{sen}$ [Problema 1, p. 381]

9.8 $D\tan = \sec^2$

$D\cot = -\csc^2$ [Problema 2, p. 387]

$D\sec = \sec\tan$ [Problema 3, p. 387]

$D\csc = -\csc\cot$ [Problema 4, p. 387].

Problemas

1. Encuéntrese cada una de las siguientes derivadas:

a) $D_x \tan(x^2+2)$

b) $D_x \text{ sen } 5x$

c) $D_x \cot(\text{sen } x)$

d) $D_y \sqrt[3]{\tan y}$

e) $D_x \tan^3 x$

f) $D_z \sec^3 4z^2$

g) $D_y \sec^2 y$

h) $D_x[(\sec^2 x)(3+4x)^2]$

i) $D_\theta \cos(4\pi\theta)$

j) $D_x \tan \dfrac{2x}{x-1}$

k) $D_t \text{ sen } (\omega t+\delta)$

l) $D_y \left\{\dfrac{\text{sen } 2y}{1+\tan 2y}\right\}.$

2. Encuéntrese cada una de las siguientes derivadas:

a) $D_x(x^3+2)^4$ *b*) $D_x(3 \operatorname{sen} 2x - \cos 5x)$

c) $D_x \operatorname{sen}^3 x$ *d*) $D_y \operatorname{sen} 3y$

e) $D_x \operatorname{sen}^3 3x$ *f*) $D_x \tan^3 x$

g) $D_x \operatorname{sen}^{-3} x$ *h*) $D_z \sec \dfrac{z}{3}$

i) $D_x(2x+1)^{-2}$ *j*) $D_x \dfrac{4}{(10-x)^3}$

k) $D_t\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)$ *l*) $D_x \dfrac{\tan x}{x}$.

3. Encuéntrese cada una de las siguientes derivadas:

a) $D[I^{1/2} \circ \operatorname{sen}]$ *b*) $D[\operatorname{sen} \circ (4+2I)]$

c) $D[I^{1/3} \circ \tan \circ 3I]$ *d*) $D[I^3 \circ (\sec + \tan)]$

e) $D\left[I^2 \circ \left(\dfrac{I}{2+I}\right)\right]$ *f*) $D[\tan \circ \sec]$

g) $D[I^2 \circ (\csc + \cot)]$ *h*) $D[\tan \circ I^2 \circ \operatorname{sen}]$

i) $D\left[\tan \circ \left(\dfrac{I^2}{I+1}\right)\right]$ *j*) $D\left[I^2 \circ \left(\dfrac{1-\cos}{\operatorname{sen}}\right)\right]$

k) $D[\operatorname{sen} \circ (I^2+3I)]$ *l*) $D[\csc \circ I^{1/2} \circ (I^2+2)]$

m) $D\left[I^{1/2} \circ \left(\dfrac{1-\cos}{1+\cos}\right)\right]$ *n*) $D\left[\cos \circ I^{1/2} \circ \left(\dfrac{I}{2a}\right)\right]$

o) $D[\operatorname{sen} \circ \cos]$ *p*) $D[\tan \circ \cot]$.

4. Demuéstrese que: si h es diferenciable sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, g es diferenciable sobre un intervalo que contiene a $h(\mathfrak{J})$, y f es diferenciable sobre un intervalo que contiene a $(g \circ h)(\mathfrak{J})$, entonces

$$D[f \circ (g \circ h)] = [Df \circ (g \circ h)]\,[Dg \circ h]\,Dh \text{ en } \mathfrak{J}.$$

Nota. Son esta regla y su extensión las que sugieren el nombre de "regla de la cadena"; el operador D progresa a lo largo de la cadena.

11. LA DERIVADA SEGUNDA

De acuerdo con la definición 8.1, la derivada f' de una función f dada es otra función. La función f' puede tener una derivada, a la que denotamos por f'' o D^2f. La función f'' (léase "f doble prima") se llama *derivada segunda de f*. Análogamente, la derivada de f'' se llama la *derivada tercera de f* y se denota por f''' o D^3f, etc. Para derivadas de órdenes más altos, se usan notaciones como $f^{iv}, f^{v}, \ldots$, donde el orden se denota por un índice en números romanos (con letras minúsculas) o también como $f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots, f^{(n)}, \ldots$ donde el índice se encierra entre paréntesis. También se usan las notaciones $D^4f, D^5f, \ldots$ Por ejemplo, si $f(x) = x^2+2x+4$, entonces $f'(x) = 2x+2$ y $f''(x) = 2$.

En la sección 7 se señaló que la velocidad se definía por

$$v(t_0) = x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}.$$

Es decir, la velocidad es la derivada del desplazamiento. La aceleración se define como la derivada de la velocidad; es decir, la aceleración es la segunda derivada del desplazamiento

$$a = v' = x''.$$

En mecánica es una práctica casi general usar la notación de Newton para la derivada. En esta notación, un punto sobre la letra denota la primera derivada y dos puntos sobre la letra la segunda. En esta notación tenemos, por tanto,

$$a = \dot{v} = \ddot{x}$$

y

$$v = \dot{x}.$$

Problemas

1. Encuéntrense la primera y la segunda derivadas de cada una de las siguientes funciones

a) $f = 3I^4+2I^3-5I^2+2I+1$ *b*) $f = I^2-3I^{-1}$

c) $f = \dfrac{1}{1-I}$ *d*) $g = \cos^2$

e) $f = \frac{1}{16} \operatorname{sen} \circ (4I)$ *f*) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+3}$

g) $F(\theta) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta}$ *h*) $f(y) = \sec y$

i) $G(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ *j*) $H(x) = \cot x$

2. Pruébese que: si $D^n f$ y $D^n g$ existen sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces $D^n(f+g)$ existe en $\mathfrak{J}$ y que

$$D^n[f+g] = D^n f + D^n g \text{ en } \mathfrak{J}.$$

3. Pruébese que: si $D^n f$ y $D^n g$ existen sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces $D^n(fg)$ existe sobre $\mathfrak{J}$ y

$$D^n[fg] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} f D^k g \text{ en } \mathfrak{J}.$$

A esta fórmula se le llama *regla de Leibniz* para la n-enésima derivada del producto de dos funciones. Úsese la prueba del teorema del binomio como modelo.

4. Pruébese que

$$D^n I^m = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} I^{m-n} & (n \leqslant m) \\ 0 & (n > m). \end{cases}$$

5. Demuéstrese que:

a) D^{2n} sen $= (-1)^n$ sen *b*) D^{2n} cos $= (-1)^n$ cos.

6. Úsense las fórmulas de los problemas 2 a 5 para encontrar:

a) $D^5(I^2$ sen) *b*) $D^7(I^5 +$ sen)

c) $D^{25}(I^4 +$ cos) *d*) $D^{28}(I^3$ cos).

12. DIFERENCIALES

Recuérdese (10.1) que si una función f es diferenciable en un punto x y $x+h \in \mathfrak{D}_f$, entonces

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varphi(x; h)$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \varphi(x; h) = 0.$$

Escribimos ahora $\varphi(x; h)$ en lugar de $\varphi(h)$ para exhibir la dependencia de φ de x. La expresión

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + h\varphi(x; h)$$

se llama *incremento* de f correspondiente al incremento h en x. El incremento en f se denota por $\Delta f(x; h)$; sin embargo, en las aplicaciones se encuentra

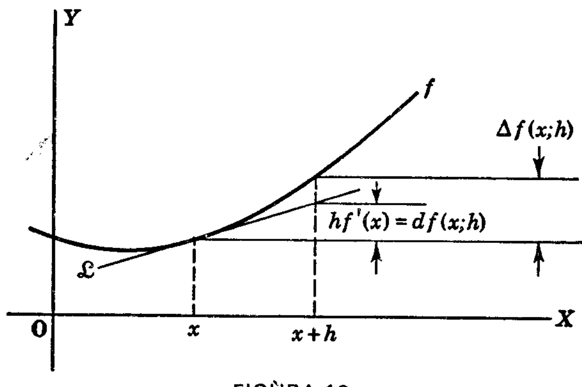


FIGURA 19

a menudo simplemente Δf o $\Delta f(x)$. Tenemos

$$\Delta f(x;h) = hf'(x)+h\varphi(x;h).$$

Cuando $\varphi(x;h)$ es suficientemente pequeño podemos usar la expresión $hf'(x)$ como una aproximación a $\Delta f(x;h)$. Tenemos entonces

$$f(x+h) = f(x)+\Delta f(x;h) \approx f(x)+hf'(x).$$

Es decir, podemos usar la recta tangente (figura 19)

$$\mathcal{L} = \{(x+h, f(x)+hf'(x)) \mid h \in \mathrm{R}\}$$

como una aproximación a la gráfica de f cerca del punto $(x, f(x))$.

La expresión $hf'(x)$ se llama *diferencial* de f y se denota por $df(x;h)$. La diferencial de f es una función de dos variables. Esta función se denota por df y *no* ha de pensarse en ella como si significara f multiplicada por d. Aunque df es una función con dominio en R^2, en las aplicaciones es frecuente que se usen df o $df(x)$ para denotar los valores de la función.

12.1 Ejemplo. Calcúlese un valor aproximado para $\sqrt{145}$ usando la diferencial como una aproximación al incremento de la función.

SOLUCIÓN. Tenemos

$$f(x) = x^{1/2}$$

y

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}.$$

Tomando $x = 144$ y $h = 1$, obtenemos

$$\sqrt{145} = f(144+1) \approx f(144)+df(144;\,1)$$
$$= f(144)+1\cdot f'(144)$$
$$= \sqrt{144} + \frac{1}{2\sqrt{144}} = 12.0417\,.$$

Por cálculo directo, usando el bien conocido algoritmo para encontrar la raíz cuadrada, lo que hallamos es

$$\sqrt{145} = 12{,}0416\,.$$

El valor obtenido por la aproximación es demasiado grande, como podía esperarse, ya que la tangente se encuentra sobre la curva $y = x^{1/2}$.

12.2 Ejemplo. Encuéntrese un valor aproximado de sen 31°.

SOLUCIÓN. sen 31° = sen (30°+1°) = sen $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right)$. Aquí f es la función seno, $x = \pi/6$ y $h = \pi/180$. De donde

$$df(x;\,h) = hf'(x) = h\cos x$$

y

$$f(x+h) \approx f(x)+df(x;\,h)$$

se hace

$$\operatorname{sen} 31^\circ \approx \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{\pi\times\sqrt{3}}{180\times 2}$$
$$= 0.5+0.01512 = 0.51512\,.$$

En una tabla de cinco cifras de la función seno, encontramos: sen 31° = 0.51504.

De nuevo, el valor obtenido es demasiado grande, ya que cerca de $x = \pi/6$ la tangente a la curva seno se encuentra sobre la curva.

Es habitual encontrar representada a la cantidad h por dx y que se llame *diferencial de x*. Con esta notación

$$df(x;\,h) = df(x;\,dx) = f'(x)dx\,.$$

No hay nada en la definición de dx (o h) que implique que dx es una pequeña cantidad —es un número real cualquiera. En las aplicaciones, los físicos o los ingenieros se encuentran a menudo interesados solamente en el caso en que dx es pequeña. Esto induce a veces al estudiante a pensar que *dx debe* ser pequeña, lo que no es el caso.

 Diferenciales

12.3 Ejemplo. Un tubo de hierro de 10 pies de largo tiene un diámetro exterior de 4 pulgadas y un grueso de pared de $\frac{1}{4}$ de pulgada. Úsese una diferencial para encontrar el peso aproximado del tubo si el hierro pesa 450 libras por pie cúbico.

SOLUCIÓN. El tubo es un cilindro hueco de 10 pies de longitud, 4 pulgadas de diámetro exterior, y un diámetro interior de $4-2(\frac{1}{4}) = \frac{7}{2}$ pulgadas. Expresando las dimensiones en pies, tenemos

longitud: $\quad 1 = 10$ pies

radio (exterior): $\quad r = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ pies

grueso: $\quad dr = \dfrac{-1}{4\times 12} = -\dfrac{1}{48}$ pies.

Ahora bien, el volumen de un cilindro de longitud 10 pies y radio r es $V(r) = 10\pi r^2$. De donde

$$dV(r; dr) = V'(r)dr = 20\pi r dr$$

y

$$dV\left(\frac{1}{6}; \frac{-1}{48}\right) = 20\pi\frac{1}{6}\cdot\frac{-1}{48} = -\frac{10\pi}{144} = -0.218 \text{ pies}^3.$$

Éste es el cambio aproximado en volumen de un cilindro de longitud 10 pies si reducimos el radio de 2 pulgadas a $\frac{7}{4}$ de pulgada. De aquí que el volumen del hierro es aproximadamente de $10\pi/144$ pies^3 y el peso del tubo es aproximadamente:

$$\text{Peso} \approx \frac{10\pi}{144}\cdot 450 = 98.2 \text{ libras.}$$

Usando incrementos encontramos que el peso es de 92.04 libras. Si tomamos el radio interior como r y usamos la diferencial como aproximación, encontramos que el peso es aproximadamente de 85.9 libras. Así pues, si aproximanos el peso usando la diferencial tenemos un error en exceso de 6 libras, es decir, un exceso de 6.5%.

Hemos dicho que cuando h (o dx) es suficientemente pequeño, la diferencial es una buena aproximación al incremento de una función. En los anteriores ejemplos fuimos capaces de verificar la precisión por cálculo directo o consultando una tabla de la función. En los ejemplos 12.1 y 12.2 la aproximación era buena, pero en el ejemplo 12.3 no lo era. Si en el ejemplo 12.1 hubiéramos intentado aproximar $\sqrt{20}$ usando una diferencial, hubiéramos tenido un error de aproximadamente un 33% en el incremento y de alrededor del 5% en el valor calculado. Vemos, pues, que mientras

que si es cierto que tenemos un método de aproximación, no tenemos, en cambio, ninguna forma de determinar la precisión de la aproximación. En el capítulo 14 diremos cómo establecer una cota superior para el error de nuestra aproximación y al mismo tiempo aprenderemos a mejorar la precisión de ésta.

Usando la notación dx para h, si $dx \neq 0$, podemos escribir

12.4 $$\frac{df(x; dx)}{dx} = f'(x).$$

La ecuación 12.4 sugiere una notación frecuentemente usada para la función derivada: $\dfrac{df}{dx}$. La notación correspondiente para los valores de la función derivada es

$$\frac{df}{dx}(x) \quad \text{o} \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

La derivada segunda se denota por

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) \quad \text{o} \quad \frac{d^2f}{dx^2}.$$

Análogamente, las derivadas más altas se denotan por

$$\frac{d^3f}{dx^3}, \ \frac{d^4f}{dx^4}, \ldots, \frac{d^nf}{dx^n}, \ldots$$

La regla para la derivada de la composición de funciones afirma (bajo las condiciones del teorema 10.2, pág. 389) que

$$D[f \circ g] = (f' \circ g)g'.$$

Por tanto

$$d[f \circ g](x; dx) = f'(g(x))g'(x)dx;$$

es decir

12.5 $$d[f \circ g](x; dx) = f'(g(x))dg(x; dx) = df(g(x); dg(x; dx)).$$

Este resultado puede expresarse en la forma

$$d[f \circ g] = (f' \circ g)dg.$$

Problemas

1. Encuéntrese $df(x; dx)$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen}\, 2x$ *b*) $f(x) = \sqrt{x}(x+1)$

c) $f(x) = \dfrac{3x^2}{6x-1}$ *d*) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

e) $f(x) = x \cos^2 x$ *f*) $f(x) = 2 \tan (x/2)$

g) $f(x) = x \operatorname{sen} \pi x$ *h*) $f(x) = (x+2)^5$.

2. Encuéntrese $\dfrac{df}{dx}(x)$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 - \tan^2 x}$ *b*) $f(x) = \dfrac{\csc x + \cot x}{\csc x - \cot x}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ *d*) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+27}$

e) $f(x) = 2 \cos 3x$ *f*) $f(x) = 6 \sec (x/2)$

g) $f(x) = \dfrac{4}{2x-3}$ *h*) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$.

3. Usando diferenciales, calcúlese un valor aproximado de cada uno de los siguientes y compárese con el valor obtenido por cálculo directo o de una tabla:

a) $\sqrt{170}$ *b*) $\sqrt{168}$

c) $\sqrt[3]{123}$ *d*) $\sqrt[4]{78}$

e) sen 27° *f*) cos 47°

g) tan 48° *h*) sen 62°.

4. La medida del diámetro de un círculo es 2.54 cm. Sabemos que esta medida tiene una aproximación de 0.025 cm. Proporciónese un valor aproximado del máximo error en el valor calculado del area del círculo.

5. El lado de un campo cuadrado mide 317 metros. Sabemos que esta medida tiene un margen de error de 0.030 metro. Proporciónese un valor aproximado del máximo error en el valor calculado del area del campo.

6. Una esfera de hierro hueca tiene un diámetro exterior de 61 cm y una pared de 6.35 mm de espesor. Encuéntrese el peso aproximado si el peso del hierro es de 2196 kilogramos por metro cuadrado. Si el peso del agua es de 305.15 kilogramos por metro cuadrado, ¿flotará la esfera o se hundirá?

7. El calibre (diámetro) de un cilindro en una máquina de combustión interna es de 8.890 centímetros y su carrera de 12.700 centímetros. Si el

cilindro se recalibra hasta un diámetro de 8.915 centímetros, ¿cuál es aproximadamente el aumento en el volumen del cilindro?

8. La razón de compresión, r, es la razón entre el volumen del cilindro y la cámara con el pistón al fondo de su carrera, V_0, al volumen con el pistón en lo más alto de su carrera, V_c: $r = \frac{V_0}{V_c}$. En el cilindro del problema 7, sea $V_c = 46.88 \text{ cm}^3$ (pulgadas cúbicas); entonces $V_0 = 271.25 \text{ cm}^3$. La razón de compresión antes de volver a calibrarla es

$$r = \frac{V_0}{V_c} = \frac{271.25}{46.88} = 5.786.$$

Encuéntrese la razón de compresión aproximada después de recalibrar el cilindro.

13. RAZÓN DE CAMBIO

Sean $x(t)$ y $y(t)$ valores en el tiempo t de un par de magnitudes físicas x y y. Las magnitudes físicas son funciones y se dice a veces que son "funciones de tiempo" o "variables". Las magnitudes físicas x y y puede ser que estén relacionadas por alguna ley o restricción geométrica o física

13.1 $$y = f \circ x;$$

es decir,

$$y(t) = f(x(t)).$$

Por ejemplo, $x(t)$ puede ser la longitud de un lado de un cuadrado en el instante t, y $y(t)$ puede ser el área del cuadrado, en cuyo caso $y = I^2 \circ x = x^2$. En su relación con x (ecuación 13.1), y se llama variable "dependiente" y x variable "independiente". Dado un valor de x, el correspondiente valor de y está determinado por la relación funcional 13.1.

Sean $x_0 = x(t_0)$ y $y_0 = y(t_0)$; x_0 y y_0 son valores de las magnitudes físicas en algún instante t_0. Supongamos que x_0 cambia en la cantidad Δx. El cambio correspondiente Δy en y_0 es

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

y la razón promedio de cambio de y con respecto a x es

13.2 $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0).$$

El límite de esta razón promedio de cambio de y con respecto a x cuando $\Delta x \to 0$ es $f'(x_0)$. El valor $f'(x_0)$ de la derivada f' se llama *razón de cambio*

(instantánea) *de* y *con respecto a* x *en* x_0. La derivada f' se llama *razón de cambio de* y *con respecto a* x. La razón de cambio de y con respecto a x se denota a menudo por $D_x y$; es decir,

$$D_x y = D_x f \circ x = f' \circ x.$$

El valor de la razón de cambio de y con respecto a x en x_0 se denota por $(D_x y)_{x=x_0}$; es decir,

$$[D_x y]_{x=x_0} = [D_x f \circ x]_{x=x_0} = f'(x_0).$$

Las derivadas $\dot{x}$ y $\dot{y}$ se llaman razones de cambio de las magnitudes físicas x y y con respecto al tiempo. Así pues, las notaciones $D_t x = \dot{x}$ y $D_t y = y$ se usan a menudo para denotar estas razones de cambio. Si x y y están relacionadas por 13.1, entonces la regla para la diferenciación de una composición de funciones da

13.3 $$\dot{y} = (f' \circ x)\dot{x}$$

o

$$\dot{y}(t) = f'(x(t))\,\dot{x}(t).$$

Reescribiendo 13.3 en términos de la notación para una razón de cambio, obtenemos

$$D_t y = D_x y D_t x.$$

Así pues, la regla para la derivada de la composición de funciones nos dice que "*la razón de cambio de* y *con respecto a* t *es igual a la razón de cambio de* y *con respecto a* x *por la razón de cambio de* x *con respecto a* t".

Examinemos un poco más la relación entre razones de cambio. La ecuación 13.2 nos dice que la razón promedio de cambio de y con respecto a x es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Si Δx corresponde a un cambio Δt en t_0, entonces $\Delta x = x(t_0+\Delta t)-x(t_0)$, y si $\Delta x \neq 0$, entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\,\frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}.$$

Esto nos dice que la razón promedio de cambio de y con respecto a t es igual a la razón promedio de cambio de y con respecto a x por la razón promedio de cambio de x con respecto a t. La regla para la derivada de la composición de funciones afirma, como hemos visto, que lo mismo es cierto para las razones instantáneas de cambio. Tenemos, pues,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

13.4 Ejemplo. En un cierto instante t_0, la longitud de un lado de un cuadrado es de 20.32 cm y cada lado del cuadrado está aumentando en longitud a razón de 0.508 cm/min. ¿Cuál es la razón de cambio del área del cuadrado con respecto al tiempo y con respecto a la longitud de un lado en el instante t_0?

SOLUCIÓN. Sean

$x(t)$ = longitud (en centímetros) de un lado en el tiempo t (en minutos)
$A(t)$ = área (en centímetros cuadrados) del cuadrado en el tiempo t (en minutos).

Sabemos que

$$x(t_0) = 20.32 \text{ cm}$$
$$\dot{x}(t_0) = 0.508 \text{ cm/min}.$$

La relación entre A y x es

$$A(t) = x^2(t).$$

Por tanto

$$A(t) = x^2(t)$$

y

$$D_t A(t) = 2x(t)\,\dot{x}(t).$$

De donde la razón de cambio del área con respecto al tiempo en t_0 es

$$\dot{A}(t_0) = 2x(t_0)\,\dot{x}(t_0) = 2(20.32)\,(0.508) = 20.65 \text{ cm}^2/\text{min}$$

y la razón de cambio del área con respecto a la longitud del lado en el tiempo t_0 es

$$[D_x A]_{x=8} = 2(20.32) = 40.64 \text{ cm}^2/\text{cm}.$$

13.5 Ejemplo. Determínese la razón de cambio de la energía cinética de una partícula con respecto a su velocidad. Demuéstrese que la razón de cambio de la energía cinética con respecto al tiempo es la fuerza actuante sobre la partícula multiplicada por la velocidad.

SOLUCIÓN. Sean

m = masa de la partícula,
$v(t)$ = velocidad de la partícula en el tiempo t,
$T(t)$ = energía cinética de la partícula en el tiempo t.

La energía cinética de una partícula con masa m y velocidad v es

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Por tanto

$$D_v T = D_v(\tfrac{1}{2}mv^2) = mv$$

y

$$D_t T = \dot{T} = mv\dot{v} = mva,$$

donde $a(t) = \dot{v}(t)$ es la aceleración de la partícula en el tiempo t. La segunda ley de Newton sobre el movimiento afirma que

$$F = ma,$$

donde $F(t)$ es la fuerza actuante sobre la partícula en el tiempo t. De donde

$$D_t T = \dot{T} = Fv.$$

Vemos, por estos ejemplos y esta discusión sobre terminología, que las razones de cambio son derivadas y que las reglas generales para la diferenciación nos permiten obtener relaciones entre razones de cambio. En la aplicación a problemas físicos específicos las funciones (las variables) que en ellos aparecen deben identificarse y uno debe conocer las leyes científicas que expresan las relaciones entre estas funciones.

Problemas

1. Si l_0 es la longitud de un alambre de cobre a 0° centígrados, la longitud, $l(T)$, a T grados centígrados es aproximadamente

$$l(T) = l_0(1 + aT + bT^2),$$

donde $a = 0.16 \times 10^{-4}$ y $b = 0.10 \times 10^{-7}$. Encuéntrese la razón de cambio de la longitud del alambre con respecto a la temperatura cuando $T = 22\,°C$ y $l_0 = 100$ cm.

2. Usando los datos del problema 1, encontrar la razón de cambio de la longitud del alambre con respecto al tiempo cuando $T = 100\,°C$ y la temperatura está cambiando a razón de 3 °C por segundo.

3. Una plancha circular está siendo calentada y su diámetro está expandiéndose a razón de 0.02×10^{-2} cm/seg. Encuéntrese la razón de cambio respecto al tiempo del área cuando el diámetro es de 3 centímetros.

4. Un barco navega hacia el norte a razón de 10 nudos y otro hacia el este a razón de 20 nudos. A las 10:30 el segundo barco cruza la trayectoria del primero en el punto en el que el primero había estado a las 10:00. Encuéntrese cómo está cambiando la distancia entre los barcos a las 09:30 y a las 11:00.

5. Un depósito con la forma de un cono invertido, tiene una altura de 10 metros y una base de 10 metros de diámetro. Si el depósito está llenándose a razón de 2 m^3/seg, ¿a qué velocidad se está elevando el nivel del agua cuando el nivel se encuentra a 3 metros de la parte superior del depósito?

6. Si el diámetro de una esfera de metal se expande con el calor a razón de 0.01 centímetro/seg. encuéntrese la razón a la que aumenta el volumen de la esfera cuando el diámetro es de 5 centímetros.

7. Un voltaje constante de 12 voltios es lo que se suministra a un circuito. Si a medida que el circuito se calienta aumenta su resistencia a razón de 0.1 ohm/seg., encuéntrese la razón de cambio de la corriente cuando la resistencia es de 4 ohms. Úsese la Ley de Ohm $E = RI$.

8. En el extremo de una cuerda de 12.60 metros que pasa por una polea situada a 6.90 metros sobre el suelo se coloca una pesa. Si un hombre sostiene el otro extremo de la cuerda a 1.50 metros del suelo y se aparta a razón de 1.20 metros/seg., ¿a qué velocidad se está elevando la pesa cuando el hombre está a 2.10 metros del punto directamente debajo de la polea?

9. Un avión pasa sobre un faro a las 10:30 volando hacia el oeste a 482.70 km/hr y otro avión pasa sobre el faro a las 10:40 volando hacia el sur a 563.15 km/hr. Encuéntrese a qué velocidad se están separando los aviones a las 10:00, en la hipótesis de que ambos aviones vuelan a la misma altura.

10. Dos aviones que vuelan a la misma altura se dirigen hacia un faro. Uno vuela hacia el norte a una velocidad constante de 515 km/hr y el otro vuela en dirección norte 60° Este a 579.36 km/hr. En cierto momento, el primero está a 112.75 kilómetros del faro y el segundo a 80.47 kilómetros del faro. Encuéntrese la razón a la que los aviones se acercan en tal instante y también 5 minutos más tarde.

11. Un tanque de agua cónico con el vértice hacia abajo, tiene una altura de 5 metros y un radio de 1.50 metros. Si la altura del agua en el tanque está disminuyendo a razón de 30 cm/hr, encuéntrese la razón a la que el volumen de agua decrece cuando la altura es de 2.40 metros.

12. El coeficiente lineal de expansión térmica es el aumento en longitud por unidad de longitud (medida a 0°C) por grado centígrado. Para muchos sólidos este coeficiente es del orden de magnitud de 10^{-5}. El coeficiente cúbico de expansión es el aumento en volumen por unidad de volumen (medido a 0°C) por grado centígrado. El coeficiente cúbico, de acuerdo con las medidas experimentales, se encuentra que es aproximadamente 3 veces el coeficiente lineal. Explíquese por qué podía esperarse esto.

14. ECUACIONES DIFERENCIALES

En las secciones precedentes hemos considerado el problema de encontrar la derivada de una función dada. En muchos casos nos encontramos con

el siguiente problema: se sabe que alguna de las derivadas de una función y quizá la función misma, satisfacen una ecuación dada. Tal ecuación se llama ecuación de derivadas o más frecuentemente, ecuación diferencial. En algunos casos, los valores de la función y/o algunas de sus derivadas pueden ser conocidos en algunos puntos. ¿Qué función o funciones satisfacen estas condiciones? Los valores prescritos para la función se llaman a menudo condiciones de frontera o iniciales. En esta sección consideramos un tipo particularmente simple de ecuación diferencial.

Si se da la derivada de una función, ¿podemos encontrar la función o funciones que tiene la derivada dada? Por ejemplo, ¿podemos encontrar todas las funciones f tales que $f' = 2I$? Sabemos que $DI^2 = 2I$; en realidad, si añadimos una función constante c cualquiera a I^2, entonces $D(I^2+c) = 2I$. Así pues, cualquier función de la forma $f = I^2+c$ es una solución de la ecuación diferencial $f' = 2I$.

La pregunta, desde luego, queda en pie: ¿Hay algunas funciones distintas de las de la forma $f = I^2+c$ para las que $f' = 2I$? A esta pregunta se le contesta con la negativa, usando el siguiente hecho (véase el corolario 4.2 del capítulo 10, pág. 458): si $f_1' = f_2'$ en un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces $f_1 = f_2+c$ en $\mathfrak{J}$ para alguna función constante c. Otra forma de enunciar este hecho es: si $D(f_1-f_2) = 0$ en $\mathfrak{J}$, entonces $f_1-f_2 = c$ en $\mathfrak{J}$. Es decir, las funciones constantes son las únicas funciones con derivada cero sobre un intervalo.

Antes de poner ejemplos en los que este resultado se aplique, hacemos la observación de que, por nuestras anteriores fórmulas para derivadas, ya conocemos las soluciones de la siguientes ecuaciones diferenciales:

Si $f' = aI^n$, entonces $f = \frac{a}{n+1} I^{n+1}+c$, $(n \neq -1)$.
Si $f' = \cos$, entonces $f = \operatorname{sen} + c$.
Si $f' = \operatorname{sen}$, entonces $f = \cos + c$.
Si $f' = \operatorname{sen}^n \cos$, entonces $f = \frac{1}{n+1} \operatorname{sen}^{n+1}+c$, $(n \neq -1)$.
Si $f' = \cos^n \operatorname{sen}$, entonces $f = \frac{-1}{n+1} \cos^{n+1}+c$, $(n \neq -1)$.

14.1 Ejemplo. Encuéntrese $f(x)$ si $f'(x) = x$ y $f(2) = 5$.

SOLUCIÓN. Como $f'(x) = x$, tenemos $f(x) = \frac{1}{2}x^2+c$ para algún número c adecuado. Ahora bien, $f(2) = \frac{1}{2}2^2+c = 2+c = 5$, de modo que $c = 3$ y

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2+3.$$

Que esta función satisface las condiciones pedidas puede y debe ser comprobado. Nótese también que sabemos que ésta es la única función que satisface la ecuación diferencial dada y la condición inicial.

14.2 Ejemplo. Encuéntrese $f(x)$ si $f'(x) = \operatorname{sen}^4 2x \cos 2x$ y $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$.

SOLUCIÓN. Tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 2x + c \\ &= \tfrac{1}{10}\operatorname{sen}^5 2x + c. \end{aligned}$$

Ahora bien, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{1}{10}\operatorname{sen}^5 \pi + c = c = 3$, de modo que $c = 3$ y

$$f(x) = \tfrac{1}{10}\operatorname{sen}^5 2x + 3.$$

14.3 Ejemplo. Fue descubierto por Galileo que cerca de la superficie de la tierra un cuerpo que caía libremente (es decir, en el que no actuaban más fuerzas que las de la gravedad) tenía una aceleración constante si no se tenía en cuenta la resistencia del aire. En o cerca de la superficie de la tierra, esta aceleración debida a la gravedad, es aproximadamente de 9.754 m/seg^2.

Se dispara una bala verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 73.15 m/seg desde lo alto de una torre de un puente que está 182.88 metros sobre el agua. *a*) ¿Hasta qué altura llega aproximadamente la bala? *b*) ¿Cuánto tarda la bala aproximadamente en llegar al agua?

SOLUCIÓN. Escojamos un eje de coordenadas vertical con origen en el nivel del agua y midamos el tiempo en segundos desde el instante en que se dispara la bala. En el momento inicial, $t = 0$, el desplazamiento inicial es $y(0) = 182.88$ metros y la velocidad inicial es $v(0) = \dot{y}(0) = 73.15$ m/seg. Ahora bien, la aceleración es la derivada de la velocidad, de modo que

$$\dot{v}(t) = -g$$

y

$$v(t) = -gt + c_1.$$

Como la velocidad es la derivada del desplazamiento,

$$\dot{y}(t) = v(t) = -gt + c_1$$

y

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2.$$

Las condiciones iniciales determinan c_1 y c_2. Para $t = 0$ tenemos

$$v(0) = c_1 = 73.15 \text{ m/seg}$$

y

$$y(0) = c_2 = 182.88 \text{ m}.$$

La constante g es aproximadamente de 9.754 m/seg^2 y, por tanto, la

aceleración, velocidad y desplazamiento de la partícula son, aproximadamente

$$a(t) = -9.754 \text{ m/seg}^2$$
$$v(t) = -9.754t+73.15 \text{ m/seg} \quad (t > 0)$$
$$y(t) = -4.877t^2+73.15t+182.88 \text{ m} \quad (t > 0).$$

a) Ahora bien, a la máxima altura la velocidad es cero, de modo que

$$v(t) = -9.754t+73.15 = 0$$

implica $t = \frac{15}{2}$ segundos, y la máxima altura es

$$y\left(\frac{15}{2}\right) = -\frac{4.877 \cdot 15^2}{4} + 73.15 \cdot \frac{15}{2} + 182.88 = 457.17 \text{ m}.$$

b) Cuando la bala alcanza el agua, $y(t) = 0$ o sea,

$$-4.877t^2+73.15t+182.88 = 0.$$

La raíz positiva, $t = 17.2$ segundos de esta ecuación es, por tanto, la solución deseada.

Problemas

1. Encuéntrese f dado que

a) $f' = I^2$, $f(2) = 3$

b) $f' = \text{sen} \circ (3I)$, $f(\pi) = 0$

c) $f' = \cos^3 \text{sen}$, $f(\pi) = 7/2$

d) $f' = I+\cos$, $f(0) = -2$

e) $f' = [\text{sen}^2 \circ (5I)] \cos \circ (5I)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -10.$

2. Si a es la aceleración, v la velocidad y x la coordenada de una partícula sobre una recta coordenada, encuéntrese $x(t)$ si:

a) $a(t) = 3$, $v(2) = 6$, $x(2) = 4$

b) $a(t) = 6t$, $v(0) = 4$, $x(0) = 0$

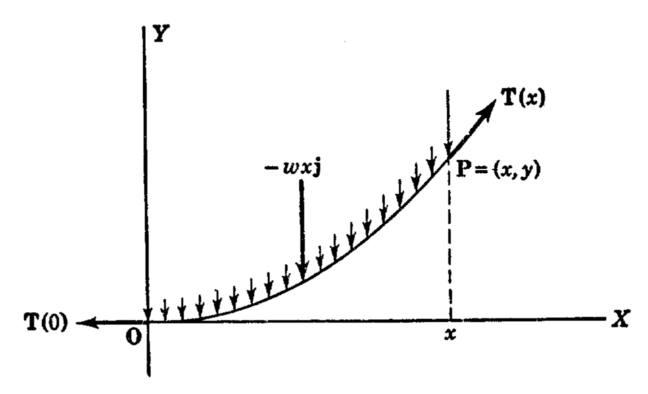
c) $a(t) = -6t$, $v(1) = 1$, $x(1) = 0$

d) $a(t) = -32.2$, $v(0) = 0$, $x(0) = 1610$

e) $a(t) = \cos 3t$, $v(0) = 0$, $x(\pi/9) = 6$

f) $a(t) = 3 \cos \frac{1}{3}t$, $v(0) = 0$, $x(\pi) = 1.$

3. Un cable soporta un peso de w libras por pie, medido a lo largo de la horizontal. Si el origen se toma en el punto mas bajo del cable, entonces las fuerzas que actúan sobre una sección del cable son las que se muestran



en el diagrama adjunto. Sumando fuerzas, para el equilibrio, tenemos

$$\mathbf{T}(0)+\mathbf{T}(x)-wx\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{T}(x)$ es la tensión en $\mathbf{P} = (x, y)$. Si $\mathbf{T} = (H, V)$, las ecuaciones correspondientes de las componentes son

$$H(x) = -H(0) = H$$

y

$$V(x) = wx.$$

La dirección de $\mathbf{T}(x)$ es la de la tangente a la curva en $\mathbf{P}$:

$$y'(x) = \frac{V(x)}{H(x)} = \frac{wx}{H}.$$

Demuéstrese que la forma de la curva en que el cable cuelga es una parábola.

4. La razón de cambio con respecto al tiempo del volumen de una bola de naftalina es proporcional al área de su superficie. Se ha observado que una bola de naftalina de 0.75 cm de radio tiene un radio de 0.375 cm al cabo de 6 meses. Determínese el radio como una función del tiempo [es decir, determínese la función r tal que $r(t)$ es el radio de la bola de naftalina en el instante t].

15. LÍMITES INFINITOS

En esta sección extenderemos nuestra noción de límite. En los límites que hemos considerado hasta ahora, tanto el límite L como el punto x_0 en que el número está determinado son números reales. Queremos ahora considerar dos extensiones del concepto de límite. Puede suceder que cuando x se aproxima a x_0, los valores de una función f vayan creciendo

indefinidamente. En este caso, diremos que el límite de f en x_0 es ∞. De manera análoga, los valores de f pueden decrecer sin límite cuando x se aproxima a x_0. En este caso diremos que el límite de f en x_0 es $-\infty$. La segunda clase de extensión se presenta cuando queremos considerar el comportamiento de los valores $f(x)$ de una función f cuando x crece indefinidamente.

15.1 Definición. *Una función f se dice que tiene el **límite infinito**, ∞, **en** x_0 si x_0 es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_f$ y para cada número $M > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) > M$$

siempre que $x \in \mathfrak{D}_f$ y

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Las notaciones

$$\lim_{x_0} f = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se usan para denotar que el límite de f en x_0 es infinito. Así pues, si el límite de f en x_0 es ∞, f no tiene un límite en x_0, pero falla en tener un límite de un modo muy especial. Debe notarse que ∞ no es un número real. Es simplemente un símbolo usado para denotar que $f(x)$ excede cualquier número dado para x suficientemente próximo a x_0.

15.2 Ejemplo. Demuéstrese que $\lim\limits_{0} I^{-2} = \infty$.

SOLUCIÓN. Tomemos $M > 0$. Entonces $1/x^2 > M$ siempre que $0 < x^2 < 1/M$ o, lo que es lo mismo, siempre que $0 < x < 1/\sqrt{M}$. De donde si $\delta = 1/\sqrt{M}$, entonces $1/x^2 > M$ siempre que $0 < |x| < \delta$ y $\lim\limits_{x \to 0} 1/x^2 = \infty$.

Una definición análoga se da a continuación para el caso en que el límite de f en x_0 sea $-\infty$.

15.3 Definición. *Se dice que una función f tiene el **límite** $-\infty$ **en** x_0 si x_0 es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_f$ y para cada número $M > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) < -M$$

siempre que $x \in \mathfrak{D}_f$ y

$$0 < |x - x_0| < \delta.$$

Las notaciones

$$\lim_{x_0} f = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se usan para denotar que el límite de f en x_0 es $-\infty$. De nuevo, aquí f falla en tener un límite en x_0, pero de un modo muy especial.

15.4 Ejemplo. Demuéstrese que $\lim\limits_{2} \dfrac{I-4}{(I-2)^2} = -\infty$.

SOLUCIÓN. Tomemos $M > 0$. Si $|x-2| < 1$, entonces $-3 < x-4 < -1$ y

$$\frac{x-4}{(x-2)^2} < \frac{-1}{(x-2)^2}.$$

Ahora bien, si $|x-2| < 1/\sqrt{M}$, entonces

$$-\frac{1}{(x-2)^2} < -M.$$

De donde si $\delta = \text{mín}\,\{1, 1/\sqrt{M}\}$ se verifican ambas de las anteriores desigualdades y

$$\frac{x-4}{(x-2)^2} < \frac{-1}{(x-2)^2} < -M$$

siempre que $0 < |x-2| < \delta$. Es decir, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-4}{(x-2)^2} = -\infty$.

15.5 Ejemplo. ¿Tiene $\dfrac{1}{I^2-4}$ un límite finito o un límite infinito en 2?

SOLUCIÓN. (Figura 20.) Para x próximo a 2, pero mayor que 2, $\dfrac{1}{x^2-4}$ es un número positivo grande, mientras que para x próximo a 2, pero menor que 2, $\dfrac{1}{x^2-4}$ es negativo y tiene un gran valor absoluto. Es, pues, de esperar que $\lim \dfrac{1}{I^2-4}$ no exista ni como límite infinito.

Probamos ahora que tal es el caso, es decir, que 1) $\lim\limits_{2^+} \dfrac{1}{I^2-4} = \infty$ y 2) $\lim\limits_{2^-} \dfrac{1}{I^2-4} = -\infty$.

1) Tomemos $M > 0$. Si $0 < x-2 < 1$, entonces $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{4}$ y

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)} > \frac{1}{5(x-2)}.$$

Ahora bien, si $0 < x-2 < \frac{1}{5M}$, entonces

$$\frac{1}{5(x-2)} > M.$$

De donde, si $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{5M}\right\}$ las dos desigualdades anteriores se verifican y

$$\frac{1}{x^2-4} > \frac{1}{5(x-2)} > M$$

siempre que $0 < x-2 < \delta$. Es decir, $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = \infty$.

2) Tomemos $M > 0$. Si $-1 < x-2 < 0$, entonces $\frac{1}{4} < \frac{1}{x+2} < \frac{1}{3}$ y

$$\frac{1}{x^2-4} < \frac{1}{4(x-2)}.$$

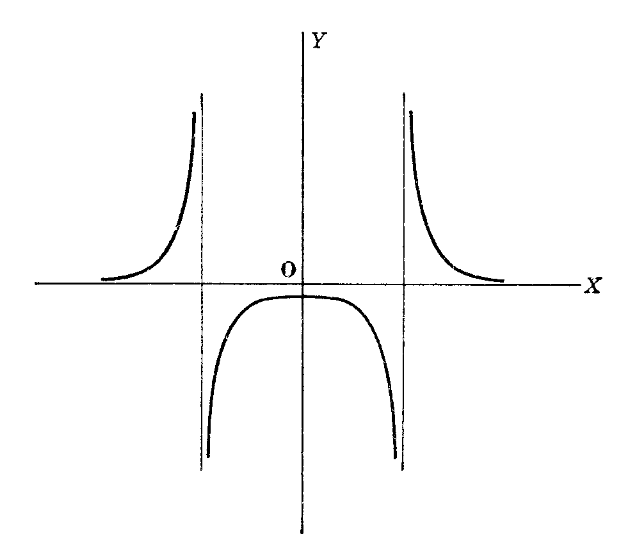


FIGURA 20

Si $-\frac{1}{4M} < x-2 < 0$, entonces

$$\frac{1}{4(x-2)} < -M.$$

De donde si $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{4M}\right\}$ las dos anteriores desigualdades se verifican y

$$\frac{1}{x^2-4} < \frac{1}{4(x-2)} < -M$$

siempre que $-\delta < x-2 < 0$. Es decir, $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$.

Cuando consideramos el límite de una función f cuando x aumenta por encima de cualquier número, supondremos siempre que para todo número real $N > 0$, no importa cuán grande sea, hay elementos x en el dominio de f tales que $x > N$. Esta condición es análoga al requerimiento de que x_0 sea un punto de acumulación del dominio de f en el límite usual y se expresa a veces diciendo que ∞ es un punto de acumulación del dominio de f. Una observación análoga se aplica al caso en que x decrece sin limitación alguna.

15.6 Definición. *Un número L se dice que es el* ***límite de una función*** *f* ***en*** ∞ *(o cuando x aumenta indefinidamente), lo que se escribe*

$$\lim_{\infty} f = L \quad o \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ *existe un número N tal que*

$$|f(x)-L| < \varepsilon$$

siempre que $x\in\mathfrak{D}_f$ *y* $x > N$.

La definición de $\lim\limits_{-\infty} f = L$ es análoga.

15.7 Ejemplo. Demuéstrese que $\lim\limits_{\infty} I^{-n} = 0$ para cualquier n entero positivo.

SOLUCIÓN. Observemos primero (problema 4, pág. 409) que para todo entero $n \geqslant 1$ y todo $x \geqslant 1$,

$$0 < \frac{1}{x^n} \leqslant \frac{1}{x}.$$

De donde

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| \leqslant \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x}.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$. Tenemos ahora

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

siempre que $x > \frac{1}{\varepsilon}$. De donde, si escogemos $N = \text{máx}\left\{1, \frac{1}{\varepsilon}\right\}$, entonces siempre que $x > N$

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| \leqslant \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

y $\lim\limits_{x \to \infty} x^{-n} = 0$ para todos los enteros $n \geqslant 1$.

Finalmente, puede suceder que cuando x aumente indefinidamente, una función f también aumente por encima de cualquier número (o disminuya por debajo de cualquier número).

15.8 Definición. ***Una función f tiene límite*** ∞ ***en*** ∞ *si para cada número* $M > 0$ *hay un número* N *tal que*

$$f(x) > M$$

siempre que $x \in \mathfrak{D}_f$ *y* $x > N$.

Pueden darse análogas definiciones para

$$\lim_{\infty} f = -\infty, \quad \lim_{-\infty} f = \infty, \quad \text{y} \quad \lim_{-\infty} f = -\infty.$$

15.9 Ejemplo. Demuéstrese que para todos los enteros positivos n,

$$\lim_{\infty} aI^n = \begin{cases} \infty & \text{para} \quad a > 0 \\ -\infty & \text{para} \quad a < 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN. Consideremos el caso $a > 0$. La prueba para $a < 0$ es análoga. Notemos primero que si $a > 0$, entonces

$$ax^n \geqslant ax$$

para todos los enteros $n \geqslant 1$ y toda $x \geqslant 1$. Tomemos $M > 0$. Entonces

$$ax > M$$

siempre que $x > M/a$. De donde si $N = \text{máx}\,\{1, M/a\}$, entonces, siempre que $x > N$,

$$ax^n \geqslant ax > M$$

y

$$\lim_{x \to \infty} ax^n = \infty$$

para $a > 0$.

15.10 Ejemplo. Encuéntrese $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^2+3x+2}{2x+1}$.

SOLUCIÓN. Nótese primero que

$$\frac{5x^2+3x+2}{2x+1} = \frac{5x+3+2/x}{2+1/x} \quad (x \neq 0)$$

y para x grande el denominador a la derecha es aproximadamente 2, mientras que en el numerador el término $5x$ dominará para x grande. De aquí que esperemos que el límite sea ∞. Ahora bien, para $x \geqslant 1$,

$$\frac{5x^2+3x+2}{2x+1} = \frac{5x+3+2/x}{2+1/x} \geqslant \frac{5x}{3} > M$$

siempre que $x > \frac{3}{5}M$. De donde si $N = \text{máx}\,\{1, \frac{3}{5}M\}$, entonces

$$\frac{5x^2+3x+2}{2x+1} > M$$

siempre que $x > N$ y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+3x+2}{2x+1} = \infty\,.$$

La técnica usada en el ejemplo 15.10 de dividir el numerador y el denominador por la máxima potencia de x en el denominador para determinar la naturaleza del límite en ∞ puede usarse para cualquier función racional. Sea

$$\mathrm{R} = \frac{a_n I^n + a_{n-1} I^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m I^m + b_{m-1} I^{m-1} + \ldots + b_0}, \quad (a_n \neq 0,\ b_m \neq 0)\,.$$

Entonces, el comportamiento de R en ∞ es el mismo que el de

$$\frac{a_n}{b_m} I^{n-m}$$

en ∞. Los ejemplos 15.7 y 15.9 nos dicen cuál es el comportamiento de la última expresión en ∞.

Problemas

1. Demuéstrese que $\lim\limits_{\infty} aI^n = -\infty$ para $a < 0$.

2. Pruébese que: si f y g son funciones tales que

$$\lim_{\infty} f = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\infty} g = L_2$$

y si ∞ es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_{f+g}$, entonces $\lim [f+g]$ existe y

$$\lim_{\infty} [f+g] = \lim_{\infty} f + \lim_{\infty} g = L_1 + L_2 .$$

3. Explíquense las modificaciones que deben hacerse en las pruebas de los teoremas 5.2 (pág. 359) y 5.8 (pág. 361) si x_0 se reemplaza por ∞.

4. Pruébese que: si $\lim f = \infty$ y $\lim g = L \neq 0$ y si ∞ es un punto de acumulación de $\mathfrak{D}_{fg}$, entonces

$$\lim_{\infty} fg = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad L > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad L < 0 . \end{cases}$$

5. Pruébese que: para una función racional

$$\mathrm{R} = \frac{a_n I^n + a_{n-1} I^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m I^m + b_{m-1} I^{m-1} + \ldots + b_0}$$

donde

$$a_n \neq 0 \quad \text{y} \quad b_n \neq 0, \ \lim_{\infty} \mathrm{R} = \lim_{\infty} \frac{a_n}{b_m} I^{n-m} .$$

6. Encuéntrense cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{3} \dfrac{4}{(I-3)^2}$

b) $\lim\limits_{2} \dfrac{I^2-4}{(I-2)^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+3}{x^2-16}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x^2-1}$

e) $\lim\limits_{\infty} \dfrac{3I^2+2I+1}{I+3}$

f) $\lim\limits_{\infty} \dfrac{3I+2}{I^2+3I+1}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+3x+1}$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2+2}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x^2+3}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3}{x+1}$.

16. RESUMEN

En este capítulo hemos comenzado nuestro estudio del cálculo. Se introdujo el concepto básico de límite y con la ayuda del concepto de límite se definieron la continuidad y la derivada. La continuidad es la propiedad

analítica que corresponde a la propiedad de conexidad de la gráfica de una función, y la diferenciabilidad se corresponde con la propiedad de no tener una gráfica con ángulos bruscos.

Los detalles que aparecen al encontrar fórmulas para las derivadas de una extensa clase de funciones que nos evitan la necesidad de volver una y otra vez a la definición, deben verse ahora como detalles, aunque importantes, en la construcción de una teoría y en la adquisición de evaluación y comprensión de los conceptos básicos. Después de desarrollar el álgebra de las derivadas y las fórmulas para unas pocas funciones —constante, identidad, seno y coseno— pudimos derivar fórmulas para las funciones polinomiales, racionales, todas las trigonométricas, y las composiciones de éstas. Estas funciones son todas diferenciables y, por tanto, continuas en todo su dominio de definición. Hemos aprendido también algo sobre unas cuantas aplicaciones de la derivada.

Pero aún queda mucho por hacer. En el siguiente capítulo volveremos a nuestro estudio de los números reales. Discutiremos el axioma del supremo y probaremos varios importantes teoremas del análisis. Esto nos permitirá seguir adelante y aprender más sobre las funciones continuas y la derivada. Esto, a su vez, nos permitirá extender nuestro conocimiento de las aplicaciones geométricas y físicas de la derivada.

Nos queda también por presentar y estudiar el concepto básico del cálculo integral, la integral y las relaciones que existen entre la derivada y la integral que expresa el teorema fundamental del cálculo. También hemos de estudiar varias funciones de importancia tanto en las discusiones teóricas como en las aplicaciones.

Problemas de repaso

1. Pruébese cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 5} (5-x) = 0$

b) $\lim_{x\to 2} (x^2+x) = 6$

c) $\lim_{x\to 5} (x^3+3x+2) = 142$

d) $\lim_{x\to 3} (2x^2+3x+1) = 28.$

2. Encuéntrese cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3h}{h}$

b) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3 h}{h^2}$

c) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3 h}{h^3}$

d) $\lim_{h\to 0} \dfrac{h \cos h}{\tan h}$

e) $\lim_{h\to 0} \sec h$

f) $\lim_{h\to 0} h \csc h.$

3. Demuéstrese, escribiendo cada expresión en términos de la definición, que $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim_{x \to x_0} f(x_0)$.

4. Pruébese que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para} \quad x \in \langle -\infty, 1] \\ x & \text{para} \quad x \in \langle 1, \infty \rangle \end{cases}$$

es continua para todo $x \in \mathrm{R}$.

5. Encuéntrese cada una de las siguientes derivadas

a) $D_x \cos 5x$

b) $D_x \dfrac{4}{(10-x)^3}$

c) $D_x \operatorname{sen}(\tan 3x)$

d) $D_x \sec^3 x$

e) $D_\theta \left(\dfrac{1 - \cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right)$

f) $D_x(\tan^2 x - \sec^2 x)$

g) $D[\cos \circ (2I^2+3)]$

h) $D[(2I^2+3) \circ \cos]$

i) $D[I^5 \circ \tan]$

j) $D[\tan \circ I^5]$

k) $D[I^{1/2} \circ (I^2 + \sec)]$

l) $D[I^2 \circ (I^2 + \sec)]$

m) $D_x \sqrt{x^2 + \sec x}$

n) $D_z(z^2 + \sec z)^2$

o) $D_x \tan^5 x \sec^2 x$

p) $D_x 25 \csc x \cos 2x$

q) $D_x \left(\dfrac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 5 \cot x} \right)$

r) $D \left(\dfrac{I^2 \cos}{I + 3 \sec} \right)$.

6. Úsense diferenciales para hallar valores aproximados de

a) $\sqrt{143}$

b) $\sqrt[3]{26}$

c) sen $61°$

d) tan $44°$.

7. Un círculo ha de tener un área de 16 cm^2. ¿Qué tolerancia puede establecerse en la medida del radio para asegurar un error menor de 0.5 cm^2 en el área?

8. La intensidad de iluminación en un punto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de una fuente de luz. Si una luz se encuentra a una distancia de 8.25 metros, ¿cuál es la distancia aproximada que necesita moverse la luz para obtener un incremento en la iluminación del 3%?

9. Proporciónese el porcentaje de error permisible aproximado en x para que el porcentaje de error en x^n sea menor que un 1%.

10. Se aumenta la longitud de cada uno de los lados de un cuadrado en Δx. Trácese un cuadrado que muestre la diferencia entre el aumento real del área y la aproximación diferencial de este aumento.

11. El alcance horizontal R de un proyectil bajo condiciones ideales es

$$R = \frac{v^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta$$

donde v es la velocidad inicial y θ es el ángulo inicial de inclinación de la trayectoria. Si v es 457.5 metros por segundo y $\theta = 30°$, y si hay un error posible en θ de 30.5 cm, proporciónese el posible error aproximado en el valor calculado para R debido al error en θ.

12. Demuéstrese que el porcentaje de error en la raíz n-ésima de un número es aproximadamente $\frac{1}{n}$ veces el porcentaje de error en el número. ¿Qué es lo que se puede decir respecto a la potencia n-ésima del número?

13. Demuéstrese que la función definida por

$$f(x) = x|x|, \quad x \in \mathrm{R}$$

es diferenciable para todo $x \in \mathrm{R}$ y que $f''(x)$ existe para $x \neq 0$, pero que $f''(0)$ no existe. Dibújense las gráficas de f, f', y f''.

14. Demuéstrese que la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua para todo $x \in \mathrm{R}$. ¿Cuál es el dominio de g'?

15. Demuéstrese que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{para} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable para toda $x \in \mathrm{R}$, pero f' no es continua en 0 y que $f''(x)$ existe para $x \neq 0$, pero que $f''(0)$ no existe.

16. Está vertiéndose agua dentro de un recipiente cónico de 6.10 metros de profundidad y 6.10 metros de diámetro en el extremo más alto, a razón de 2.832 metros cúbicos por hora. ¿A qué razón aumenta la altura del agua cuando ha alcanzado una altura de 3.05 metros?

17. La posición de una partícula en R^2 en el instante t es $(100t, 16t^2)$. ¿Cuál es la razón de cambio respecto al tiempo de la distancia de la partícula al origen en el instante $t = 10$?

18. Una piedra lanzada a un estanque genera ondas concéntricas que marchan a la velocidad de 1.53 metros por segundo. ¿Cuán rápidamente aumenta la superficie del agua perturbada 6 segundos después de que la piedra golpeó la superficie?

19. Un hombre de 1.83 metros de altura se aleja a una velocidad de 2.44 metros por segundo de una lámpara colocada a 4.58 metros de altura. Determínese la razón a la que el extremo de su sombra se está moviendo y la razón a la que la longitud de esta sombra está aumentando.

Capítulo

$f(x0) \geqslant f(x)$ 9

El axioma del supremo

1. INTRODUCCIÓN

En la lista de axiomas para los números reales dada en el capítulo 1 nos limitamos en lo que al último axioma se refiere a dar sólo un nombre para él: el axioma del supremo. La consideración de este axioma ha sido diferida hasta este momento, no porque sea menos importante que los otros axiomas sino para que podamos apreciar mejor el papel que juega en el análisis.

Es este axioma el que distingue el sistema de los números reales del sistema de los números racionales —el sistema de los números racionales satisface todos los axiomas del sistema de los números reales, excepto el axioma del supremo. Así, sin este axioma, no podríamos demostrar la existencia de números irracionales tales como $\sqrt{2}$, sino que, hasta el momento, teníamos que presumir su existencia. En este capítulo probaremos

la existencia de las raíces n-ésimas de cualquier número real para n impar y de cualquier número real no negativo para n par. Este resultado se sigue de un teorema sobre funciones continuas. Otras propiedades fundamentales de funciones continuas que son de considerable importancia en análisis serán también probadas.

2. COTAS DE UN CONJUNTO

Si $\mathcal{S}$ es un conjunto finito de números reales —es decir, si $\mathcal{S}$ consiste en un número finito de números reales— entonces $\mathcal{S}$ tiene un elemento mínimo y un elemento máximo. Sin embargo, si $\mathcal{S}$ es un conjunto infinito de números reales puede ser que tenga un elemento máximo y uno mínimo, pero puede ser también que no. Por ejemplo, el intervalo cerrado $[a, b]$, donde $a < b$, tiene un elemento mínimo, a, y un elemento máximo, b. Pero el intervalo abierto $\langle a, b\rangle$ no tiene ni elemento mínimo ni elemento máximo. Supongamos que $\langle a, b\rangle$ tuviese un elemento máximo, llamémosle c. Entonces $a < c < b$ y hay un número entre c y b $\left(\text{por ejemplo, } \frac{c+b}{2}\right)$. Este número está en $\langle a, b\rangle$ y es mayor que c. Esto contradice la hipótesis de que c era el elemento máximo de $\langle a, b\rangle$. Así pues, $\langle a, b\rangle$ no tiene elemento máximo.

El intervalo $\langle a, \infty\rangle$ tampoco tiene elemento máximo. En realidad, para cualquier número x hay un elemento en $\langle a, \infty\rangle$ mayor que x (por ejemplo $x+1$ si $x \geqslant a$ o $a+1$ si $x < a$); tal, no es el caso con $\langle a, b\rangle$. Decimos que $\langle a, b\rangle$ está acotado superiormente mientras que $\langle a, \infty\rangle$ no está acotada superiormente.

2.1 Definición. *Un conjunto $\mathcal{S}$ de números reales está* ***acotado superiormente*** *(o tiene una cota superior) si existe un número c tal que, para todo $x \in \mathcal{S}$, $x \leqslant c$. Un cualquier tal número c se llama* ***cota superior*** *de $\mathcal{S}$.*

Para el intervalo abierto $\langle a, b\rangle$, b o cualquier número mayor que b es una cota superior.

En una forma análoga definimos una cota inferior para un conjunto.

2.2 Definición. *Un conjunto $\mathcal{S}$ de números reales está* ***acotado inferiormente*** *(o tiene una cota inferior) si existe un número c tal que, para todo $x \in \mathcal{S}$, $x \geqslant c$. Un cualquier tal número c se llama* ***cota inferior*** *de $\mathcal{S}$.*

Para el intervalo abierto $\langle a, b\rangle$, a o cualquier número menor que a es una cota inferior.

2.3 Definición. *Un conjunto $\mathcal{S}$ de números reales está* ***acotado*** *si existe un número c tal que para todo $x \in \mathcal{S}$, $|x| \leqslant c$.*

Es fácil ver que un conjunto $\mathcal{S}$ está acotado si y sólo si es superiormente e inferiormente acotado, ya que $|x| \leqslant c$ es equivalente a $-c \leqslant x \leqslant c$.

Evidentemente, si algún número c es una cota superior (inferior) de un conjunto $\mathcal{S}$, entonces cualquier número mayor (menor) que c es también una cota superior (inferior) de $\mathcal{S}$. Así pues, la existencia de una cota superior (inferior) de un conjunto asegura la existencia de infinitas cotas superiores (inferiores) para el conjunto. En el caso del intervalo abierto $\langle a, b\rangle$, el conjunto de cotas superiores tiene un elemento mínimo, a saber, el b. El número b se llama "supremo" de $\langle a, b\rangle$. En general, el supremo de un conjunto se define como sigue.

2.4 Definición. *Un número c se llama* ***supremo*** *de un conjunto* $\mathcal{S}$, *lo que escribimos* $c = \sup \mathcal{S}$, *si c es una cota superior de* $\mathcal{S}$ *y ningún número menor que c es una cota superior de* $\mathcal{S}$.

Como cualquier número menor que c puede escribirse como $c-\varepsilon$ donde $\varepsilon > 0$, podemos reformular la anterior definición en la siguiente manera.

2.5 $$c = \sup \mathcal{S} \quad \text{si}$$

1) para todo $x \in \mathcal{S}$, $x \leqslant c$, y
2) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $x \in \mathcal{S}$ tal que $x > c-\varepsilon$.

La condición (1) afirma que c es una cota superior de $\mathcal{S}$ y la (2) enuncia que ningún número menor que c es una cota superior de $\mathcal{S}$.

El ínfimo de un conjunto $\mathcal{S}$, escrito $\inf \mathcal{S}$, se define de un modo análogo. El estudiante debe escribir esta definición por sí mismo.

2.6 Ejemplo. Determínense (si existen) el supremo y el ínfimo del conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \text{ es un entero positivo cualquiera} \right\}.$$

SOLUCIÓN. Después de pensarlo un poco, parece lógico suponer que $\sup \mathcal{S} = 1$ e $\inf \mathcal{S} = 0$. Intentaremos verificar esto usando (2.5) y la formulación correspondiente para el ínfimo. Primero demostramos que $\sup \mathcal{S} = 1$.

1) Para todo entero positivo n, $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$ y

2) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n (simplemente, 1) tal que $\dfrac{1}{n} > 1-\varepsilon$.

Así pues, $\sup \mathcal{S} = 1$.

Pasamos ahora a demostrar que $\inf \mathcal{S} = 0$.

1) Para todo entero positivo n, $\frac{1}{n} \geqslant 0$ y

2) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Que la condición (2) se verifica realmente en este caso, es una consecuencia de la propiedad arquimediana del sistema de los números reales, propiedad que probaremos en la próxima sección.

Nótese que en el anterior ejemplo el supremo es un elemento del conjunto y el ínfimo no es un elemento del conjunto. En general, supremo e ínfimo de un conjunto pueden ser y pueden no ser del conjunto. Si el supremo de un conjunto es un elemento del conjunto, entonces el conjunto tiene un elemento máximo (que es el supremo). Además, si un conjunto tiene un elemento máximo, entonces tal elemento es el supremo del conjunto. Estas afirmaciones se verifican fácilmente usando 2.5 (problemas 7 y 8). Relaciones análogas se verifican entre el ínfimo y el mínimo de un conjunto. Así pues, el supremo (ínfimo) de un conjunto puede considerarse una generalización del máximo) (mínimo) elemento del conjunto.

Problemas

1. Demuéstrese que el intervalo abierto $\langle a, b\rangle$ no tiene un elemento mínimo.

2. ¿Son los siguientes conjuntos acotados superiormente, acotados inferiormente, acotados?

a) $\langle -\infty, b\rangle$ *b*) $\{n \mid n$, entero positivo cualquiera$\}$

c) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n} \,\middle|\, n, \text{ entero positivo cualquiera}\right\}$

d) $\left\{n+(-1)^n \frac{1}{n} \,\middle|\, n, \text{ un positivo cualquiera}\right\}$.

3. Escríbase una definición análoga a la 2.5 para el ínfimo de un conjunto de números reales.

4. Verifíquese que a es el ínfimo de $\langle a, b\rangle$ y de $[a, b]$.

5. Determínense el supremo y el ínfimo (si existen) de los siguientes conjuntos. Verifíquese que las contestaciones satisfacen 2.5 y la condición correspondiente para el ínfimo.

a) $\langle 2, 7\rangle$ *b*) $[-3, 5]$

c) $\{n \mid n$, un entero positivo cualquiera$\}$ *d*) $\{1, 4, 9, 13\}$.

6. Pruébese que un conjunto de números reales tiene cuando más un supremo.

7. Demuéstrese que si $\mathcal{S}$ tiene un elemento máximo, entonces $\mathcal{S}$ tiene un supremo y que el elemento máximo de $\mathcal{S}$ es el supremo de $\mathcal{S}$.

8. Demuéstrese que si el supremo c de $\mathcal{S}$ es un elemento de $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S}$ tiene un elemento máximo, y que c es el elemento máximo de $\mathcal{S}$.

9. Demuéstrese que si el supremo c de un conjunto $\mathcal{S}$ no es un elemento de $\mathcal{S}$, entonces c es un punto de acumulación de $\mathcal{S}$.

10. Demuéstrese que si $c = \sup \mathcal{S}$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $x \in \mathcal{S}$ tal que $0 \leqslant c-x < \varepsilon$. Así pues, si $\mathfrak{J}$ es un intervalo abierto que contiene a c, entonces existe un $x \in \mathcal{S}$ tal que $x \in \mathfrak{J}$.

11. Si c es el supremo de $\mathcal{S}$, pruébese que $-c$ es el ínfimo de $-\mathcal{S}$; donde $-\mathcal{S}$ denota el conjunto de números que son los inversos aditivos de los números que están en $\mathcal{S}$.

3. EL AXIOMA DEL SUPREMO

Una pregunta importante que ha sido ignorada en la discusión de la sección precedente es: ¿todos los conjuntos superiormente acotados tienen supremo? En el sistema de los números reales todos los conjuntos de tal tipo tienen supremo. En realidad, eso es precisamente lo que nos dice el axioma del supremo.

Daremos ahora el último axioma del sistema de los números reales.

(3.1) Axioma L. *Si $\mathcal{S}$ es un conjunto no vacío de elementos de* R *superiormente acotado, entonces $\mathcal{S}$ tiene un supremo en* R.

Usando el axioma del supremo, podemos probar la afirmación hecha en el ejemplo 2.6 de que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Esto es una consecuencia inmediata de la propiedad arquimediana de los números reales que ahora probaremos.

3.2 Teorema. *Si a y b son números reales positivos cualesquiera, existe un entero positivo n tal que $b < na$.*

Prueba. Daremos una prueba indirecta. Supongamos que para todos los enteros positivos n, $b \geqslant na$. Sea

$$\mathcal{S} = \{na \mid n, \text{ entero positivo cualquiera}\}.$$

De acuerdo con nuestra hipótesis, $\mathcal{S}$ está superiormente acotado (b es una cota superior). Luego, por el axioma L, $\mathcal{S}$ tiene un supremo, llamémosle c. Como $c-a$ es menor que c, $c-a$ no puede ser una cota superior de $\mathcal{S}$ y, por tanto, hay un elemento de $\mathcal{S}$, llamémosle $n_0 a$, tal que $n_0 a > c-a$.

Entonces $(n_0+1)a > c$. Pero $(n_0+1)a \in \mathcal{S}$. Esto contradice el hecho de que c es el supremo de $\mathcal{S}$. Por tanto, la hipótesis de que para todo n, $b \geqslant na$ no puede verificarse. Así pues, existe un n tal que $b < na$. Lo que prueba el teorema.

3.3 Corolario. *Para cualquier* $\varepsilon > 0$, *existe un entero positivo* n *tal que* $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

PRUEBA. Hágase $a = \varepsilon$ y $b = 1$ en el teorema 3.2.

La propiedad arquimediana nos da un medio de probar otra relación entre los números reales y los enteros positivos que parece intuitivamente obvia. Esta relación se admitió tácitamente cuando definimos la función "máximo entero contenido" en el capítulo 3.

3.4 Teorema. *Para cualquier número real* b, *existe un entero* m *tal que* $m-1 \leqslant b < m$.

PRUEBA. Demostramos, primero, que existen enteros p y q tales que $p < b < q$. Si $b > 0$ entonces, haciendo $a = 1$ en el teorema 3.2, existe un entero positivo q tal que $b < q$. Si $b \leqslant 0$ hacemos $q = 1$. Así, para cualquier número real b, existe un entero positivo q tal que $b < q$. Aplicando ahora este resultado al número real $-b$, tenemos que existe un entero positivo al que llamamos $-p$ tal que $-b < -p$. Luego existen enteros p y q tales que $p < b < q$.

Parecería, pues, que b debe encontrarse entre dos números consecutivos en el conjunto $\{p, p+1, \ldots, p+(q-p) = q\}$. Para demostrar que éste es el caso, sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los enteros positivos n tales que $p+n > b$. $\mathcal{S}$ es un conjunto no nulo de enteros positivos $(q-p \in \mathcal{S})$ y, por tanto, de acuerdo con el principio del buen orden (pág. 316), $\mathcal{S}$ tiene un elemento mínimo, digamos n_0. Haciendo, entonces, $m = p+n_0$, tenemos

$$m-1 \leqslant b < m.$$

Lo que completa la prueba.

Usando ahora el corolario 3.3 y el teorema 3.4 podemos demostrar que entre dos números reales cualesquiera hay un número racional. A veces este hecho se formula diciendo que "los números racionales son densos en los números reales".

3.5 Teorema. *Si* a *y* b *son dos números reales cualesquiera tales que* $a < b$, *entonces existe un número racional* r *tal que* $a < r < b$.

PRUEBA. Según el corolario 3.3, existe un entero positivo n tal que $\frac{1}{n} < b-a$. Ahora bien, como la distancia entre racionales sucesivos de

la forma $\frac{m}{n}$ es $\frac{1}{n} < b-a$, parece lógico que algún número racional de esta forma deba encontrarse entre a y b. Según el teorema 3.4, sabemos que existe un entero m tal que

$$m-1 \leqslant an < m\,;$$

es decir,

$$\frac{m-1}{n} \leqslant a < \frac{m}{n}\,.$$

Así pues, $a < \frac{m}{n}$ y, como $\frac{\mathrm{m}}{n} - \frac{1}{n} \leqslant a$,

$$\frac{m}{n} \leqslant a + \frac{1}{n} < b\,.$$

Por tanto, el número racional $r = \frac{m}{n}$ se encuentra entre a y b.

En la introducción a este capítulo afirmamos que el axioma del supremo distingue el sistema de los números reales del sistema de los números racionales; es decir, los números racionales satisfacen todos los axiomas para el sistema de los números reales, excepto el axioma del supremo. Damos ahora un ejemplo de un conjunto que está superiormente acotado, pero que, en el sistema de los números racionales, no tiene supremo.

3.6 Ejemplo. Demuéstrese que el conjunto $\mathcal{S}$ de todos los números racionales positivos cuyos cuadrados son menores que 2 es acotado superiormente, pero no tiene supremo en el sistema de los números racionales.

SOLUCIÓN. Es claro que $\mathcal{S}$ es superiormente acotado; por ejemplo, 2 es una cota superior de $\mathcal{S}$. Ahora bien, usando el axioma del supremo y el problema 6, pág. 424, sabemos que $\mathcal{S}$ tiene un supremo y solamente uno en el sistema de los números reales al que llamaremos c. Demostraremos que $c^2 = 2$, de donde, como ningún número racional tiene su cuadrado igual a 2, $\mathcal{S}$ no puede tener supremo en el sistema de los números racionales.

Estableceremos que $c^2 = 2$ demostrando que $c^2 < 2$ y $c^2 > 2$ conducen a contradicciones. Nótese que si $c = \sup \mathcal{S}$ entonces c debe ser positivo.

Caso 1. Si $c^2 < 2$, entonces podemos demostrar que hay un número racional $r \in \mathcal{S}$ (es decir, tal que $r^2 < 2$) tal que $r > c$. Esto contradice la hipótesis de que c es el supremo de $\mathcal{S}$. Ahora bien, si $c^2 < 2$, entonces $c^2 < 4$ y por tanto $c < 2$. Además para $n \geqslant 2$,

$$0 < \frac{2-c^2}{n} < \frac{2}{n} \leqslant 1\,.$$

Sea $b = c + \dfrac{2-c^2}{n}$ (n, algún entero positivo), entonces b es un número real mayor que c. Para una elección adecuada de n, obtenemos $b^2 < 2$

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2+2c\,\frac{2-c^2}{n} + \left(\frac{2-c^2}{n}\right)^2 \\ &= c^2 + \frac{2-c^2}{n}\left(2c + \frac{2-c^2}{n}\right) \\ &< c^2 + \frac{(2-c^2)}{n}5 \quad \text{para} \quad n \geqslant 2 \\ &\leqslant c^2+(2-c^2) = 2 \quad \text{para} \quad n \geqslant 5. \end{aligned}$$

Así pues, $b = c + \dfrac{2-c^2}{5}$ es un número real mayor que c tal que $b^2 < 2$. Según el teorema 3.5 hay un número racional r tal que $c < r < b$. Entonces $r^2 < 2$ y $r \in \mathcal{S}$. Lo que contradice el hecho de que $c = \sup \mathcal{S}$ y de aquí que $c^2 < 2$ no puede verificarse.

Caso 2. Si $c^2 > 2$, entonces podemos demostrar que hay un número real b que es menor que c y que es una cota superior de $\mathcal{S}$. Esto contradice el supuesto de que c sea el supremo de $\mathcal{S}$. Si $c^2 > 2$, entonces $c^2+2 < c^2+c^2 = 2c^2$ y por tanto $\dfrac{c^2+c^2}{2c} < c$. Haciendo $b = \dfrac{c^2+2}{2c}$, tenemos $0 < b < c$. Además

$$b^2-2 = \frac{c^4+4c^2+4}{4c^2} - 2 = \frac{c^4-4c^2+4}{4c^2} = \left(\frac{c^2-2}{2c}\right)^2 > 0.$$

De donde $b^2 > 2$ y b es una cota superior de $\mathcal{S}$ que es menor que c. Esto contradice el hecho de que $c = \sup \mathcal{S}$ y demuestra que $c^2 > 2$ no puede verificarse.

Por tanto, $c^2 = 2$ y $\mathcal{S}$ no tiene supremo en el sistema de los números racionales. Esto completa la solución del ejemplo 3.6.[1]

Nótese que en la solución del ejemplo 3.6 hemos demostrado la existencia del número $\sqrt{2}$ (el supremo de $\mathcal{S}$). Además, usando el problema 10 de la sección 2, pág. 425, vemos que $\sqrt{2}$ puede aproximarse por números racionales tanto como deseemos (para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $x \in \mathcal{S}$ tal que $0 \leqslant \sqrt{2} - x < \varepsilon$).

[1] Si no se quiere interpretar el enunciado del problema en el sentido de que tan solo afirma que el supremo de $\mathcal{S}$ no es racional, falta, para completar la prueba, hacer ver que $\sup \mathcal{S} = r$ implica que no existe un c racional distinto de r que sea la menor cota superior racional de $\mathcal{S}$. [N. del T.]

Podríamos hacer la pregunta de si no es también cierto que un conjunto no nulo $\mathcal{S}$ de números reales inferiormente acotado no tiene siempre ínfimo. Es fácil probar que tal es el caso aplicando el axioma del supremo al conjunto $-\mathcal{S}$ (el conjunto consistente en los inversos aditivos de los elementos de $\mathcal{S}$). Dejamos esta prueba al estudiante (problema 2).

Problemas

1. Determínense el supremo y el ínfimo (si existen) de los siguientes conjuntos. Verifíquese que las contestaciones dadas satisfacen 2.5 y las condiciones correspondientes para el ínfimo. ¿Tienen estos conjuntos máximo y mínimo?

a) $\left\{1 - \frac{1}{n} \,\middle|\, n, \text{ un entero positivo}\right\}$

b) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n} \,\middle|\, n, \text{ un entero positivo}\right\}$

c) $\left\{n+(-1)^n \frac{1}{n} \,\middle|\, n, \text{ un entero positivo}\right\}$

d) $\left\{\frac{1}{n} + (-1)^n n \,\middle|\, n, \text{ un entero positivo}\right\}.$

2. Pruébese que si $\mathcal{S}$ es un conjunto no nulo de elementos de R inferiormente acotado, entonces $\mathcal{S}$ tiene un ínfimo en R. (*Sugerencia*: úsese el axioma L y el problema 11 de la sección 2.)

3. Si a y b son números reales positivos cualesquiera, demuéstrese que existe un entero positivo m tal que

$$(m-1)a \leqslant b < ma.$$

4. Constrúyase un conjunto $\mathcal{S}$ de números racionales que tenga $\sqrt{3}$ como su supremo. Verifíquese que sup $\mathcal{S} = \sqrt{3}$.

5. Constrúyase un conjunto $\mathcal{S}$ de números racionales que tenga $\sqrt{3}$ como su ínfimo. Verifíquese que ínf $\mathcal{S} = \sqrt{3}$.

6. Pruébese que entre dos números reales distintos a y b hay infinitos racionales.

7. Si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son conjuntos de números reales tales que para cualquier $x \in \mathcal{E}$ hay un $y \in \mathcal{F}$ tal que $x \leqslant y$, demuéstrese que

$$\sup \mathcal{E} \leqslant \sup \mathcal{F}.$$

8. Si $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, y $\mathcal{G}$ son conjuntos de números reales tales que para cada $x \in \mathcal{E}$ y cada $y \in \mathcal{F}$ hay un $z \in \mathcal{G}$ tal que $x+y \leqslant z$, demuéstrese que

$$\sup \mathcal{E} + \sup \mathcal{F} \leqslant \sup \mathcal{G}.$$

4. EL TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

En la sección anterior demostramos la existencia del número $\sqrt{2}$, construyendo un conjunto de números racionales que tenían como su supremo a un número cuyo cuadrado es 2. Es claro que podemos demostrar la existencia de otras raíces de números en una forma análoga. Sin embargo, no es necesario hacerlo así puesto que podemos probar el siguiente resultado general: para n impar la n-ésima raíz de cualquier número real existe como un número real y para n par la n-ésima raíz de cualquier número real positivo existe como un número real. Este resultado se sigue de un teorema llamado teorema del valor intermedio.

Geométricamente, el teorema del valor intermedio enuncia que si f es continua sobre $[a, b]$ y si la gráfica de f está por debajo de la recta $y = t$ en a y por encima de esta recta en b, entonces la gráfica de f debe intersectar la recta en algún punto c entre a y b (figura 1). De esto puede inferirse que si una función f es continua sobre un intervalo, entonces la curva que representa la gráfica de f no puede tener salto alguno en este intervalo.

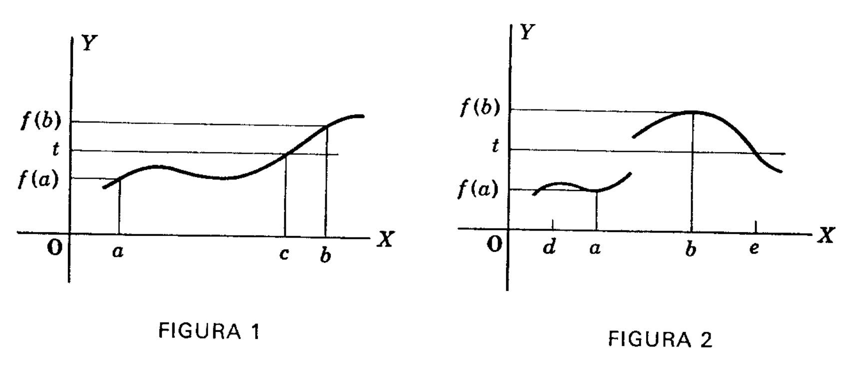


FIGURA 1

FIGURA 2

Por ejemplo, si una función f es continua sobre $[d, e]$ la curva que representa su gráfica no puede ser análoga a la curva de la figura 2. Pues f es continua en $[a, b]$, pero no hay ningún punto $c \in \langle a, b \rangle$ tal que $f(c) = t$.

4.1 Teorema. (El teorema del valor intermedio.) *Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(a) < f(b)$ y si t es un número cualquiera tal que $f(a) < t < f(b)$, entonces existe un punto $c \in \langle a, b \rangle$ tal que $f(c) = t$.*

PRUEBA. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los puntos $x \in \langle a, b \rangle$ tales que $f(x) < t$. Este conjunto $\mathcal{S}$ no es nulo ($a \in \mathcal{S}$) y está superiormente acotado (b es una cota superior). De donde, por el axioma del supremo, $\mathcal{S}$ tiene un supremo, llamémosle c. Como $a \in \mathcal{S}$ y b es una cota superior de $\mathcal{S}$, es claro que $c \in [a, b]$. Demostraremos que $f(c) = t$ demostrando que la hipótesis $f(c) \neq t$ nos lleva a una contradicción. Entonces, si $f(c) = t$, c no puede ser ni a ni b y, por tanto, $c \in \langle a, b \rangle$.

Caso 1. Si $f(c) < t$, entonces $c \in [a, b\rangle$ y, según el teorema 6.9 del capítulo 8, pág. 369, existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < t \text{ para todo } x \in \langle c-\delta, c+\delta\rangle \cap [a, b].$$

Así pues, existe un punto $x \in \langle c, b]$ tal que $f(x) < t$ y esto contradice el hecho de que $c = \sup S$.

Caso 2. Si $f(c) > t$, entonces $c \in \langle a, b]$ y, por el teorema 6.9, del capítulo 8, pág. 369, existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > t \text{ para todo } x \in \langle c-\delta, c+\delta\rangle \cap [a, b].$$

Así pues, no hay ningún punto de S a menos de una distancia δ de c y esto contradice el hecho de que $c = \sup S$ (problema 10 de la sección 2, pág. 425).

Así pues, el supuesto de que $f(c) \neq t$ conduce a una contradicción y concluimos que $f(c) = t$ y $c \in \langle a, b\rangle$. Esto completa la prueba del teorema 4.1.

En el teorema 4.1 supusimos que $f(a) < f(b)$. Un resultado análogo se verifica, desde luego, si $f(a) > f(b)$.

4.2 Corolario. *Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe un número $c \in \langle a, b\rangle$ tal que $f(c) = 0$.*

Este corolario es simplemente un caso especial del teorema 4.1. Lo enunciamos explícitamente porque se usa en la determinación aproximada de las raíces de las ecuaciones.

4.3 Ejemplo. Calcúlense aproximadamente las raíces de la ecuación

$$3x^3+2x-4 = 0.$$

SOLUCIÓN. Sea $f = 3I^3+2I-4$. Como $f(x)$ aumenta cuando x aumenta, la ecuación puede tener cuando más una raíz real. Busquemos ahora dos números en que f tenga valores de signos opuestos. Por ejemplo, $f(0) = -4$ y $f(1) = 1$. Como f es continua en $[0, 1]$, la ecuación tiene una raíz entre 0 y 1. Así pues, podemos tomar 0 o 1 como una aproximación a la raíz y el error será menor que 1. Escogeríamos 1 ya que $f(1)$ es menor que $f(0)$ en valor absoluto. Si deseamos una aproximación con error menor que 0.1 determinamos dos décimas sucesivas en que los valores de f sean de signos opuestos. Después de algunos cálculos encontramos que $f(.9) = -.013$ y, por tanto, la raíz de la ecuación debe encontrarse entre 0.9 y 1.0. Como $f(.9)$ es más pequeño que $f(1)$ en valor absoluto, escogemos 0.9 como la aproximación a la raíz y ésta es correcta dentro de un error de 0.1. Podríamos continuar en esta forma para obtener una aproximación con error tan pequeño como deseásemos.

Usaremos ahora el teorema del valor intermedio para probar la existencia de la n-ésima raíz de cualquier número real positivo.

4.4 Teorema. *Si a es un número real positivo y n es un entero positivo, entonces existe un número real positivo y sólo uno b tal que $b^n = a$.*

PRUEBA. Sea p un entero tal que $a < p$; entonces $p \geqslant 1$ y tenemos:

$$0 < a < p \leqslant p^n.$$

La función I^n es continua sobre $[0, p]$ y

$$I^n(0) = 0 < a < p^n = I^n(p).$$

Por tanto, según el teorema del valor intermedio, hay un número $b \in \langle 0, p \rangle$ tal que $I^n(b) = b^n = a$. Como $I^n(x)$ aumenta cuando x (positivo) aumenta, b es el único número con tal propiedad.

Si n es impar, la existencia de la n-ésima raíz de un número real negativo cualquiera puede probarse de un modo análogo (problema 2).

Ahora que hemos establecido la existencia de la raíz cuadrada de cualquier número positivo, consideraremos un procedimiento para obtener una aproximación decimal de la raíz cuadrada de un número positivo a. Este procedimiento es esencialmente el método del ejemplo 4.3 aplicado a la ecuación $x^2 - a = 0$.

Sea k_0 el mayor entero tal que

$$k_0^2 \leqslant a.$$

Entonces

$$k_0 \leqslant \sqrt{a} < k_0 + 1.$$

Sea k_1 el mayor entero entre 0 y 9 inclusive tal que

$$\left(k_0 + \frac{k_1}{10}\right)^2 \leqslant a.$$

Entonces

$$k_0 + \frac{k_1}{10} \leqslant \sqrt{a} < k_0 + \frac{k_1 + 1}{10}.$$

Sea k_2 el mayor entero entre 0 y 9 inclusive tal que

$$\left(k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2}\right)^2 \leqslant a.$$

Entonces

$$k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} \leqslant \sqrt{a} < k_0 + \frac{k_1}{10} + \frac{k_2 + 1}{10^2}.$$

Continuando de esta forma podemos llegar a una aproximación a $\sqrt{a}$ con tantas cifras decimales exactas como deseemos.

Ilustramos este procedimiento encontrando una aproximación decimal de $\sqrt{2}$ con tres cifras decimales exactas. En este caso $k_0 = 1$. Necesitamos a continuación determinar el mayor entero k_1 entre 0 y 9 tal que

$$\left(1 + \frac{k_1}{10}\right)^2 \leqslant 2$$

o, lo que es equivalente,

$$\frac{k_1}{10}\left(2 + \frac{k_1}{10}\right) \leqslant 2-1 = 1$$

$$k_1(2\cdot 10+k_1) \leqslant 10^2.$$

Así pues, $k_1 = 4$. A continuación determinamos el mayor entero entre 0 y 9 tal que

$$\left(1 + \frac{4}{10} + \frac{k_2}{10^2}\right)^2 \leqslant 2$$

o, lo que es equivalente,

$$\frac{k_2}{10^2}\left(2+2\cdot\frac{4}{10} + \frac{k_2}{10^2}\right) \leqslant 2-1 - \frac{8}{10} - \frac{16}{10^2} = \frac{4}{10^2}$$

$$k_2(2\cdot 10^2+8\cdot 10+k_2) \leqslant 4\cdot 10^2.$$

Por tanto, $k_2 = 1$.

Para la ejecución de este problema introduciremos un esquema que es familiar al estudiante y que pone el anterior procedimiento en una forma abreviada.

```
          1.4  1  4  2
        √2.00 00 00 00
          1
    24 | 100
          96
   281 |   4 00
           2 81
  2824 |   1 19 00
           1 12 96
 28282 |      6 04 00
              5 65 64
```

Por tanto, 1.414 es una aproximación decimal a $\sqrt{2}$ con tres cifras decimales exactas.

En el capítulo 1 definimos intervalos finitos abiertos, cerrados, y semiabiertos e intervalos infinitos. Dijimos entonces, que el término "intervalo" se usaría para denotar cualquiera de estos tipos de intervalos. Todos estos tipos de intervalos tienen la propiedad de que para cualesquiera dos puntos del intervalo todos los puntos entre ellos se encuentran también en el intervalo. En realidad, esta propiedad caracteriza a los intervalos.

4.5 Teorema. *Un conjunto $\mathcal{S}$ de números reales es un intervalo si y sólo si tiene la propiedad de que para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 en $\mathcal{S}$, con $x_1 < x_2$, $\langle x_1, x_2 \rangle \subset \mathcal{S}$.*

PRUEBA. Es fácil verificar que cada uno de los varios tipos de intervalos tiene esta propiedad. Supongamos que el conjunto $\mathcal{S}$ tiene esta propiedad. Si $\mathcal{S}$ es el nulo o consiste en un solo punto, es un intervalo. Supongamos pues que $\mathcal{S}$ consiste de, al menos, dos puntos.

Si $\mathcal{S}$ es acotado, sean $a = \text{ínf } \mathcal{S}$ y $b = \sup \mathcal{S}$. Demostraremos que $\mathcal{S}$ es uno de los intervalos $\langle a, b \rangle$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$, o $[a, b]$. Tomemos x tal que $a < x < b$. Como $a = \text{ínf } \mathcal{S}$ y $b = \sup \mathcal{S}$, hay puntos x_1 y x_2 en $\mathcal{S}$ tales que

$$a < x_1 < x < x_2 < b.$$

Por tanto, $x \in \mathcal{S}$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \langle a, b \rangle & &\text{si } a \notin \mathcal{S},\ b \notin \mathcal{S} \\ \mathcal{S} &= [a, b \rangle & &\text{si } a \in \mathcal{S},\ b \notin \mathcal{S} \\ \mathcal{S} &= \langle a, b] & &\text{si } a \notin \mathcal{S},\ b \in \mathcal{S} \\ \mathcal{S} &= [a, b] & &\text{si } a \in \mathcal{S},\ b \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{S}$ no está acotada, la prueba es análoga. Por ejemplo, supongamos que $\mathcal{S}$ está inferior, pero no superiormente acotada. Sea $a = \text{ínf } \mathcal{S}$. Demostraremos que $\mathcal{S}$ es o $\langle a, \infty \rangle$ o $[a, \infty \rangle$. Tomemos $x > a$. Como $a = \text{ínf } \mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ no está superiormente acotada, hay puntos x_1 y x_2 en $\mathcal{S}$ tales que

$$a < x_1 < x < x_2.$$

Por tanto, $x \in \mathcal{S}$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \langle a, \infty \rangle & &\text{si } a \notin \mathcal{S} \\ \mathcal{S} &= [a, \infty \rangle & &\text{si } a \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Una vez que hemos establecido la anterior caracterización de los intervalos podemos demostrar que el teorema del valor intermedio implica que la imagen de un intervalo bajo un mapeo (función) continuo es un intervalo.

4.6 Teorema. *Si $\mathfrak{J}$ es un intervalo y f es una función continua sobre $\mathfrak{J}$, entonces $f(\mathfrak{J}) = \{f(x) \mid x \in \mathfrak{J}\}$ es un intervalo.*

PRUEBA. Si $f(\mathfrak{J})$ es el nulo o consta de un solo punto, entonces es un intervalo. Supongamos que $f(\mathfrak{J})$ consta de al menos dos puntos. Tomemos $f(x_1)$ y $f(x_2)$ en $f(\mathfrak{J})$ con $f(x_1) < f(x_2)$. Si $t \in \langle f(x_1), f(x_2) \rangle$, por el teorema del valor intermedio existe un punto $c \in \langle x_1, x_2 \rangle$ (o $\langle x_2, x_1 \rangle$) tal que $f(c) = t$. Por tanto, $t \in f(\mathfrak{J})$. Según el teorema 4.5, ello nos dice que $f(\mathfrak{J})$ es un intervalo.

Por ejemplo, I^2 mapea $\langle 1, 2 \rangle$ sobre $\langle 1, 4 \rangle$ y la función seno mapea $\langle 0, 2\pi \rangle$ sobre $[-1, 1]$.

Problemas

1. Aproxímense las raíces de las siguientes ecuaciones con un error menor que 0.1.

a) $x^3+3x-5 = 0$ *b*) $x^3+2x+10 = 0$

c) $x^3-5 = 0$ *d*) $x^4-8 = 0$

2. Pruébese que: si a es un número real negativo y n es un entero positivo impar, entonces existe un número real negativo b tal que $b^n = a$.

3. Determínese una aproximación decimal a $\sqrt{5}$ que sea correcta hasta tres cifras decimales.

4. Explíquese detalladamente un procedimiento para obtener una aproximación decimal de la raíz cúbica de un número positivo real.

5. Determínese una aproximación decimal a $\sqrt{2}$ que tenga dos cifras decimales correctas.

6. Si $\mathcal{S}$ es un conjunto de números no negativos y $m = \text{ínf } \mathcal{S}$ y $M = \sup \mathcal{S}$, demuéstrese que $m^2 = \text{ínf } \mathcal{S}^2$ y $M^2 = \sup \mathcal{S}^2$, donde $\mathcal{S}^2$ representa el conjunto de los números que son los cuadrados de los números en $\mathcal{S}$.

7. Muéstrese que entre dos números reales distintos a y b hay un número irracional. (*Sugerencia*: según el teorema 3.5, pág. 426, hay un número irracional entre $\sqrt{2}a$ y $\sqrt{2}b$.)

8. Demuéstrese que entre dos números reales distintos hay infinitos números irracionales.

9. Demuéstrese que el rango de la función seno es el intervalo cerrado $[-1, 1]$.

10. Determínense las imágenes de los siguientes intervalos según las funciones que se dan.

a) $[0, 3]; I^3$ *b*) $\langle 0, 3]; I^{-1}$

c) $\langle -2, 2 \rangle; I^2-2I+1$ *d*) $[0, 3]$; función "máximo entero contenido"

5. EL TEOREMA DE HEINE-BOREL

Usando el axioma del supremo podemos probar otra propiedad básica del sistema de los números reales llamada la propiedad de Heine-Borel. Esta propiedad es de una naturaleza geométrica y, con frecuencia, su aplicación resulta mas conveniente que el mismo axioma del supremo.

Antes de enunciar esta propiedad vamos a definir lo que entendemos por una cubierta de un conjunto.

5.1 Definición. *Una colección de intervalos abiertos se dice que* ***cubre*** *un conjunto* $\mathcal{S}$ *si cada punto de* $\mathcal{S}$ *pertenece al menos a uno de los intervalos abiertos.*

Daremos ahora algunos ejemplos para ilustrar esta definición.

5.2 Ejemplo. Sea $\mathcal{S}$ el intervalo $\langle 0, 1]$. ¿Cubre $\mathcal{S}$ la colección de intervalos abiertos $\{\mathfrak{J}_n\}$, donde $\mathfrak{J}_n = \left\langle \frac{1}{n}, \frac{3}{n} \right\rangle$ y $n = 1, 2, \ldots$ (figura 3)?

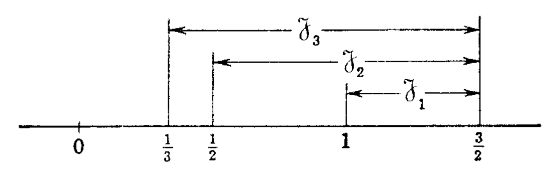


FIGURA 3

SOLUCIÓN. La colección $\{\mathfrak{J}_n\}$ cubre $\langle 0, 1]$. Para demostrar esto tomemos un $c \in \langle 0, 1]$. Por el corolario 3.3, pág. 426, para algún n, $1/n < c$. Luego $c \in \mathfrak{J}_n$.

5.3 Ejemplo. Sea $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ donde $n = 1, 2, \ldots$ ¿Cubre a $\mathcal{S}$ la colección de intervalos abiertos $\{\mathfrak{J}_n\}$, donde $\mathfrak{J}_n = \left\langle \frac{1}{n} - \delta, \frac{1}{n} + \delta \right\rangle$ y δ un cierto número positivo?

SOLUCIÓN. Claramente $\{\mathfrak{J}_n\}$ cubre a $\mathcal{S}$ ya que $\frac{1}{n} \in \mathfrak{J}_n$.

En ambos ejemplos la colección de intervalos abiertos es una colección infinita. ¿Podemos escoger de la colección $\{\mathfrak{J}_n\}$ un número finito de intervalos abiertos que cubra a $\mathcal{S}$ en cada uno de estos ejemplos?

En el ejemplo 5.2 no podemos escoger un número finito de intervalos abiertos de los de $\{\mathfrak{J}_n\}$ en tal forma que esta finita colección cubra a $\mathcal{S}$. Consideremos una colección finita de intervalos abiertos de $\{\mathfrak{J}_n\}$. Sea $\mathfrak{J}_m$ el

intervalo abierto con el índice mayor en esta colección finita. Entonces, cualquier punto en el intervalo $\left\langle 0, \frac{1}{m}\right]$ no se encuentra en ninguno de los intervalos abiertos de esta colección finita. De donde que ninguna colección finita de intervalos abiertos de $\{\mathfrak{J}_n\}$ pueda cubrir a $\mathcal{S}$.

En el ejemplo 5.3 podemos escoger un número finito de intervalos abiertos de los de $\{\mathfrak{J}_n\}$ que cubrirá a $\mathcal{S}$. Usando la propiedad arquimediana de los números reales, para algún entero positivo m, $\frac{1}{m} < \delta$. Entonces $\{\mathfrak{J}_n | n = 1, 2, \ldots, m\}$ es una colección finita que cubre a $\mathcal{S}$, ya que, para $n > m$

$$\frac{1}{m} - \delta < 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{m} + \delta .$$

La cuestión de la existencia de un número finito de intervalos abiertos de una cubierta de $\mathcal{S}$ tales que ellos mismos cubran a $\mathcal{S}$ queda contestada para el caso en que $\mathcal{S}$ sea un intervalo cerrado según el teorema de Heine-Borel.

5.4 Teorema. (Teorema de Heine-Borel.) *Si el intervalo cerrado* $[a, b]$ *está cubierto por una colección de intervalos abiertos* $\{\mathfrak{J}_\alpha\}$, *entonces puede escogerse un número finito de intervalos abiertos de la colección* $\{\mathfrak{J}_\alpha\}$ *de tal forma que* $[a, b]$ *quede cubierto por la nueva colección finita.*

PRUEBA. Sea $\mathfrak{S}$ el conjunto de todos los puntos $x \in [a, b]$ tales que un número finito de intervalos en $\{\mathfrak{J}_\alpha\}$ cubra a $[a, x]$. Como a está en algún intervalo de $\{\mathfrak{J}_\alpha\}$, $[a, a]$ está cubierto por un número finito de intervalos (en realidad, por un intervalo) de $\{\mathfrak{J}_\alpha\}$. Así pues, $a \in \mathfrak{S}$ e $\mathfrak{S}$ es, por tanto, no nulo. Además, $\mathfrak{S}$ está superiormente acotado (b es una cota superior de $\mathfrak{S}$). Luego, por el axioma del supremo, $\mathfrak{S}$ tiene un supremo, llamémosle c. El punto $c \in [a, b]$ y, por tanto, pertenece a algún intervalo $\mathfrak{J}_c$ de $\{\mathfrak{J}_\alpha\}$. Según el problema 10 de la sección 2, pág. 425, existe un punto $x_0 \in \mathfrak{S}$ tal que $x_0 \in \mathfrak{J}_c$. Como $x_0 \in \mathfrak{S}$, una colección finita de intervalos de $\{\mathfrak{J}_\alpha\}$ cubre $[a, b]$. Si añadimos $\mathfrak{J}_c$ a esta colección finita, entonces tenemos una colección finita de intervalos abiertos de $\{\mathfrak{J}_\alpha\}$ que cubre a $[a, x_1]$ donde $x_1 \in \mathfrak{J}_c$ y $x_1 > c$. Como $c = \sup \mathfrak{S}$, x_1 no puede estar en $\mathfrak{S}$, luego no puede estar en $[a,b]$. Por tanto $x_1 > b$. Así pues, tenemos $[a, b] \subset [a, x_1]$ y $[a, x_1]$ está cubierto por una colección finita de $\{\mathfrak{J}_\alpha\}$. Esto demuestra que $[a, b]$ está cubierto por una colección finita de intervalos de $\{\mathfrak{J}_\alpha\}$.

Problemas

1. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los enteros positivos. Consideremos el

conjunto de intervalos abiertos $\{\mathfrak{J}_n\}$ donde n es un entero positivo cualquiera y

$$\mathfrak{J}_n = \left\langle n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n} \right\rangle .$$

¿Cubre a $\mathcal{S}$ la colección $\{\mathfrak{J}_n\}$? En caso afirmativo, ¿puede escogerse un número finito de intervalos de $\{\mathfrak{J}_n\}$ de tal modo que cubra a $\mathcal{S}$?

2. Sea $\mathcal{S} = [0, 1\rangle$ y $\{\mathfrak{J}_x\}$ un conjunto de intervalos abiertos tales que para cada $x \in [0, 1\rangle$

$$\mathfrak{J}_x = \langle x - \tfrac{2}{10}, x \rangle .$$

¿Cubre $\{\mathfrak{J}_x\}$ a $\mathcal{S}$? En caso afirmativo, ¿cubre a $\mathcal{S}$ un subconjunto finito de $\{\mathfrak{J}_x\}$?

3. Sea $\mathcal{S} = [a, b]$ y sea δ un número positivo. Si $\{\mathfrak{J}_x\}$ es una colección de intervalos abiertos tales que para cada $x \in [a, b]$

$$\mathfrak{J}_x = \langle x - \delta, x + \delta \rangle$$

¿cubre $\{\mathfrak{J}_x\}$ a $\mathcal{S}$? En caso afirmativo, ¿cubre a $\mathcal{S}$ un subconjunto finito de $\{\mathfrak{J}_x\}$?

6. CONTINUIDAD UNIFORME

De acuerdo con la definición dada en el capítulo precedente, una función f es continua sobre un conjunto $\mathcal{S}$ (contenido en $\mathfrak{D}_f$) si para cada $x \in \mathcal{S}$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para todo $y \in \langle x - \delta, x + \delta \rangle \cap \mathcal{S}$. En general, este número δ depende tanto de x como de ε. Si podemos encontrar un δ que depende sólo de ε y no del punto particular $x \in \mathcal{S}$, entonces decimos que f es uniformemente continua en $\mathcal{S}$.

La noción de continuidad uniforme no se usará hasta que lleguemos a la integración. Pero la introducimos aquí porque un teorema sobre la continuidad uniforme es una de las más importantes aplicaciones del teorema de Heine-Borel.

6.1 Definición. *La función f es **uniformemente continua** sobre un conjunto $\mathcal{S}$ contenido en $\mathfrak{D}_f$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathcal{S}$*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ siempre que } y \in \langle x - \delta, x + \delta \rangle \cap \mathcal{S} .$$

Ilustraremos esta definición con algunos ejemplos.

6.2 Ejemplo. ¿Es I^2 uniformemente continua en R?

SOLUCIÓN. Tomemos $\varepsilon > 0$. Deseamos determinar si existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in \text{R}$ y para todo $y \in \langle x-\delta, x+\delta \rangle$,

$$|I^2(x)-I^2(y)| = |x^2-y^2| = |x+y|\,|x-y| < \varepsilon.$$

Parece claro que para todo $x \in \text{R}$ podemos encontrar un $\delta(x) > 0$ tal que

$$\text{si } |x-y| < \delta(x) \text{ entonces } |x+y|\,|x-y| < \varepsilon.$$

Sin embargo, la elección de $\delta(x)$ dependerá de cual sea el punto particular $x \in \text{R}$. A medida que x se hace mayor en valor absoluto $\delta(x)$ debe escogerse más pequeño (figura 4). Así pues, parece que I^2 no es uniformemente continua en R.

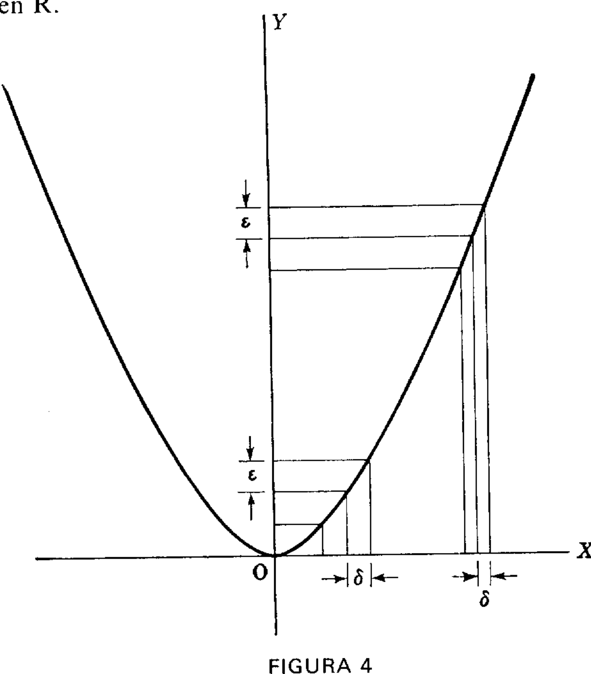


FIGURA 4

Utilizaremos un razonamiento indirecto para probar que $f = I^2$ no es uniformemente continua en R. Supongamos que para un $\varepsilon > 0$ dado, existiera un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \text{R}$

$$|f(x)-f(y)| = |x+y|\,|x-y| < \varepsilon$$

siempre que $|x-y| < \delta$. Tomemos ahora $x = \dfrac{\varepsilon}{\delta}$ y $y = x + \dfrac{\delta}{2}$. Entonces

$$|f(x)-f(y)| = (x+y)\,|x-y| = \left(2x + \frac{\delta}{2}\right)\frac{\delta}{2} > 2x \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{2\varepsilon}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

Esta contradicción muestra que nuestra hipótesis no puede verificarse y que, por tanto, f no es uniformemente continua en R.

6.3 Ejemplo. ¿I^2 es uniformemente continua en $\langle 0, 2\rangle$?

SOLUCIÓN. Tómese $\varepsilon > 0$. Deseamos determinar si existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in \langle 0, 2\rangle$ y para todo $y \in \langle x-\delta, x+\delta\rangle \cap \langle 0, 2\rangle$,

$$|I^2(x)-I^2(y)| = |x^2-y^2| = |x+y|\,|x-y| < \varepsilon.$$

En este caso, como x y y pertenecen a $\langle 0, 2\rangle$, $|x+y|$ no puede crecer arbitrariamente. De donde parece que podemos suponer que es posible encontrar un δ con tal propiedad y que, por consiguiente, I^2 es uniformemente continua en $\langle 0, 2\rangle$. Demostraremos ahora que tal es el caso.

Si x y y pertenecen a $\langle 0, 2\rangle$ entonces

$$|I^2(x)-I^2(y)| = |x+y|\,|x-y| < 4|x-y|.$$

Así pues, si $\delta = \varepsilon/4$, para todo $x \in \langle 0, 2\rangle$ y para todo $y \in \langle x-\delta, x+\delta\rangle \cap \langle 0, 2\rangle$

$$|I^2(x)-I^2(y)| < 4|x-y| < \varepsilon.$$

Por tanto, f es uniformemente continua en $\langle 0, 2\rangle$.

6.4 Ejemplo. ¿$I^{-1} = \dfrac{1}{I}$ es uniformemente continua en $\langle 0, 2\rangle$?

SOLUCIÓN. Tomemos $\varepsilon > 0$. Deseamos determinar si existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \langle 0, 2\rangle$ y para todo $y \in \langle x-\delta, x+\delta\rangle \cap \langle 0, 2\rangle$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{xy} < \varepsilon.$$

Como I^{-1} es continua en $\langle 0, 2\rangle$, para cada $x \in \langle 0, 2\rangle$ existe un $\delta(x) > 0$ tal que si $y \in \langle x-\delta(x), x+\delta(x)\rangle \cap \langle 0, 2\rangle$ entonces

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{xy} < \varepsilon.$$

Sin embargo, a medida que x se hace más pequeño, $\delta(x)$ debe escogerse más pequeño (figura 5). Puede pues esperarse que f no sea uniformemente continua en $\langle 0, 2\rangle$. Supongamos ahora que f es uniformemente continua en $\langle 0, 2\rangle$. Entonces para $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda $x \in \langle 0, 2\rangle$ y toda $y \in \langle x-\delta, x+\delta\rangle \cap \langle 0, 2\rangle$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{xy} < \varepsilon.$$

Tomemos $x \in \left\langle 0, \dfrac{\delta}{4\varepsilon} \right\rangle \cap \langle 0, 2\rangle$ y $y \in \langle 0, 2\rangle$ tal que $\delta/2 < |x-y| < \delta$. (Para asegurarnos de que tal número y existe, suponemos $\delta < 1$. Lo que no constituye ninguna restricción.) Entonces

$$\frac{|y-x|}{xy} > \frac{\delta/2}{\dfrac{\delta}{4\varepsilon}\cdot 2} = \varepsilon.$$

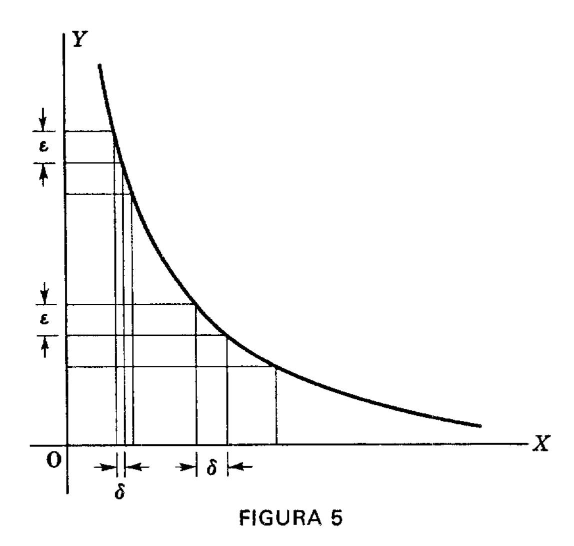


FIGURA 5

Esto contradice nuestro supuesto y concluimos, por tanto, que f no es uniformemente continua en $\langle 0, 2\rangle$.

Es fácil ver que, si $\mathcal{S}$ es uniformemente continua sobre un conjunto $\mathcal{S}$, entonces f es continua sobre $\mathcal{S}$. Que lo recíproco no es cierto, en general se muestra en el ejemplo 6.4. Sin embargo, si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces es uniformemente continua en $[a, b]$.

6.5 Teorema. *Si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua sobre $[a, b]$.*

PRUEBA. Tómese $\varepsilon > 0$. Deseamos demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in [a, b]$ y para todo $y \in \langle x-\delta, x+\delta\rangle \cap [a, b]$, $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Como f es continua sobre $[a, b]$, para cada $x \in [a, b]$ existe un número positivo, al que denotaremos por $\delta(x)$ para enfatizar su dependencia de x, tal que siempre que $y \in \langle x-\delta(x), x+\delta(x)\rangle \cap [a, b]$

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2.$$

Podría pensarse en tomar como δ el ínf $\{\delta(x) | x \in [a, b]\}$. Sin embargo, esto no funcionaría ya que tal ínfimo puede ser 0. Lo que haremos es emplear el teorema de Heine-Borel para obtener un conjunto finito de números positivos y tomar como δ el elemento mínimo de este conjunto finito.

Denotemos por $\mathfrak{J}(x; \delta(x))$ al intervalo abierto $\langle x-\delta(x), x+\delta(x)\rangle$ y por $\mathfrak{J}\left(x; \frac{\delta(x)}{2}\right)$ a $\left\langle x - \frac{\delta(x)}{2}, x + \frac{\delta(x)}{2}\right\rangle$. El conjunto de intervalos abiertos $\left\{\mathfrak{J}\left(x; \frac{\delta(x)}{2}\right) | x \in [a, b]\right\}$ cubre a $[a, b]$. Luego por el teorema de Heine-Borel, un subconjunto infinito $\left\{\mathfrak{J}\left(x_k; \frac{\delta(x_k)}{2}\right) | k = 1, \ldots, n\right\}$ cubre a $[a, b]$. Sea δ el mínimo de los números $\frac{\delta(x_k)}{2}$, $k = 1, \ldots, n$. Entonces δ es positivo.

Tomemos ahora dos puntos cualesquiera x y y en $[a, b]$ tales que $|x-y| < \delta$. Como $\left\{\mathfrak{J}\left(x_k; \frac{\delta(x_k)}{2}\right) | k = 1, \ldots, n\right\}$ cubre a $[a, b]$, $x \in \mathfrak{J}\left(x_k; \frac{\delta(x_k)}{2}\right)$ para algún $k (k = 1, \ldots, n)$. Además

$$|y-x_k| = |y-x+x-x_k| \leqslant |y-x|+|x-x_k| < \delta + \frac{\delta(x_k)}{2} \leqslant \delta(x_k).$$

Por tanto, ambos, x y y están en $\mathfrak{J}(x_k; \delta(x_k))$ y por tanto

$$|f(x)-f(x_k)| < \varepsilon/2$$

y

$$|f(y)-f(x_k)| < \varepsilon/2.$$

Luego

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= |f(x)-f(x_k)+f(x_k)-f(y)| \\ &\leqslant |f(x)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(y)| \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Así pues, para cualquier $\varepsilon > 0$ hemos demostrado que existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in [a, b]$

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

siempre que $y \in \langle x-\delta, x+\delta\rangle \cap [a, b]$. Esto completa la prueba.

Problemas

1. Demuéstrese que la función idéntica I es uniformemente continua en R.

2. Demuéstrese que $I^{-1} = \frac{1}{I}$ es uniformemente continua en $[a, \infty]$ donde $a > 0$.

3. Demuéstrese que si existe un número positivo M tal que, para x y y en $\mathcal{S}$ cualesquiera,

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y|$$

entonces f es uniformemente continua sobre $\mathcal{S}$.

4. Las siguientes funciones f son uniformemente continuas sobre los conjuntos $\mathcal{S}$ dados. Para $\varepsilon > 0$, determínese un $\delta > 0$ específico tal que para todo $x \in \mathcal{S}$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ siempre que } y \in \langle x - \delta, x + \delta \rangle \cap \mathcal{S}.$$

a) I^3; $\mathcal{S} = [0, 2]$ *b*) $I^{1/2}$; $\mathcal{S} = [2, 4]$.

5. Demuéstrese que si $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ y f es uniformemente continua sobre $\mathcal{S}$, entonces f es uniformemente continua sobre $\mathcal{T}$.

6. ¿Es la función f definida por $f(x) = x^3$ uniformemente continua sobre $\langle 0, 3 \rangle$?

7. Si f y g son uniformemente continuas sobre un conjunto $\mathcal{S}$, muéstrese que $f + g$ es uniformemente continua sobre $\mathcal{S}$.

7. ALGUNOS TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS

Probaremos ahora algunos teoremas importantes sobre funciones continuas. Primero damos algunas definiciones.

7.1 Definición. *Una función f se dice que está* ***acotada superiormente***, ***acotada inferiormente***, *o* ***acotada*** *sobre un conjunto $\mathcal{S}$ contenido en el dominio de la función si el conjunto de valores de la función, $\{f(x) \mid x \in \mathcal{S}\}$, es superiormente acotado, inferiormente acotado o acotado, respectivamente.*

7.2 Definición. *El* ***supremo*** *de f en $\mathcal{S}$, denotado por $\sup_{\mathcal{S}} f$, es el supremo del conjunto $\{f(x) \mid x \in \mathcal{S}\}$.*

7.3 Definición. *El* ***ínfimo*** *de f en $\mathcal{S}$, denotado por $\inf_{\mathcal{S}} f$, es el ínfimo del conjunto $\{f(x) \mid x \in \mathcal{S}\}$.*

7.4 Teorema. *Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es acotada sobre $[a, b]$.*

PRUEBA. Tómese $x \in [a, b]$. Como f es continua en x, existe un número $\delta(x) > 0$ tal que siempre que $y \in [a, b] \cap \langle x - \delta(x), x + \delta(x) \rangle$ entonces

$$|f(y) - f(x)| < 1$$

o

7.5 $$|f(y)| < |f(x)0 + 1$$

por la desigualdad del triángulo. Escribimos $\delta(x)$ en lugar de δ para señalar explícitamente que δ depende de x. Denotemos el intervalo abierto $\langle x-\delta(x), x+\delta(x)\rangle$ por $\mathfrak{J}(x; \delta(x))$. La colección $\{\mathfrak{J}(x; \delta(x)) \mid x \in [a, b]\}$ cubre $[a, b]$. Entonces, por el teorema de Heine-Borel, una colección finita de estos intervalos abiertos cubre a $[a, b]$, digamos $\{\mathfrak{J}(x_k; \delta(x_k)) \mid k = 1, \ldots, n\}$. Si M es el mayor de los números $|f(x_k)|+1$, $k = 1, \ldots, n$, entonces para todo $y \in [a, b]$, $|f(y)| < M$. Para ver que esto es cierto tomemos un $y \in [a, b]$. Entonces $y \in \mathfrak{J}(x_k; \delta(x_k))$ para algún k entre 1 y n. Usando 7.5, obtenemos

$$|f(y)| < |f(x_k)|+1 \leqslant M.$$

Luego f es acotada sobre $[a, b]$.

Nótese el papel jugado por el teorema de Heine-Borel en esta prueba. La función f es acotada sobre cada intervalo $\mathfrak{J}(x; \delta(x))$ por $|f(x)|+1$. Como una cota para la función f sobre el intervalo total $[a, b]$ no podemos tomar

$$\sup \{|f(x)|+1 \mid x \in [a, b]\}$$

ya que este supremo puede que no exista. Por el teorema de Heine-Borel obtenemos un número finito de intervalos que cubren a $[a, b]$. Entonces el mayor elemento del conjunto $\{|f(x_k)|+1 \mid k = 1, \ldots, n\}$ será una cota para f sobre el intervalo total $[a, b]$.

Si una función es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es acotada sobre este intervalo y, por tanto, tiene un supremo y un ínfimo sobre $[a, b]$. Una pregunta de interés: ¿alcanza la función su ínfimo y su supremo sobre $[a, b]$? Es decir, ¿son el supremo y el ínfimo del conjunto $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ elementos del conjunto? Se contesta a ello en el siguiente teorema.

7.6 Teorema. *Si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existen puntos x_0 y x_1 en $[a, b]$ tales que $f(x_0) = \sup_{[a,b]} f$ y $f(x_1) = \inf_{[a,b]} f$.*

PRUEBA. Demostraremos que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \sup_{[a,b]} f$ por medio de una prueba indirecta. La prueba de la otra parte del teorema es análoga y se deja al estudiante (problema 3).

Sea $M = \sup_{[a,b]} f$ y supongamos que para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \neq M$. Entonces la función $g = \dfrac{1}{M-f}$ es continua sobre $[a, b]$ (teorema 6.4 del capítulo 8, pág. 366). Por tanto, según el teorema 7.4, g es acotada sobre $[a, b]$ y, por tanto, existe un número positivo c tal que

$$|g(x)| = \frac{1}{M-f(x)} \leqslant c$$

para todo $x \in [a, b]$. De modo que, para todo $x \in [a, b]$,

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{c}.$$

Esto contradice el hecho de que $M = \sup_{[a,b]} f$. Luego nuestro supuesto no puede verificarse. Es decir, existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = M = \sup_{[a,b]} f$.

El teorema 6.7 nos dice que, sobre un intervalo cerrado, una función continua alcanza su supremo y su ínfimo al menos en un punto. Desde luego, puede alcanzar estas cotas en más de un punto de $[a, b]$.

Los siguientes ejemplos muestran que la hipótesis de que f sea continua y la de que el intervalo sea cerrado, son, ambas, necesarias en el teorema 7.6.

La función f definida por $f(x) = x - [x]$ no alcanza a su supremo en el intervalo $[0, 1]$. Esta función no es continua sobre $[0, 1]$.

La función idéntica I no alcanza a su supremo 1 sobre $[0, 1\rangle$.

Si combinamos los resultados de los teoremas 7.6 y 4.6, pág. 435, podemos afirmar que *la imagen de un intervalo cerrado y acotado* $[a, b]$ *bajo una función continua es un intervalo cerrado y acotado:*

el intervalo $[f(x_1), f(x_0)]$ donde $f(x_1) = \inf_{[a,b]} f$ y $f(x_0) = \sup_{[a,b]} f$.

No podemos reemplazar "cerrado" por "abierto" en este enunciado; la función seno mapea $\langle 0, 2\pi \rangle$ sobre $[-1, 1]$ e I^{-1} mapea $\langle 0, 1 \rangle$ sobre $\langle 1, \infty \rangle$.

En el siguiente capítulo nos ocuparemos del problema de encontrar los valores máximo y mínimo de una función. Definimos ahora el máximo y el mínimo de una función sobre un conjunto y volveremos a dar el enunciado del teorema 7.6 en esta terminología.

7.7 Definición. *Si* $\mathcal{S}$ *es un conjunto contenido en el dominio de la función* f, *entonces se dice que* f *tiene un (valor)* ***máximo*** *sobre* $\mathcal{S}$ *si existe un elemento* $x_0 \in \mathcal{S}$ *tal que*

$$f(x_0) \geqslant f(x)$$

para todo $x \in \mathcal{S}$.

Una definición análoga puede darse para el (valor) mínimo de una función sobre un conjunto.

El teorema 7.6 puede, pues, reformularse como sigue:

7.8 *Si* f *es continua sobre el intervalo cerrado* $[a, b]$ *entonces* f *tiene un máximo y un mínimo sobre* $[a, b]$.

Problemas

1. ¿Son las siguientes funciones superiormente acotadas, inferiormente acotadas, acotadas sobre el conjunto dado $\mathcal{S}$?

a) I^2, $\mathcal{S} = \langle -3, 2 \rangle$ *b*) I^{-2}, $\mathcal{S} = \langle 0, 4]$

c) I^{-2}, $\mathcal{S} = [3, \infty\rangle$ *d*) tan, $\mathcal{S} = \langle 0, \pi/2 \rangle$.

2. Encuéntrese $\sup_S f$ e $\inf_S f$ (si existen) para las funciones y conjuntos dados en el problema 1.

3. Pruébese que: si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ existe un punto $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x_1) = \inf_{[a,b]} f$.

4. ¿Tiene la función f definida por $f(x) = |x|$ un máximo y un mínimo en el intervalo abierto $\langle -1, 1 \rangle$?

5. Encuéntrense los valores máximo y mínimo de la función f sobre $[0, 3]$ cuando f está definida por

a) $f(x) = 3x+a$ *b*) $f(x) = -x$

c) $f(x) = 4x^2+8x-2$ *d*) $f(x) = x^2-4x+5$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$ *f*) $f(x) = x^3+2x-5$.

6. Pruébese que: si f y g son acotadas sobre S y, para todo $x \in S$, $f(x) \leqslant g(x)$, entonces

$$\inf_S f \leqslant \inf_S g \quad \text{y} \quad \sup_S f \leqslant \sup_S g.$$

7. Pruébese que: si f está acotado sobre S y c es una función constante, entonces

$$\sup_S (cf) = c \sup_S f \quad \text{e} \quad \inf_S (cf) = c \inf_S f \quad \text{si } c > 0$$

y

$$\sup_S (cf) = c \inf_S f \quad \text{e} \quad \inf_S (cf) = c \sup_S f \quad \text{si } c < 0.$$

8. Pruébese que: si f y g son acotadas sobre S, entonces

$$\sup_S (f+g) \leqslant \sup_S f + \sup_S g$$

e

$$\inf_S (f+g) \geqslant \inf_S f + \inf_S g.$$

8. RESUMEN

En este capítulo hemos completado nuestra discusión de los axiomas para el sistema de los números reales introduciendo el axioma del supremo. Las consecuencias de este axioma nos dan una buena imagen de la estructura del sistema de los números reales. Por ejemplo, sabemos ahora que cualquier número real se encuentra entre dos enteros consecutivos y que entre dos números reales distintos hay infinitos números racionales e infinitos números irracionales.

El axioma del supremo nos permite también establecer propiedades globales de funciones continuas. Ejemplos de tales propiedades son la

propiedad del valor intermedio y el hecho de que una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ es uniformemente continua y acotada sobre $[a, b]$ y tiene un máximo y un mínimo en $[a, b]$.

El teorema de Heine-Borel es de importancia para nosotros como un instrumento más que por sí mismo. Con frecuencia es conveniente usar este teorema en lugar del axioma del supremo.

Problemas de repaso

1. Si a y b son dos números positivos cualesquiera, demuéstrese que existe un entero positivo n tal que $a < 2^n b$.

2. Determínese el sup $\mathcal{S}$ y el ínf $\mathcal{S}$ cuando

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{2^n} \,\middle|\, n, \text{ un entero positivo cualquiera} \right\}.$$

Verifíquese que las contestaciones dadas satisfacen las definiciones de sup $\mathcal{S}$ e ínf $\mathcal{S}$. ¿Tiene $\mathcal{S}$ un elemento máximo y un elemento mínimo?

3. Hágase lo mismo que en el problema 2 cuando

$$\mathcal{S} = \left\{ 1+(-1)^n \frac{1}{2^n} \,\middle|\, n, \text{ un entero positivo} \right\}.$$

4. Demuéstrese que si el ínfimo c de un conjunto $\mathcal{S}$ es un elemento de $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S}$ tiene un elemento mínimo y c es el elemento mínimo.

5. Demuéstrese que si el ínfimo c de un conjunto $\mathcal{S}$ no es un elemento de $\mathcal{S}$, entonces c es un punto de acumulación de $\mathcal{S}$.

6. Demuéstrese que el rango de la función tangente es el total de la recta $\langle -\infty, \infty \rangle$.

7. ¿Cuál es el rango de la función secante?

8. Obténganse las raíces de la ecuación

$$x^2+2x-2 = 0$$

con un error menor que 0.01.

9. Sea $\mathcal{S} = \langle 1, 2 \rangle$ y $\mathfrak{J}_x = \langle x-\delta, x+\delta \rangle$ donde δ es un número positivo. ¿Cubre a $\mathcal{S}$ el conjunto de los intervalos abiertos $\{\mathfrak{J}_x \mid x \in \langle 1, 2 \rangle\}$? En caso afirmativo, ¿cubre a $\mathcal{S}$ un subconjunto finito de $\{\mathfrak{J}_x \mid x \in \langle 1, 2 \rangle\}$?

***10.** Pruébese que si f es uniformemente continua sobre el intervalo abierto $\langle a, b \rangle$ entonces f es acotada en $\langle a, b \rangle$.

Capítulo

$f'(x)$ 10

Aplicaciones de la derivada

1. INTRODUCCIÓN

Cuando la derivada se introdujo por primera vez en el capítulo 8 discutimos su interpretación como velocidad de una partícula y como una función que nos daba la pendiente de una curva. En este capítulo damos algunas aplicaciones más de la derivada, así como la fundamentación teórica necesaria para estas aplicaciones. La determinación de los valores del máximo y el mínimo y el problema del trazado de la gráfica de una función son los problemas fundamentales que aquí consideraremos.

2. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

El teorema 7.6 del capítulo 9, pág. 444, afirma que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un máximo y un mínimo en el intervalo. Sin embargo, este teorema no nos da un método para encontrar los valores del máximo y el mínimo. El problema de determinar estos valores se considerará en esta sección.

Las nociones de valores máximo y mínimo relativos de una función son útiles en la solución de este problema. Una función tiene un máximo relativo en el punto c si $f(c)$ es mayor que o igual al valor de la función en cada uno de los puntos de una vecindad de c. Una vecindad de un punto se define como sigue:

2.1 Definición. *Una* ***vecindad*** *de x denotada por $\mathcal{N}(x)$ es un intervalo abierto que contiene a x.*

Entonces, la definición de máximo relativo es:

2.2 Definición. *Una función f tiene un* ***máximo relativo*** *en un punto c si existe una vecindad de c, $\mathcal{N}(c)$, tal que para todo x en $\mathcal{N}(c)$ y en el dominio de f*

$$f(x) \leqslant f(c).$$

Un número tal $f(c)$ se llama (valor) *máximo relativo* de la función. Un (valor) *mínimo relativo* de la función se define de un modo análogo.

2.3 Definición. *Los* ***valores extremos*** *de una función son los máximos y mínimos relativos de la función.*

Si f es la función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ con la gráfica que se ilustra en la figura 1, entonces f tiene máximos relativos en los

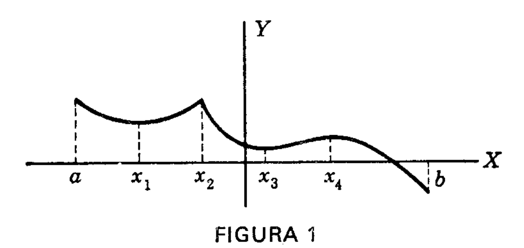


FIGURA 1

valores a, x_2, y x_4, y mínimos relativos en x_1, x_3, y b. Nótese que en este ejemplo los valores extremos aparecen o en los puntos extremos del intervalo o en puntos donde la derivada es cero (la recta tangente es horizontal) o en puntos donde la derivada no existe. La geometría de las curvas sugiere que éstas son las únicas posibilidades.

2.4 Teorema. *Si* 1), *la función f tiene un valor extremo en c*; 2), *f está definida en una vecindad de c; y* 3), *$f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.*

PRUEBA. Supongamos que f tiene un máximo relativo en c. (La prueba para el caso en que lo que f tiene es un mínimo relativo es análoga.) Existe un número $\eta > 0$ tal que f está definido sobre $\langle c-\eta, c+\eta\rangle$ y, para todo $x \in \langle c-\eta, c+\eta\rangle$, $f(x) \leqslant f(c)$. Luego para todo $h \in \langle 0, \eta\rangle$,

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0$$

y, por tanto, $f'^{+}(c) \leqslant 0$. Para todo $h \in \langle -\eta, 0\rangle$, tenemos

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0$$

y, por tanto, $f'^{-}(c) \geqslant 0$. Como $f'(c)$ existe por hipótesis, $f'^{+}(c) = f'^{-}(c)$ y, por tanto, $f'(c) = 0$.

Este teorema confirma nuestra conjetura. Es una consecuencia inmediata del teorema que los valores extremos de una función definida sobre un intervalo pueden aparecer solamente en 1) puntos donde la derivada es cero, 2) puntos donde la derivada no está definida, o 3) puntos extremos del intervalo si es que pertenecen al intervalo. Tales puntos se llaman puntos críticos.

2.5 Definición. *Los* ***puntos críticos*** *de una función definida sobre un intervalo son los puntos del intervalo donde la derivada o es cero o no existe, y también los puntos extremos del intervalo si es que pertenecen al intervalo.*

Nótese, sin embargo, que una función no tiene necesariamente un valor extremo en cada punto crítico. Por ejemplo, consideremos la función I^3 sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$. La derivada de esta función es cero en 0, pero la función no tiene un valor extremo en 0 (figura 2).

Tenemos, pues, que los valores extremos de una función pueden sólo ocurrir en puntos críticos; pero no necesariamente todo punto crítico corresponde a un valor extremo de la función.

Volviendo al problema de determinar los valores máximo y mínimo de una función continua sobre un intervalo cerrado, es claro que *estos valores máximo y mínimo deben ser valores extremos, de donde sólo pueden aparecer en los puntos críticos de la función sobre el intervalo dado.* Si el número

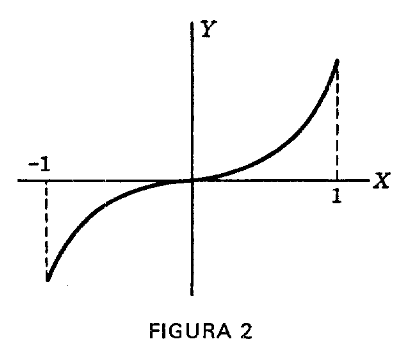


FIGURA 2

de puntos críticos es finito, como ocurrirá en todos los casos que vamos a considerar, entonces calculamos el valor de la función en cada uno de los puntos críticos y el mayor de estos números es el máximo y el menor es el mínimo.

2.6 Ejemplo. Encuéntrense los valores máximo y mínimo de la función f definida por $f(x) = x-3x^{1/3}$ sobre el intervalo $[-1, 2]$.

SOLUCIÓN. Para determinar los puntos críticos de f sobre $[-1, 2]$ encontramos la derivada de f:

$$f'(x) = 1-x^{-2/3}, \quad x \neq 0.$$

Observamos que f' deja de existir tan solo en 0 y que f' se anula tan solo en ± 1. Por tanto, los puntos críticos de f sobre el intervalo $[-1, 2]$ son -1, 0, 1, 2. Calculando el valor de f en cada uno de los puntos críticos, tenemos

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 \\ f(0) &= 0 \\ f(1) &= -2 \\ f(2) &= 2-3\sqrt[3]{2} > -2. \end{aligned}$$

Así pues, $f(-1) = 2$ es el máximo y $f(1) = -2$ es el valor mínimo de la función f sobre $[-1, 2]$.

2.7 Ejemplo. Determínense las dimensiones y el volumen de un cilindro circular recto de volumen máximo entre los inscritos en una esfera de radio a (figura 3).

SOLUCIÓN. El volumen de un cilindro circular recto de radio r y altura h es $\pi r^2 h$. Como el radio y la altura de un cilindro circular recto inscrito en una esfera de radio a satisface la relación

$$r^2 = a^2-(h/2)^2,$$

la función altura-volumen V está dada por

$$V(h) = \pi(a^2-h^2/4)h, \quad h \in [0, 2a]$$

donde $V(h)$ es el volumen del cilindro inscrito de altura h. Calculando la derivada, tenemos

$$V'(h) = \pi(a^2-\tfrac{3}{4}h^2), \quad h \in [0, 2a].$$

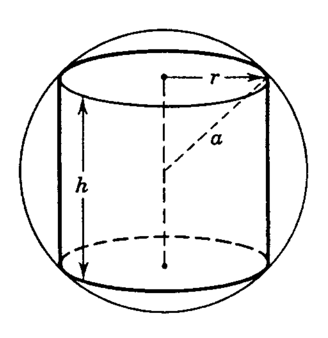


FIGURA 3

$V'(h)$ existe, pues, en todo punto de $[0, 2a]$ y es cero solamente en $h = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Por tanto, los puntos críticos son 0, $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, y $2a$.

Calculando el valor de V en estos puntos, tenemos: $V(0) = 0$, $V(2a/\sqrt{3}) = \frac{4}{3\sqrt{3}}a^3$, y $V(2a) = 0$. Así pues, el volumen mayor es $\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi a^3$ y las dimensiones del cilindro con este volumen son $h = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ y $r = \sqrt{\frac{2}{3}}a$.

Problemas

1. Determínense los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones sobre los intervalos cerrados que se señalan:

a) $f = -4I^2+8I-2$; $[0, 3]$

b) $f(x) = 1-x^{2/3}$; $[-2, 2]$

c) $f = I^4+2I^2-3$; $[-2, 2]$

d) $f(x) = \frac{1}{x+4}$; $[0, 3]$

e) $f(x) = (x+1)^{1/2}(x-2)^{1/3}$; $[0, 4]$

f) $f = 3I^3+I$; $[-1, 1]$

g) $f = \text{sen} + \cos$; $[0, 2\pi]$

h) $f(x) = x^2-|x|$; $[-1, 1]$

i) $f = \sec$; $[-\pi/4, \pi/4]$.

2. Si el dominio de f es el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f'(a) > 0$, demuéstrese que f tiene un mínimo relativo en a.

3. Si el dominio de f es el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f'(b) < 0$, demuéstrese que f tiene un mínimo relativo en b.

4. Pruébese que la intersección de dos vecindades, $\mathcal{N}_1(x)$ y $\mathcal{N}_2(x)$, de un punto x es también una vecindad de x.

5. Encuéntrense las dimensiones y el volumen de un cono circular recto de volumen máximo entre los inscritos en una esfera de radio a.

6. Encuéntrense las dimensiones y el volumen de un cilindro circular recto de volumen máximo entre los inscritos en un cono circular recto de radio **a** y altura **b**.

7. Va a construirse una caja sin tapa con una lámina cuadrada de a centímetros de lado cortando un cuadrado de lámina en cada esquina y doblando hacía arriba la lata para formar los lados de la caja. Encuéntrese la caja de volumen máximo que puede hacerse de este modo.

8. Se tiene que hacer una caja de una lámina de lata de forma rectangular de dimensiones 12.20 cm × 36.60 cm en la forma descrita en el problema 7. Encuéntrese cuál es la caja de mayor volumen que puede hacerse de este modo.

9. Encuéntrense las dimensiones del rectángulo de máxima área que puede inscribirse en una circunferencia de radio r.

10. Si la fuerza de una viga de sección rectangular varía directamente con el ancho y el cuadrado de la altura, encuéntrense las dimensiones de la viga más fuerte que puede sacarse de un tronco redondo de diámetro d.

11. Una cabaña está en el bosque a $\frac{1}{2}$ kilómetro de un camino recto y un hombre está a 2 kilómetros camino abajo del punto del camino más cercano a la cabaña. Si el hombre puede caminar 5 kilómetros/hora por el camino y 3 kilómetros/hora por el bosque, ¿donde debe dejar el camino para alcanzar la cabaña en el tiempo más corto?

12. Un hombre tiene 300 metros de alambre para cercar tres lados de un terreno de forma rectangular. El cuarto lado lo formará sobre una cerca ya existente. Encuéntrense las dimensiones del terreno de área máxima que puede cercar.

13. Un triángulo isósceles tiene lados de longitudes 8, 8, y 12. Encuéntrese el rectángulo de máxima área que puede inscribirse en el triángulo con un lado a lo largo del lado del triángulo que tiene la longitud 12.

14. Un triángulo tiene lados de longitudes 8, 10, y 12. Encuéntrese el rectángulo de máxima área que puede inscribirse en el triángulo con un lado a lo largo de aquel lado del triángulo que tiene longitud 12.

***15.** En un almacén se va a abrir un pasillo perpendicular a uno ya existente de 8 metros de ancho. ¿Qué ancho debe darse al pasillo para que una varilla de acero de 27 metros de largo pueda moverse de un pasillo a otro en una posición horizontal?

3. EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

En la sección anterior desarrollamos un método para encontrar los valores máximo y mínimo de una función continua sobre un intervalo cerrado usando los puntos críticos de la función. Para los propósitos de dibujar la gráfica de una función, y también para encontrar el máximo y el mínimo de una función que no está restringida a un intervalo cerrado es conveniente desarrollar criterios que nos permitan comprobar si un punto crítico es un punto máximo o mínimo relativo de la función. El desarrollo de un tal criterio va a depender del teorema del valor medio.

Probaremos primero un caso particular del teorema del valor medio llamado teorema de Rolle.

3.1 Teorema. (Teorema de Rolle.) *Supongamos que f es continua en $[a, b]$ donde $a < b$, y diferenciable en $\langle a, b\rangle$ y $f(a) = 0 = f(b)$. Entonces existe un punto $c \in \langle a, b\rangle$ tal que $f'(c) = 0$.*

Geométricamente, el teorema de Rolle es ciertamente plausible. Si la gráfica de una función continua cruza el eje X en dos puntos y tiene una tangente en todo punto entre estos dos, debe entonces tener una tangente horizontal en algún punto intermedio (figura 4). Nótese que el teorema de Rolle asegura la existencia de al menos un punto con tangente horizontal. Puede que haya más de un tal punto.

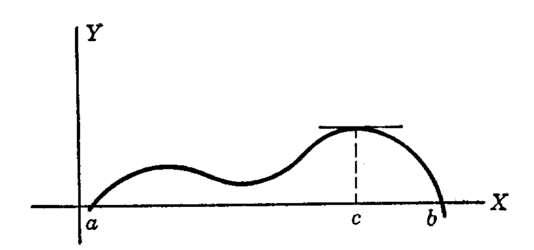


FIGURA 4

PRUEBA DE 3.1. Si $f(x) = 0$ para todo $x \in \langle a, b \rangle$, entonces escoger como c cualquier punto de $\langle a, b \rangle$ (ejemplo 8.6 del capítulo 8, pág. 378).

Si $f(x) > 0$ para algún $x \in \langle a, b \rangle$, sea c un punto sobre $[a, b]$ donde f alcance su máximo (7.8, pág. 445). Entonces, como $f(c) > 0$ mientras que $f(a) = 0 = f(b)$, tenemos que $c \in \langle a, b \rangle$. Como f está definido en la vecindad $\langle a, b \rangle$ de c y $f'(c)$ existe, por el teorema 2.4 tenemos $f'(c) = 0$.

Si $f(x) < 0$ para algún $x \in \langle a, b \rangle$, hacemos que c sea un punto de $[a, b]$ donde f tome su valor mínimo. Entonces, razonando como en el caso anterior vemos que $f'(c) = 0$.

La condición de que f' exista en todo punto de $\langle a, b \rangle$ es necesaria para la validez del teorema de Rolle. La función f definida por $f(x) = 1 - |x|$ satisface todas las condiciones del teorema de Rolle sobre el intervalo $[-1, 1]$, excepto que f' no existe en 0 (figura 5). Es claro que f' no es igual a cero en ningún punto del intervalo $\langle -1, 1 \rangle$.

El hecho de que f deba ser continua sobre $[a, b]$ para que el teorema de Rolle sea válido, queda demostrado por la función definida por $f(x) = x - [x]$ en el intervalo $[0, 1]$. Esta función tiene derivada igual a 1 en $\langle 0, 1 \rangle$ y

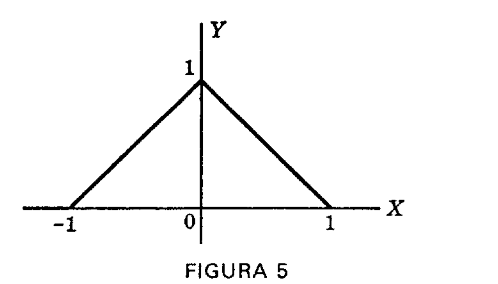


FIGURA 5

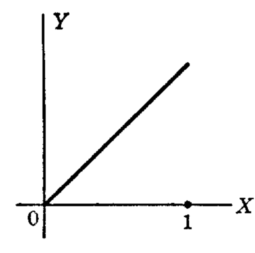


FIGURA 6

satisface todas las condiciones del teorema de Rolle, excepto que no es continua en 1 (figura 6).

Usando ahora el teorema de Rolle podemos probar el teorema del valor medio muy fácilmente.

3.2 Teorema. (Teorema del valor medio.) *Si f es continua en $[a, b]$ donde $a < b$ y diferenciable sobre $\langle a, b\rangle$, entonces existe un punto $c \in \langle a, b\rangle$ tal que*

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c).$$

La expresión $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que une los puntos $\mathbf{A} = (a, f(a))$ y $\mathbf{B} = (b, f(b))$ (figura 7). Así pues, el teorema del valor medio afirma que, si la gráfica de una función tiene una tangente en cada punto entre a y b, la pendiente de la tangente en algún punto entre a y b debe ser la misma que la pendiente de la recta que une **A** y **B**.

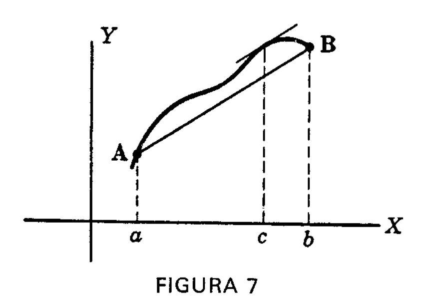


FIGURA 7

PRUEBA DE 3.2. Introducimos una nueva función g que satisface las condiciones del teorema de Rolle, definida por

$$g(x) = f(x)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Nótese que $g(x)$ es la diferencia entre el segundo elemento del punto $(x, f(x))$ sobre la gráfica de la función f y el segundo elemento del punto $\left(x, f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$ de la recta que contiene **A** y **B**.

Claramente $g(a) = 0 = g(b)$ y g es continua en $[a, b]$. Como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

y f es diferenciable en $\langle a, b\rangle$, g es diferenciable en $\langle a, b\rangle$. Luego, por el

teorema de Rolle, existe un punto $c \in \langle a, b \rangle$ tal que $g'(c) = 0$. Volviendo a escribir esto en términos de f, tenemos

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

o

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(c).$$

Problemas

1. Encuéntrense, para las siguientes funciones e intervalos, el número o números que pueden usarse por c en el teorema del valor medio.

a) $f = 3I+2;\ [1, 4]$

b) $f = I^2+2I;\ [0, 3]$

c) $f = I^2+4;\ [-2, 2]$

d) $f = I^3;\ [1, 3]$

e) $f = \cos;\ [0, \pi/2]$.

2. Demuéstrese que si una partícula se mueve sobre una línea recta y vuelve a su posición original, entonces su velocidad debe ser cero en algún momento. Es una hipótesis física que la función de posición de una partícula en movimiento es diferenciable en todo instante.

3. Demuéstrese que sen $x \leqslant x$ para todo $x \in [0, \infty\rangle$. (*Sugerencia*: aplíquese el teorema del valor medio a la función $f =$ sen $-I$ sobre el intervalo $[0, x]$.)

4. Pruébese que si f' existe sobre un intervalo abierto $\langle a, b \rangle$ y es acotada sobre este intervalo, entonces f es uniformemente continua sobre $\langle a, b \rangle$.

4. APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si la derivada de una función es cero sobre cada uno de los puntos de un intervalo, entonces la gráfica de la función tiene una tangente horizontal en cada punto del intervalo y parecería que la función debe ser constante en el intervalo. La consideración de la derivada de la función en un punto nos da solo una información "local", es decir, una información acerca de la función en una vecindad del punto. De esta información local en cada punto de un intervalo queremos deducir una propiedad "global" de la función, es decir, una propiedad de la función sobre el intervalo. El teorema del valor medio es la herramienta que nos permite establecer la deducción deseada.

4.1 Teorema. *Si* $f' = 0$ *sobre un intervalo* $\mathfrak{J}$, *entonces* f *es una constante sobre* $\mathfrak{J}$.

PRUEBA. Supongamos que $\mathfrak{J}$ consiste de al menos dos puntos; en otro caso el teorema es trivial. Sean x_1 y x_2 puntos de $\mathfrak{J}$ tales que $x_1 < x_2$. Entonces, según el teorema 8.10 del capítulo 8, pág. 379, f es continua en $[x_1, x_2]$. Es claro, además, que f es diferenciable en $\langle x_1, x_2 \rangle$. Usando el teorema del valor medio

$$f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)f'(c), \text{ para algún } c \in \langle x_1, x_2 \rangle .$$

Por tanto, $f(x_2)-f(x_1) = 0$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Como x_1 y x_2 son dos puntos cualesquiera de $\mathfrak{J}$, f ha de ser una constante en $\mathfrak{J}$.

Una consecuencia inmediata de este teorema que es de importancia en las ecuaciones diferenciales (véase pág. 405) es la siguiente.

4.2 Corolario. *Si f y g son diferenciables sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y $f' = g'$ sobre $\mathfrak{J}$, entonces existe una constante k tal que*

$$f = g + k \quad (\text{sobre } \mathfrak{J}).$$

Dejamos para el estudiante la prueba de este corolario (problema 3).

Si la derivada de una función no cambia de signo en un intervalo, entonces esto nos da información concerniente al carácter de la función. Por ejemplo, si la derivada de una función es positiva en todos los puntos de un intervalo, entonces la gráfica de la función tiene una tangente con pendiente positiva en cada punto y es de esperar que la función sea creciente en el intervalo. Después de definir algunos términos, probaremos un problema de esta naturaleza.

4.3 Definición. *Una función f se dice que es* ***no decreciente*** *sobre un conjunto $\mathcal{S}$ si $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ para x_1 y x_2 cualesquiera en $\mathcal{S}$ tales que $x_1 < x_2$.*

4.4 Definición. *Una función f se dice que es* ***creciente*** *sobre un conjunto $\mathcal{S}$ si $f(x_1) < f(x_2)$ para todo x_1 y x_2 en $\mathcal{S}$ tales que $x_1 < x_2$.*

Nótese que si una función es creciente, entonces es no decreciente. Definiciones análogas pueden darse de funciones *no crecientes* y *decrecientes*. Dejamos al estudiante la labor de formularlas.

4.5 Definición. *Una función f se dice que es* ***monótona*** *sobre un conjunto $\mathcal{S}$ si es o no decreciente o no creciente en $\mathcal{S}$.*

4.6 Teorema. *Si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y $f'(x) \geqslant 0$ en todo punto interior de $\mathfrak{J}$, entonces f es no decreciente sobre $\mathfrak{J}$.*

PRUEBA. Sean x_1 y x_2 en $\mathfrak{J}$ tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema del valor medio tenemos

$$f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)f'(c) \text{ para algún } c \in \langle x_1, x_2 \rangle .$$

Entonces

$$f(x_2)-f(x_1) \geqslant 0$$

y

$$f(x_2) \geqslant f(x_1).$$

Como esto es cierto para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 en $\mathfrak{J}$ (donde $x_1 < x_2$), f es no decreciente sobre $\mathfrak{J}$.

4.7 Teorema. *Si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y $f'(x) \leqslant 0$ para todo punto interior de $\mathfrak{J}$, entonces f es no creciente sobre $\mathfrak{J}$.*

La prueba de este teorema es análoga a la prueba del teorema 4.6 y se deja al estudiante (problema 7).

Algunos otros teoremas análogos en naturaleza a los teoremas 4.1, 4.6 y 4.7 aparecen en la lista de problemas para esta sección.

Problemas

1. Si $f'(x) = 0$ para $x \in \langle 1, 5 \rangle$ y $f(2) = -3$, ¿qué puede decirse acerca de los valores de f sobre $\langle 1, 5 \rangle$?

2. Si $f'(x) = 0$ para $x \in \langle 1, 5 \rangle \cup \langle 7, 10 \rangle$ y $f(2) = -3$, ¿qué puede decirse de los valores de f sobre $\langle 1, 5 \rangle \cup \langle 7, 10 \rangle$?

3. Pruébese el corolario 4.2.

4. Determínense todas las soluciones de la ecuación diferencial $y'(x) = 4x$.

5. Determínese la solución de la ecuación diferencial $y'(x) = 4x$ que contiene al punto $(1, 5)$.

6. ¿Tiene la ecuación diferencial

$$y'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

una solución única que pase por el punto $(-1, 3)$? Justifíquese la respuesta.

7. Pruébese el teorema 4.7.

8. Por el problema 3 de la sección 3, pág. 457, sabemos que sen $x \leqslant x$ para $x \in [0, \infty \rangle$. Demuéstrese que

a) $\cos x \geqslant 1-\frac{1}{2}x^2$, $x \in [0, \infty\rangle$

b) sen $x \geqslant x-\frac{1}{6}x^3$, $x \in [0, \infty\rangle$

c) $\cos x \leqslant 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$, $x \in [0, \infty\rangle$

d) sen $x \leqslant x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$, $x \in [0, \infty\rangle$.

9. Pruébese el siguiente teorema: si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y $f'(x) = 0$ para todos los puntos interiores de $\mathfrak{J}$, entonces f es constante sobre $\mathfrak{J}$.

10. Pruébese el siguiente teorema: si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y $f'(x) > 0$ para todos los puntos interiores de $\mathfrak{J}$, entonces f es creciente sobre $\mathfrak{J}$.

11. Pruébese el siguiente teorema: si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y $f'(x) < 0$ para todos los puntos interiores de $\mathfrak{J}$, entonces f es decreciente sobre $\mathfrak{J}$.

***12.** Si f es continua y univalente sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ donde $a < b$, entonces f es una función o creciente o decreciente sobre $[a, b]$.

Sugerencia. Como f es univalente sobre $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$. Supongamos que $f(a) < f(b)$. Entonces f es creciente sobre $[a, b]$. Primero demostramos que $f(a)$ es el mínimo de f sobre $[a, b]$. Si existe un punto $x \in \langle a, b\rangle$ tal que $f(x) < f(a)$, entonces, por el teorema del valor intermedio existe un punto $y \in \langle x, b\rangle$ tal que $f(y) = f(a)$. Esto contradice la univalencia de f sobre $[a, b]$ y nos muestra, por tanto, que $f(a)$ es el mínimo de f sobre $[a, b]$. Supongamos ahora que existen puntos x_1 y x_2 en $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$ y $f(x_1) > f(x_2)$. Entonces, de acuerdo con el teorema del valor intermedio existe un punto $y \in \langle a, x_1\rangle$ tal que $f(y) = f(x_2)$. Esto contradice la univalencia de f sobre $[a, b]$. Por tanto, f es creciente en $[a, b]$.

5. MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS

Tenemos ahora los teoremas básicos necesarios para el desarrollo de procedimientos para determinar si un punto crítico c, que no es un punto extremo del dominio de una función f, es un máximo o un mínimo relativo de la función. En el primer método consideramos los valores de la derivada en una vecindad de c. Por ejemplo, si en una vecindad de c la derivada es positiva en puntos a la izquierda de c y es negativa en puntos a la derecha de c, entonces f es creciente a la izquierda de c y decreciente a la derecha de c (figura 8). Así pues, con tal de que f sea continua en c, f tiene un máximo relativo en c.

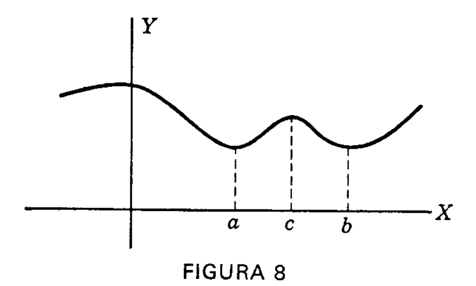


FIGURA 8

5.1 Teorema. *Si c es un punto crítico de f y si existe un intervalo $[a,b]$ con $c \in \langle a, b \rangle$ tal que f es continua sobre $[a, b]$ y*

1) *$f'(x) \geqslant 0$ para $x \in \langle a, c \rangle$ y $f'(x) \leqslant 0$ para $x \in \langle c, b \rangle$, entonces f tiene un máximo relativo en c;*

2) *$f'(x) \leqslant 0$ para $x \in \langle a, c \rangle$ y $f'(x) \geqslant 0$ para $x \in \langle c, b \rangle$, entonces f tiene un mínimo relativo en c;*

3) *$f'(x) > 0$ para $x \in \langle a, c \rangle$ y $f'(x) > 0$ para $x \in \langle c, b \rangle$ o $f'(x) < 0$ para $x \in \langle a, c \rangle$ y $f'(x) < 0$ para $x \in \langle c, b \rangle$, entonces f no tiene ni un máximo ni un mínimo relativo en c.*

PRUEBA

1) Como $f'(x) \geqslant 0$ para $x \in \langle a, c \rangle$, f es no decreciente sobre $[a, c]$ (teorema 4.6). De donde

$$f(x) \leqslant f(c) \text{ para toda } x \in \langle a, c \rangle.$$

Como $f'(x) \leqslant 0$ para $x \in \langle c, b \rangle$, f es no creciente sobre $[c, b]$ (teorema 4.7). De donde

$$f(x) \leqslant f(c) \text{ para toda } x \in \langle c, b \rangle.$$

Así pues, $f(x) \leqslant f(c)$ para toda $x \in \langle a, b \rangle$ y f tiene un máximo relativo en c.

2) La prueba de esta parte del teorema es análoga a la de la parte (1).

3) Por el problema 10 de la sección 4, si $f'(x) > 0$ para $x \in \langle a, c \rangle$ entonces f es creciente en $[a, c]$ y si $f'(x) > 0$ para $x \in \langle c, b \rangle$ entonces f es creciente en $[c, b]$. Luego f es creciente sobre $[a, b]$. Análogamente, usando el problema 11 de la sección 4, vemos que si f' es negativa a ambos lados de c entonces f es decreciente en $[a, b]$. En cualquiera de los casos, f no tiene ni un máximo ni un mínimo relativo en c.

5.2 Ejemplo. Encuéntrense los máximos y los mínimos relativos de la función f definida por

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2(x-4)^{1/3}$$

y dibújese la gráfica de la función.

SOLUCIÓN. Como

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{6}x^2(x-4)^{-2/3} + x(x-4)^{1/3}, \quad x \neq 4 \\ &= \tfrac{1}{6}(x-4)^{-2/3}[x^2 + 6x^2 - 24x] \\ &= \tfrac{1}{6}x(7x-24)(x-4)^{-2/3}, \end{aligned}$$

f' no existe en 4 y es cero en 0 y $\frac{24}{7}$. Investigando el valor de f' alrededor de estos puntos críticos, tenemos

$$f'(x) > 0, \ x \in \langle -\infty, 0 \rangle$$
$$f'(x) < 0, \ x \in \langle 0, \tfrac{24}{7} \rangle$$
$$f'(x) > 0, \ x \in \langle \tfrac{24}{7}, 4 \rangle \cup \langle 4, \infty \rangle.$$

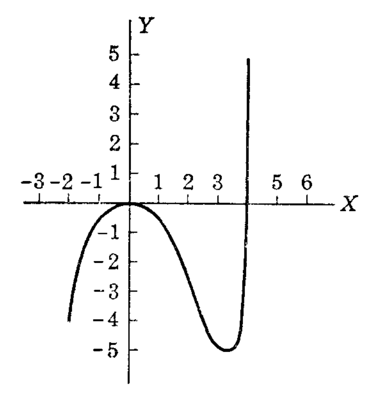


FIGURA 9

Así pues, usando el teorema 5.1, f tiene un máximo relativo en 0 y un mínimo relativo en $\frac{24}{7}$. La función f no tiene ni un máximo ni un mínimo relativos en 4 (figura 9). Nótese que esta función no tiene ni un máximo ni un mínimo absolutos.

5.3 Ejemplo. Encuéntrense los máximos y mínimos relativos de la función f definida por

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 8$$

y dibújese la gráfica de f.

SOLUCIÓN. Como

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x$$
$$= 2x(2x+1)(x+1),$$

los puntos críticos de f son -1, $-\frac{1}{2}$, y 0.

$$f'(x) < 0, \ x \in \langle -\infty, -1 \rangle$$
$$f'(x) > 0, \ x \in \langle -1, -\tfrac{1}{2} \rangle$$
$$f'(x) < 0, \ x \in \langle -\tfrac{1}{2}, 0 \rangle$$
$$f'(x) > 0, \ x \in \langle 0, \infty \rangle.$$

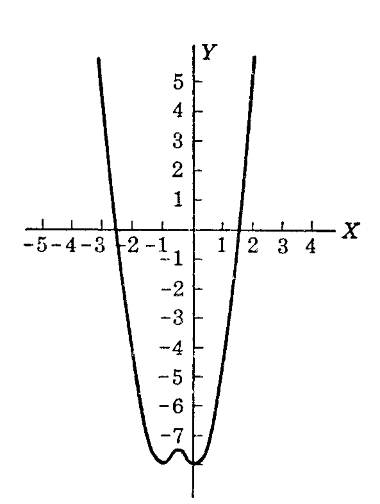


FIGURA 10

Por tanto, f tiene un mínimo relativo en -1 y 0 y un máximo relativo en $-\frac{1}{2}$ (figura 10). Esta función no tiene un máximo absoluto, pero tiene un mínimo absoluto. El mínimo absoluto, -8, lo alcanza tanto en -1 como en 0.

Los anteriores ejemplos muestran cómo una función continua, cuyo dominio no se pide, sea un intervalo cerrado puede o no tener un máximo absoluto y/o un mínimo absoluto, y vemos que el teorema 5.1 nos da un método para investigar tales problemas.

5.4 Ejemplo. Encuéntrese el número positivo tal que la suma del número y su inverso multiplicativo sea mínimo.

SOLUCIÓN. Sea $f(x) = x+1/x$, $x > 0$. Entonces $f'(x) = 1-1/x^2$, $x > 0$, y $f'(x)$ es cero solamente para $x = 1$. El único punto crítico de f en $\langle 0, \infty\rangle$ es 1.

$$f'(x) < 0, \quad x \in \langle 0, 1\rangle$$
$$f'(x) > 0, \quad x \in \langle 1, \infty\rangle.$$

Así pues, f tiene un mínimo relativo en 1. Como f es continua sobre $\langle 0, \infty\rangle$ y es decreciente a la izquierda de 1 y creciente a la derecha de 1, f debe tener un mínimo absoluto en 1.

5.5 Ejemplo. El costo por unidad en una fábrica de cámaras fotográficas es de $127. Además, los gastos generales semanales para la producción de cámaras son de $1 420. El fabricante sabe que si pone como precio p dólares por cámara y $127 \leqslant p \leqslant 375$, puede esperar una venta de $250-\frac{2}{3}p$ cámaras por semana. ¿Qué precio será el que produzca un beneficio máximo?

SOLUCIÓN. Para p por debajo de $127 es seguro que pierde dinero (el fabricante) y por encima de $375 no puede vender cámara alguna. No necesitamos pues información alguna sobre ventas por fuera del rango $127 \leqslant p \leqslant 375$. Sea $P(n)$ el beneficio producido por la venta de n cámaras a la semana a p dólares por cámara, donde p y n satisfacen la relación $n = 250-\frac{2}{3}p$, o, lo que es equivalente, $p = 375-\frac{3}{2}n$

$$\begin{aligned} P(n) &= np-1\,420-127n \\ &= -\tfrac{3}{2}n^2+248n-1\,420. \end{aligned}$$

Como P es una función definida solamente para enteros positivos, no podemos aplicar directamente los métodos del cálculo a este problema. Sin embargo, si extendemos el dominio de la función de forma que consista en todos los números reales positivos y coincida con la función original en los enteros positivos, entonces podemos usar el cálculo. Llamemos a la nueva función también P y tenemos

$$P(x) = -\tfrac{3}{2}x^2+248x-1\,420$$

y

$$P'(x) = -3x+248.$$

Luego el máximo de P ocurre en $\frac{248}{3}$, que se encuentra entre 82 y 83. Como P es creciente para x a la izquierda de $\frac{248}{3}$, el máximo de la función original P, definida solamente para enteros positivos, debe ocurrir o en 82 o en 83. Ahora bien, $P(82) =$ $8 830 y $P(83) =$ $8 830.50. Por tanto, debe establecer como precio el de $250.50 por cámara, precio con el que venderá 83 cámaras por semana.

Otro método para comprobar si los puntos críticos son puntos de máximo relativo o mínimo relativo,[1] que a veces es más fácil de aplicar aunque no tan general como el teorema 5.1, es

5.6 Teorema. *Supongamos que f es diferenciable en una vecindad $\mathcal{N}(c)$ de c, $f'(c) = 0$, y que $f''(c)$ existe.*

1) *Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en c.*
2) *Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.*

PRUEBA

1) Si

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

entonces, por el teorema 3.16 del capítulo 8, pág. 350, existe una vecindad $\langle a, b \rangle$ de c tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \frac{f'(x)}{x - c} < 0 \text{ para todo } x \in \langle a, c \rangle \cup \langle c, b \rangle.$$

Podemos suponer que $\langle a, b \rangle \subset \mathcal{N}(c)$. Entonces f es continua sobre $[a, b]$ y

$$f'(x) > 0 \text{ para todo } x \in \langle a, c \rangle$$
$$f'(x) < 0 \text{ para todo } x \in \langle c, b \rangle.$$

Por tanto, por el teorema 5.1, f tiene un máximo relativo en c.

2) La prueba de esta parte es análoga a la de la parte (1) y se deja para el estudiante.

Los teoremas 5.1 y 5.6 dan dos métodos para encontrar los valores extremos de una función. Aunque en algunos casos el teorema 5.6 es más fácil de aplicar, hay casos donde el teorema 5.1 puede aplicarse y el teorema 5.6 no. Daremos algunos ejemplos.

Sea f la función definida por $f(x) = |x|$. La función f tiene un punto crítico en 0. Como $f'(0)$ no existe, no podemos aplicar el teorema 5.6. Sin embargo, usando el teorema 5.1 encontramos que f tiene un mínimo relativo en 0.

Si f es la función definida por $f(x) = x^{4/3}$, entonces f tiene un punto crítico en 0, pero f'' no existe en 0. De nuevo, no podemos aplicar el teorema 5.6. El teorema 5.1 nos muestra que f tiene un mínimo relativo en 0.

Si f es la función definida por $f(x) = x^3$, entonces f tiene un punto crítico en 0. Como $f''(0) = 0$, el teorema 5.6 no se aplica. Sin embargo, usando el teorema 5.1 encontramos que f no tiene un valor extremo en 0.

[1] En castellano es frecuente llamar *maximantes (minimantes)* a los puntos de dominio en que la función alcanza máximos (mínimos) relativos. [N. del T.]

5.7 Ejemplo. Consideremos un punto **A** en un medio en que la velocidad de la luz es v_1 y un punto **B** en un medio en que la velocidad de la luz es v_2, donde la frontera común de los dos medios es un plano. El principio de Fermat en óptica nos dice que la luz viajará de **A** a **B** a lo largo de una trayectoria para la cual el tiempo de recorrido será mínimo. Encuéntrese esa trayectoria.

SOLUCIÓN. En un medio homogéneo la trayectoria de tiempo mínimo es la de distancia mínima, una línea recta. Construyamos ahora el plano que contiene a **A** y **B** y es perpendicular al plano que forma la frontera de los medios (figura 11). Claramente, si el rayo de luz deja este plano el tiempo se incrementará. Por tanto, la trayectoria consiste en dos segmentos rectilíneos **AP** y **PB** en este plano. Así pues, si encontramos la posición de **P**, el problema queda resuelto.

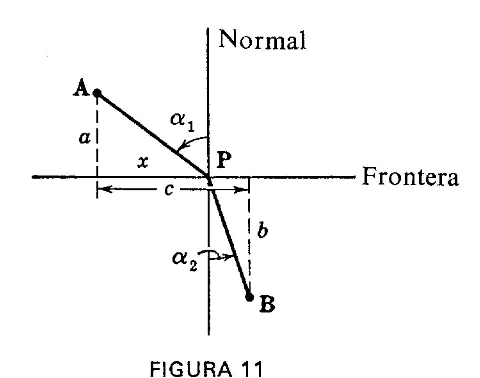


FIGURA 11

Sea x la distancia de la proyección de **A** sobre la frontera a **P**. Si $t(x)$ denota el tiempo que toma a la luz recorrer la trayectoria **APB** entonces

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v_2}.$$

Como

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

t' existe para todos los valores de x y es cero solamente si

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}$$

o

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2}.$$

Así pues, t tiene un valor crítico para el valor de x para el cual

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2}.$$

Como

$$t''(x) = \frac{1}{v_1}\cdot\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{v_2}\cdot\frac{b^2}{((c-x)^2+b^2)^{3/2}},$$

lo que siempre es posible, este valor crítico es un mínimo relativo. En realidad, el valor crítico es el mínimo absoluto ya que t es una función continua y tiene sólo este único valor extremo. A este resultado se le conoce como la ley de Snell.

Problemas

1. Encontrar los valores extremos de las siguientes funciones y dibujar sus gráficas. Encuéntrense, también, el máximo absoluto y el mínimo absoluto si es que existen.

a) $f = I^4+3I^3$

b) $f(x) = 2x-x^{-2}$

c) $f = (I-1)^2(I+3)^2$

d) $f(x) = (x-1)^2(x-3)^{2/3}$

e) $f = \dfrac{I^3-16}{I}$

f) $f = \dfrac{I^2+9}{I}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x}$.

2. Encuéntrese en R^2 la distancia mínima de un punto $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ a la recta que tiene la ecuación $ax+by = c$.

3. Si la suma de dos números ha de ser 12, encuéntrense los números tales que su producto sea un máximo.

4. Si la suma de dos números ha de ser 12, encuéntrense los números tales que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.

5. Un fabricante puede vender n artículos por semana a p dólares por artículo, donde $n = 125-p$. El costo para producir n artículos es $110+100n-n^2/2$ dólares. Encuéntrese el precio que maximiza su beneficio.

6. Usando el principio de Fermat en óptica (ejemplo 5.7), demuéstrese que en el caso de reflexión de la luz sobre una superficie plana, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

7. Un impresor imprimirá 1 000 circulares o menos, al precio de $ 1 por cada ciento. Por cada ciento adicional reducirá su precio por ciento sobre el costo total en 2 centavos. ¿Qué número de circulares maximiza el precio del trabajo?

8. El costo por hora del combustible de un avión es, dentro del rango práctico de velocidades de vuelo, aproximadamente proporcional al cubo de la velocidad. El costo por hora del combustible a 300 km/hr es de $ 160. El resto de los costos de mantenimiento del avión en vuelo es de $ 760 por hora. Los ingresos promedio por kilómetro volado ascienden a $ 2.50. Determínese la velocidad de vuelo más lucrativa. ¿Cuántos más de estos aviones debe comprar la compañía?

9. Si una página debe contener 225.82 centímetros cuadrados de material impreso y debe tener márgenes de 2.0 cm en la parte superior, 2.54 cm en la parte inferior, 12.70 cm en uno de los lados, y 2.0 cm en el otro lado, encuéntrense las dimensiones de la página de área mínima.

10. Encuéntrese la distancia más corta del punto $(5, -\frac{7}{3})$ a la parábola de ecuación $y = \frac{2}{3}x^2$.

11. Si un recipiente cilíndrico de lámina (cerrado en ambos extremos) ha de tener V como volumen, encuéntrense las dimensiones que requerirán la mínima cantidad de material.

12. La sección de un canal de irrigación abierto ha de tener la forma de un trapezoide isósceles con lados de pendiente de $\frac{4}{3}$. Si el área de la sección ha de ser de 52.674 metros cuadrados, ¿qué dimensiones son las que hacen mínima la superficie sustentadora (el fondo y los lados)?

13. Una estatua de 3.66 metros de altura tiene su base a 0.61 metro por encima del nivel del ojo del observador. ¿A qué distancia debe ponerse el observador para maximizar su ángulo de visión?

14. Un luz cuelga en **L** directamente sobre un punto **P** de una superficie plana. La intensidad de iluminación en un punto **Q**, que esté sobre la superficie a una distancia d de **P**, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la luz y directamente proporcional al seno del ángulo de incidencia (el ángulo **LQP**). ¿A que altura debe estar colocada la luz sobre **P** para que dé una iluminación máxima en **Q**?

15. Una batería tiene una fuerza electromotriz de E voltios y una resistencia interna de r ohmios. Cuando se conecta a una red con

una resistencia R, la corriente I (amperios) que fluye a través de R es $I = \frac{E}{R+r}$ y la potencia P (vatios) llevada a la red es $P = I^2 R$. ¿Qué valor de R maximiza la potencia?

16. A las 04:00 horas un barco se dirige hacia el norte a 33.154 kilómetros (18 nudos) y se encuentra a 55.560 kilómetros (30 millas náuticas) exactamente al sur de un segundo barco que marcha hacia el este a 18.530 kilómetros (10 nudos). Determínese el momento en que los barcos se encuentran más próximos (no se tenga en cuenta la curvatura de la tierra).

17. Dos puntos **A** y **B** se encuentran separados m kilómetros en una playa recta. Un punto **C** está a 3 kilómetros directamente de **B** en el mar. Cuesta \$ 400 tender un kilómetro de tubería sobre la playa y \$ 500 tender un kilómetro de tubería en el mar. Descríbase la forma más económica de tender la tubería desde **A** hasta **C** si *a*) $m \geqslant 4$, *b*) $m < 4$.

18. Al efectuar un experimento n veces se obtienen para una determinada magnitud los valores $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Un método para estimar el valor de la magnitud basado sobre estos n experimentos, conocido como el método de los mínimos cuadrados, es el de tomar el número x que minimiza el error cuadrático:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} (x-a_i)^2 .$$

Determínese el número que minimiza s.

6. CÓMO DIBUJAR LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Por muchos ejemplos sabemos que, en general, no podemos obtener una imagen exacta de la gráfica de una función con el solo ploteo de unos pocos puntos de la gráfica escogidos al azar y el posterior dibujo de una curva lisa que pase por dichos puntos. La función debe ser analizada primero, antes de que se haga intento alguno de dibujar su gráfica. Recordemos ahora varias propiedades de una función que pueden ayudarnos en el dibujo de su gráfica. Supondremos a lo largo de toda esta discusión que el dominio de la función consiste en un número finito de intervalos.

Primero debemos investigar la continuidad de la función en los puntos de su dominio. (El dominio de la función nos da su extensión a lo largo del eje X.) Si la función es continua sobre un intervalo, entonces su gráfica está representada por una curva sin rupturas sobre el intervalo, mientras que en un punto en que la función no es continua la curva aparecerá partida. En tal punto deberemos determinar los límites a la izquierda y a la derecha de la función. También deberemos investigar el límite de la

función en puntos extremos cualesquiera (incluyendo ∞ y $-\infty$) del dominio de la función.

El examen de la derivada de la función nos da, también, mucha información útil para el dibujo de la gráfica de la función. Si la derivada existe en un punto, entonces la gráfica tiene una tangente en este punto y el valor de la derivada es la pendiente de la tangente. Además, el examen de los valores de la derivada nos permite determinar cualesquier puntos máximos y mínimos relativos de la función y cualesquier intervalos sobre los que la función sea creciente o decreciente.

Después de haber analizado la función respecto a las propiedades antes mencionadas, debemos tener una buena idea de la forma general de la gráfica. Si la función tiene valores máximos absolutos y mínimos absolutos, éstos nos determinan la extensión de la gráfica sobre el eje de las Y.

Aparte de los puntos máximos relativos y mínimos relativos de la función debemos localizar con precisión los puntos donde la gráfica intersecta a los ejes coordenados (si es que tales puntos existen). La intercepción con Y de la gráfica de una función f es $f(0)$ y las intercepciones con X se obtienen resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.

Para tipos especiales de funciones, el dibujo de la gráfica puede simplificarse considerablemente. Por ejemplo, una función par es simétrica con respecto al eje Y, una función impar es simétrica con respecto al origen, y una función periódica queda completamente descrita si ilustramos su gráfica en un periodo completo.

6.1 Ejemplo. Trácese la gráfica de la función $f = \dfrac{I^4}{4(I^2-2)}$.

SOLUCIÓN. El dominio de esta función consiste en todos los números reales excepto $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. Como f es una función par su gráfica es simétrica con respecto al eje Y. Así pues, necesitamos analizar la función solamente en puntos a la derecha del eje Y.

La función f es una función racional y, por tanto, es continua en todos los puntos en que está definida. Investigando los límites de f en los puntos finales de su dominio, tenemos

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{x^4}{4(x^2-2)} = -\infty ,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{x^4}{4(x^2-2)} = \infty ,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{4(x^2-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4-8/x^2} = \infty .$$

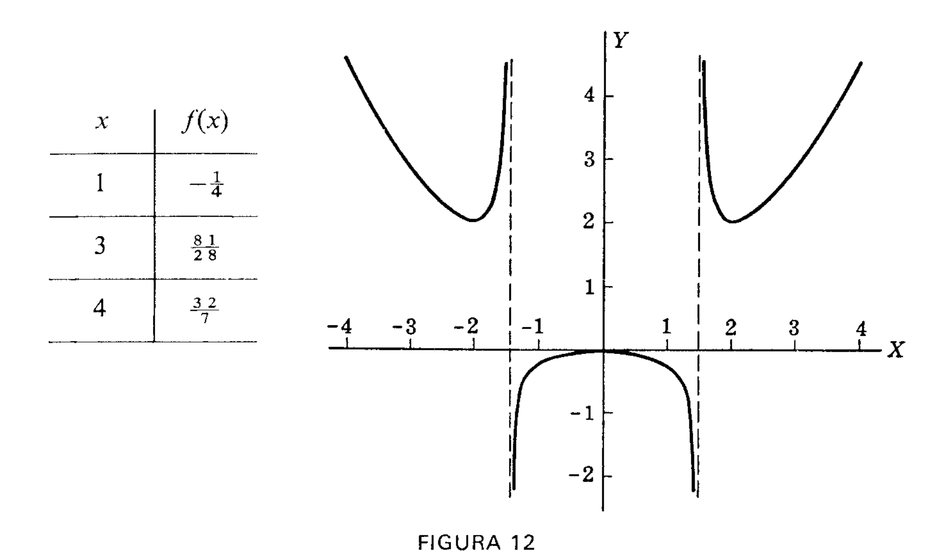
Como $f'(x) = x^3 \dfrac{x^2-4}{2(x^2-2)^2}$,

$$f'(x) < 0, \quad x \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}, 2 \rangle$$

$$f'(x) > 0, \quad x \in \langle 2, \infty \rangle .$$

Hay una tangente en cada punto de la gráfica, y f tiene un máximo relativo en el punto (0, 0) y un mínimo relativo en (2, 2). La función es decreciente sobre los intervalos $\langle 0, \sqrt{2} \rangle$ y $\langle \sqrt{2}, 2 \rangle$ y es creciente sobre $\langle 2, \infty \rangle$.

La anterior información nos da la forma general de la gráfica (figura 12). La gráfica intersecta los ejes coordenados solamente en (0, 0). Al dibujar la gráfica necesitaremos "plotear" exactamente algunos puntos adicionales. Los que usamos aparecen en la lista a la izquierda de la gráfica. Las rectas $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ se llaman asíntotas verticales.



x	$f(x)$
1	$-\frac{1}{4}$
3	$\frac{81}{28}$
4	$\frac{32}{7}$

FIGURA 12

6.2 Ejemplo. Dibújese la gráfica de la función

$$f = \frac{I^2+2I-3}{I^2-4} .$$

SOLUCIÓN. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto -2 y 2. Como f es una función racional es continua en todos los puntos donde está definida. Investigando los límites de f en los puntos extremos de su dominio, tenemos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+2/x-3/x^2}{1-4/x^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x^2+2x-3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{x^2+2x-3}{x^2-4} = \infty$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{x^2+2x-3}{x^2-4} = -\infty$$

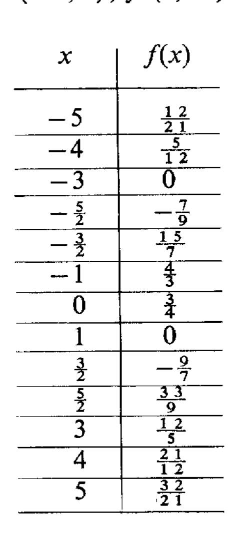
$$\lim_{x\to2^+} \frac{x^2+2x-3}{x^2-4} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+2/x-3/x^2}{1-4/x^2} = 1.$$

Como $f'(x) = -2\dfrac{x^2+x+4}{(x^2-4)^2} = -2\dfrac{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4}}{(x^2-4)^2}$,

$$f'(x) < 0, \quad x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -2, 2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle.$$

Hay una tangente en cada punto de la gráfica. La función f no tiene valores extremos y es decreciente sobre cada uno de los intervalos $\langle -\infty, -2\rangle$, $\langle -2, 2\rangle$, y $\langle 2, \infty\rangle$.



x	$f(x)$
-5	$\frac{12}{21}$
-4	$\frac{5}{12}$
-3	0
$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{9}$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{15}{7}$
-1	$\frac{4}{3}$
0	$\frac{3}{4}$
1	0
$\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{7}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{33}{9}$
3	$\frac{12}{5}$
4	$\frac{21}{12}$
5	$\frac{32}{21}$

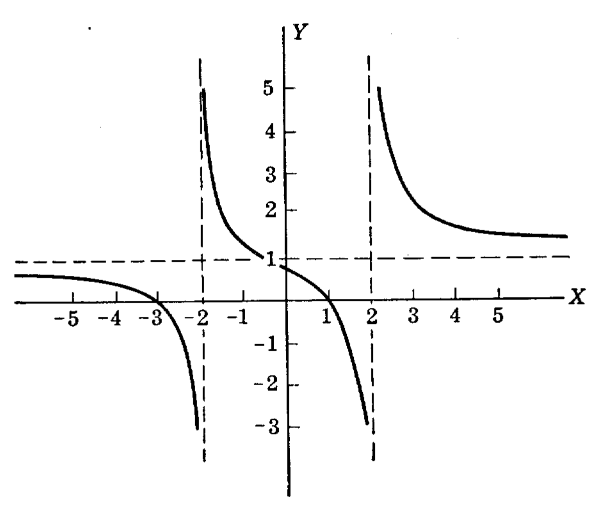


FIGURA 13

La intercepción con Y, $f(0)$, es $\frac{3}{4}$. Las intercepciones con X son -3 y 1, las soluciones de $x^2+2x-3 = 0$. Una tabla de los puntos "ploteados" se da a la izquierda del dibujo (figura 13). Las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales y la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Cuando mencionamos un procedimiento para el dibujo de la gráfica de una función, dijimos que los puntos donde la gráfica intersecta los ejes coordenados deben "plotearse" con precisión. Puede suceder que no podamos resolver la ecuación $f(x) = 0$ exactamente para obtener las intercepciones con X. En realidad, puede ser que nuestro propósito al dibujar la gráfica sea precisamente obtener valores aproximados de las raíces reales de $f(x) = 0$. En tales casos podemos aproximar las raíces reales tan exactamente como sea necesario usando el hecho de que si una función es positiva en un punto y negativa en otro y continua en todos los puntos del intervalo entre estos puntos, entonces, por el teorema del valor intermedio, la función es cero en algún punto de este intervalo. Este hecho puede también tener que usarse para hallar los valores aproximados de las soluciones de $f'(x) = 0$ con el fin de localizar los valores extremos de la función. La solución de ecuaciones se discute en forma más completa en el capítulo 11.

6.3 Ejemplo. Dibújese la gráfica de la función

$$f = I^3+2I^2+I+1.$$

SOLUCIÓN. Como f es una función polinomial, está definida y es continua y diferenciable en todos los puntos de R. Investigando los límites de la función en los puntos finales del dominio, tenemos:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3+2x^2+x+1) = \lim_{x\to-\infty} \left[x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} (x^3+2x^2+x+1) = \lim_{x\to\infty} \left[x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\right] = \infty.$$

La derivada de f es

$$f' = 3I^2+4I+1.$$

Así pues

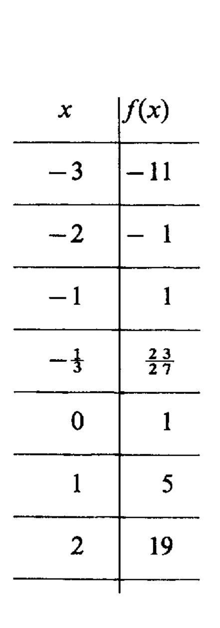
$$f'(x) = 3x^2+4x+1 = (3x+1)(x+1) = 3(x+\tfrac{1}{3})(x+1)$$

y

$$f'(x) > 0, \quad x\in\langle-\infty, -1\rangle \cup \langle-\tfrac{1}{3}, \infty\rangle$$
$$f'(x) < 0, \quad x\in\langle-1, -\tfrac{1}{3}\rangle.$$

La función es creciente en $\langle-\infty, -1\rangle$ y $\langle-\frac{1}{3}, \infty\rangle$ y es decreciente sobre $\langle-1, -\frac{1}{3}\rangle$. Tiene un máximo relativo en el punto $(-1, 1)$ y un mínimo

relativo en $(-\frac{1}{3}, \frac{23}{27})$. Por la anterior intersección podemos ver que la función tiene sólo una intersección con el eje X. Calculando algunos valores de la función se encuentra que este punto de intersección está situado entre -2 y -1 (figura 14).



x	$f(x)$
-3	-11
-2	-1
-1	1
$-\frac{1}{3}$	$\frac{23}{27}$
0	1
1	5
2	19

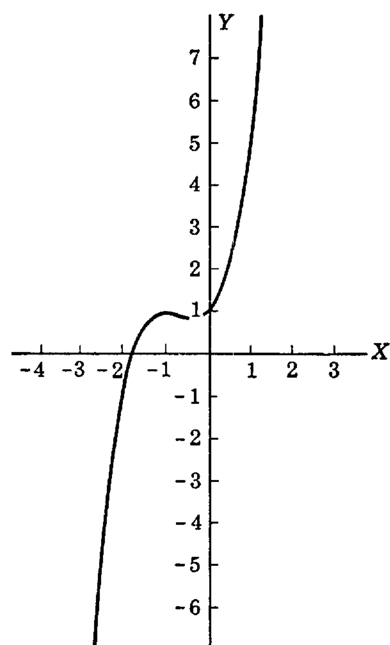


FIGURA 14

Problemas

1. Dibújense las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f = \dfrac{I^2}{I^4 - 1}$ *b*) $f = \dfrac{I^3}{I^2 - 2}$

c) $f = \dfrac{I^2}{I^2 - 4}$ *d*) $f = \dfrac{I + 2}{I - 3}$

e) $f = \dfrac{I^2}{1 - I^2}$ *f*) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x - 9}}$

g) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 4}$ *h*) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 9}}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x-3)^2}$ *j*) $f(x) = \dfrac{x(x-2)}{x^2-9}$.

2. Dibújense las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f = I^3+2I^2+3I+4$ *b*) $f = I^3-4I^2+3I+4$

c) $f = I^3+I^2+I+2$ *d*) $f = I^3-I^2-I+2$

e) $f = I^4-2I^3+2$ *f*) $f = I^4-2I^3-2$

g) $f = I^5-\frac{5}{4}I^4+3$.

3. Demuéstrese que toda función polinomia de grado impar tiene al menos una raíz real.

Sugerencia: Si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, donde n es un entero positivo impar, escríbase $f(x) = x^n \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-n}$, y úsese el problema 4, pág. 416.

4. Supongamos que $f = \dfrac{g}{h}$ es una función racional.

a) Demuéstrese que si el grado de g es menor que el grado de h, entonces la gráfica de la función f tiene el eje X como asíntota horizontal en $-\infty$ e ∞.

Sugerencia: Úsese el problema 5, pág. 416.

b) Si g y h tienen el mismo grado, es decir, si $g = \sum_{k=0}^{n} a_k I^k$ y $h = \sum_{k=0}^{n} b_k I^k$, demuéstrese que la gráfica de f tiene la recta $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ como una asíntota horizontal en $-\infty$ e ∞.

5. Si $f = \dfrac{g}{h}$, donde $g = \sum_{k=0}^{n} a_k I^k$ y $h = \sum_{k=0}^{n-1} b_k I^k$, demuéstrese que la gráfica de f tiene a $y = \dfrac{a_n}{b_{n-1}}x + \dfrac{a_n - 1^{b_0} - 1^{-a_n b_n} - 2}{q_{n-1}^2}$ como asíntota en $-\infty$ y en ∞; es decir, demuéstrese que

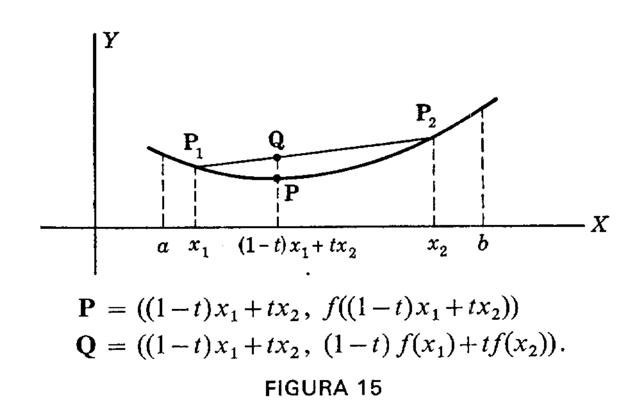
$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{a_n}{b_{n-1}}x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \frac{a_n}{b_{n-1}}x\right) = \frac{a_n - 1^{b_n} - 1^{-a_n b_n} - 2}{{b_{n-1}}^2}.$$

7. CONCAVIDAD DE UNA GRÁFICA

Al dibujar la gráfica de una función, ayuda saber cómo se está "doblando" la curva. Esta "flexión" de la curva se describe diciendo que la curva es

"cóncava hacia arriba" o "cóncava hacia abajo", términos que han de definirse. Como la flexión de la gráfica de una función f concierne al cambio en dirección de la gráfica y como f'' nos da la razón de cambio de la función pendiente f', la consideración de los valores de f'' debe darnos información sobre la flexión de la gráfica. Probaremos en esta sección un teorema al respecto.

Si una curva se flexiona hacia arriba sobre un intervalo, entonces la curva estará situada debajo de cualquier segmento rectilíneo que una dos puntos cualesquiera de esta sección de la curva (figura 15). Es esta propiedad la que usamos en nuestra definición de "cóncava hacia arriba".



$$\mathbf{P} = ((1-t)x_1+tx_2,\ f((1-t)x_1+tx_2))$$
$$\mathbf{Q} = ((1-t)x_1+tx_2,\ (1-t)\,f(x_1)+tf(x_2)).$$

FIGURA 15

7.1 Definición. *La gráfica de una función es* ***cóncava hacia arriba*** *(convexa) sobre un intervalo* $\langle a, b\rangle$ *si para dos puntos cualesquiera* x_1 *y* x_2 *está* $\langle a, b\rangle$

$$f((1-t)x_1+tx_2) < (1-t)\,f(x_1)+tf(x_2),\ \textit{para todo}\ t\in\langle 0, 1\rangle.$$

Si cambiamos "$<$" por "$>$" en la definición 7.1 tenemos la definición de *cóncava hacia abajo.*

Demostraremos ahora que, geométricamente, esta definición enuncia que una gráfica es cóncava hacia arriba sobre un intervalo $\langle a, b\rangle$ si el segmento que une dos puntos cualesquiera sobre la sección de la gráfica entre $x = a$ y $x = b$ se encuentra sobre la gráfica (figura 15).

Tomemos dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 en $\langle a, b\rangle$. Sea $\mathbf{P}_1 = (x_1, f(x_1))$ y $\mathbf{P}_2 = (x_2, f(x_2))$. De acuerdo con nuestra discusión sobre segmentos rectilíneos del capítulo 2 sabemos que el segmento rectilíneo abierto que une $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ puede escribirse

$$\begin{aligned}\{\mathbf{P}_1+t(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1)\mid t\in\langle 0, 1\rangle\}\\ &= \{(1-t)\mathbf{P}_1+t\mathbf{P}_2\mid t\in\langle 0, 1\rangle\}\\ &= \{((1-t)x_1+tx_2,\ (1-t)\,f(x_1)+tf(x_2))\mid t\in\langle 0, 1\rangle\}.\end{aligned}$$

Así pues, vemos que la definición 7.1 afirma que el punto **P** sobre la gráfica de f en cualquier punto entre x_1 y x_2 [en un punto $(1-t)x_1+tx_2$, donde $t\in\langle 0, 1\rangle$] se encuentra bajo el punto correspondiente **Q** del segmento rectilíneo que une $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$.

Damos ahora un teorema que relaciona la concavidad de la gráfica de una función a los valores de la segunda derivada de·la función.

7.2 Teorema. 1) *Si $f''(x) > 0$ para todo $x\in\langle a, b\rangle$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre $\langle a, b\rangle$.* 2) *Si $f''(x) < 0$ para todo $x\in\langle a, b\rangle$ entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre $\langle a, b\rangle$.*

PRUEBA. 1) Tómense dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 en $\langle a, b\rangle$ tales que $x_1 < x_2$. Sea $\mathbf{P}_1 = (x_1, f(x_1))$ y $\mathbf{P}_2 = (x_2, f(x_2))$ (figura 16).

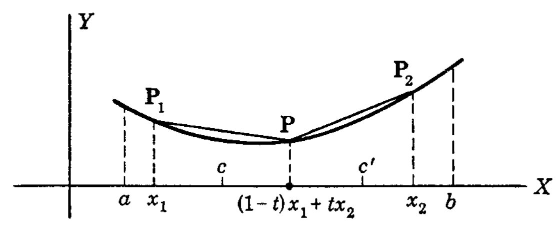


FIGURA 16

Tómese un número cualquiera entre x_1 y x_2: $(1-t)x_1+tx_2$, donde $t\in\langle 0, 1\rangle$. Según el teorema del valor medio existen puntos $c\in\langle x_1, (1-t)x_1+tx_2\rangle$ y $c'\in\langle(1-t)x_1+tx_2, x_2\rangle$ tales que

$$\frac{f((1-t)x_1+tx_2)-f(x_1)}{(1-t)x_1+tx_2-x_1} = f'(c)$$

y

$$\frac{f(x_2)-f((1-t)x_1+tx_2)}{x_2-(1-t)x_1-tx_2} = f'(c').$$

Las condiciones para el teorema del valor medio se verifican en los intervalos

$$[x_1, (1-t)x_1+tx_2] \quad \text{y} \quad [(1-t)x_1+tx_2, x_2]$$

ya que $f''(x)$ existe para toda $x\in[x_1, x_2]$. Como $f''(x) > 0$ para todo $x\in[x_1, x_2]$, f' es una función creciente sobre $[x_1, x_2]$ (problema 10, pág. 460), de donde

$$f'(c) < f'(c').$$

Por tanto

$$\frac{f((1-t)x_1+tx_2)-f(x_1)}{t(x_2-x_1)} < \frac{f(x_2)-f((1-t)x_1+tx_2)}{(1-t)(x_2-x_1)}$$

$$(1-t)\,f((1-t)x_1+tx_2)-(1-t)\,f(x_1) < tf(x_2)-tf((1-t)x_1+tx_2)$$

$$f((1-t)x_1+tx_2) < (1-t)\,f(x_1)+tf(x_2).$$

Así pues, si $f''(x) > 0$, para todo $x \in \langle a, b \rangle$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre $\langle a, b \rangle$.

2) Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in \langle a, b \rangle$, entonces

$$[-f]''(x) = -f''(x) > 0 \text{ para todo } x \in \langle a, b \rangle.$$

De donde, por la parte (1) de este teorema,

$$-f((1-t)x_1+tx_2) < (1-t)[-f(x_1)]+t[-f(x_2)]$$

y

$$f((1-t)x_1+tx_2) > (1-t)\,f(x_1)+tf(x_2).$$

Por tanto, la gráfica de la función f es cóncava hacia abajo sobre $\langle a, b \rangle$.

Este teorema nos da una forma conveniente de comprobar la concavidad de una gráfica. Al dibujar la gráfica de una función, los puntos en que la dirección de la concavidad cambia deben ser ploteados con la mayor exactitud posible. Tales puntos se llaman puntos de inflexión.

7.3 Definición. *Un punto sobre la gráfica de una función donde la dirección de concavidad cambia, se llama* ***punto de inflexión.***

7.4 Ejemplo. Dibújese la gráfica de la función

$$f = \frac{I^3+1}{2I}.$$

SOLUCIÓN. La función f está definida para todos los números reales excepto 0. Como f es una función racional, es continua y diferenciable en todos los puntos en que está definida. Investigando los límites de la función en los puntos extremos de su dominio, tenemos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{2x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+1}{2x} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3+1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+1}{2x} = \lim_{x\to \infty} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x}\right) = \infty .$$

Como

$$f'(x) = \frac{2x^3-1}{2x^2} = \frac{1}{x^2}(x^3-\tfrac{1}{2}),$$

$$f'(x) < 0, \quad x\in\langle -\infty, 0\rangle \cup \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right\rangle$$

$$f'(x) > 0, \quad x\in\left\langle \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \infty\right\rangle.$$

Así pues, f es una función decreciente sobre $\langle -\infty, 0\rangle$ y $\left\langle 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right\rangle$ y una función creciente sobre $\left\langle \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \infty\right\rangle$. La función tiene solamente un valor extremo: un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{4\sqrt[3]{2}}\right)$. La gráfica no intersecta el eje Y, e intersecta solamente el eje X en un punto: el $(-1, 0)$.

Para determinar los intervalos, en que la gráfica de f es concava hacia arriba y aquéllos en que es cóncava hacia abajo, consideramos los valores de la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{x^3+1}{x^3}.$$

Como

$$f''(x) > 0, \quad x\in\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$$
$$f''(x) < 0, \quad x\in\langle -1, 0\rangle,$$

f es cóncava hacia arriba sobre $\langle -\infty, -1\rangle$ y $\langle 0, \infty\rangle$ y es cóncava hacia abajo sobre $\langle -1, 0\rangle$. El único punto de inflexión es $(-1, 0)$. La gráfica de f está dibujada en la figura 17.

x	$f(x)$
-3	$\frac{13}{3}$
-2	$\frac{7}{4}$
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\dfrac{3}{4\sqrt[3]{2}}$
1	1
2	$\frac{9}{4}$
3	$\frac{14}{4}$

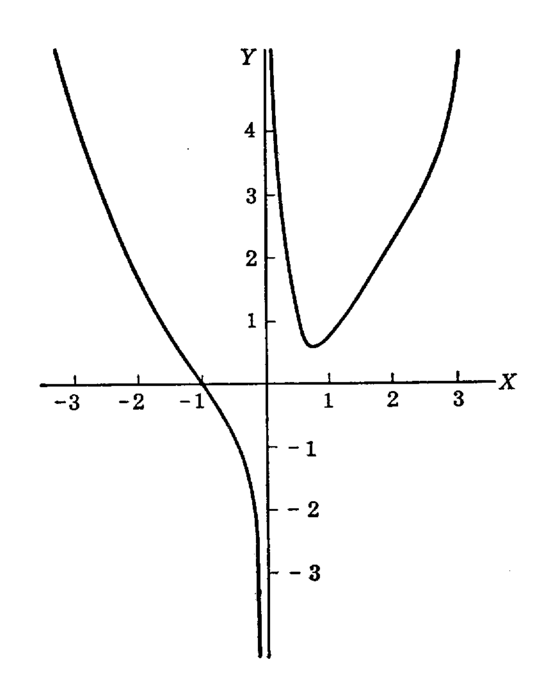


FIGURA 17

Problemas

1. Para las gráficas de cada una de las funciones abajo dadas, determínese cuáles porciones de las gráficas son cóncavas hacia arriba, cuáles son cóncavas hacia abajo, encuéntrense los puntos de inflexión, y dibújense.

a) $f = \dfrac{I^2+1}{I}$ *b*) $f = \cos$

c) $f = I^2 + \cos$ *d*) $f = I^4 - I^3 - 3I^2$

e) $f = I^3 - 3I$ *f*) $f = 3I^5 + 4I^3 + 4$

g) $f = \dfrac{1}{I^2+1}$ *h*) $f = \tan$

i) $f = I^{1/3}$ *j*) $f = I^3 - 3I^2 + 2$

k) $f(x) = x^{2/3}(1-x)^{1/3}$ *l*) $f(x) = 4x^{5/2} - 15x^2$.

2. Una viga de soporte simple con longitud de 10 metros, pesa 100 kilogramos por pie y está cargada con pesas concentradas de 2 000 kilogramos a los 4 metros y de 5 000 kilogramos a los 7 metros (figura 18).

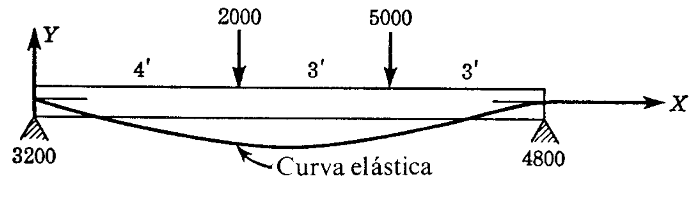


FIGURA 18

El "momento de flexión" M (definido en resistencia de materiales) es la función con la siguiente regla de correspondencia:

$$M(x) = \begin{cases} 3\,200x - 50x^2 & \text{para} \quad 0 \leqslant x < 4 \\ 1\,200x - 50x^2 + \ 8\,000 & \text{para} \quad 4 \leqslant x < 7 \\ -3\,800x - 50x^2 + 43\,000 & \text{para} \quad 7 \leqslant x \leqslant 10. \end{cases}$$

a) Dibújese una gráfica de M'. (Llamamos a esto diagrama de "corte".)
b) Dibújese sobre el mismo diagrama una gráfica de M.
c) La ecuación de la "curva elástica" de la viga —la curva del eje longitudinal central (neutro) de la viga sometida a las tensiones— está determinada por la ecuación diferencial $M = EIy''$ donde E e I son constantes y $y(x)$ es la deflexión del punto sobre el eje neutro a una distancia x del origen.
Determínense las abscisas de los puntos de inflexión de la curva elástica.
d) Encuéntrese el máximo absoluto de $|M|$. [Las contestaciones a (*c*) y (*d*) son importantes en el diseño de vigas. Los esfuerzos en cualquier punto de una viga, sean tensiones o compresiones, están dados por $s = Mc/I$, donde c es la distancia del punto en cuestión al eje neutro de la viga.]

3. La viga en la figura 19 tiene longitud L y soporta un peso concen-

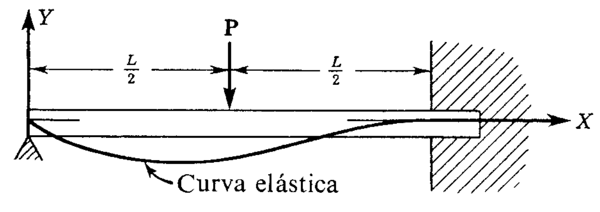


FIGURA 19

trado P en su punto medio. La ecuación de la curva elástica está dada por

$$96EIy = \begin{cases} P(5x^3 - 3L^2x) & \text{para} \quad 0 \leqslant x < L/2, \\ P(-11x^3 + 24Lx^2 - 15L^2x + 2L^3) & \text{para} \quad L/2 \leqslant x \leqslant L. \end{cases}$$

a) Encuéntrese el máximo absoluto $|M|$ donde $M = EIy''$. ¿Para qué valor de x ocurre?

b) ¿Para qué valores de x se tiene $M = 0$? Estos identifican las secciones de la viga donde la tensión o la compresión es cero.

8. RESUMEN

En este capítulo, nos impusimos la tarea de investigar dos importantes aplicaciones del cálculo: la determinación de los valores máximos y mínimos de una función y el dibujo de la gráfica de una función.

De acuerdo con el capítulo anterior, sabíamos que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un máximo y un mínimo sobre este intervalo, pero no teníamos ningún método para la determinación de estos valores. Sabemos que estos valores pueden ser encontrados mirando los valores de la función en sus puntos críticos sobre el intervalo: el mayor de los valores de la función en sus puntos críticos es el valor máximo de la función sobre el intervalo y el más pequeño de los valores en los puntos críticos es el mínimo.

Si una función es continua sobre un conjunto $\mathcal{S}$ que no es un intervalo cerrado, la función puede que tenga o no tenga un valor máximo y/o un valor mínimo sobre $\mathcal{S}$. En este caso, el problema de la existencia de valores máximo y mínimo y su determinación, si es que existen, puede resolverse generalmente encontrando los valores máximos y mínimos relativos de la función y también encontrando intervalos sobre los que la función sea creciente o decreciente.

Los elementos que entran en una solución del problema de la determinación de los valores máximo y mínimo de una función indican un método razonable para dibujar la gráfica de una función. (El ploteo de unos cuantos puntos de la gráfica escogidos al azar y dibujar una curva lisa que pase a través de ella no es un método razonable.) Los puntos donde la gráfica intersecta los ejes coordenados y los puntos donde ocurren los máximos y los mínimos relativos deben ser ploteados con cuanta exactitud se pueda. Si la función es continua, entonces la curva que representa la gráfica será una curva sin rupturas. Si hay puntos de discontinuidad de la función, entonces la gráfica en una vecindad de estos puntos tiene que ser investigada. En puntos donde la derivada existe, el valor de la derivada es la pendiente de la curva. Si la función es creciente o decreciente sobre un intervalo, tal información debe también usarse. Una información adicional también útil para el dibujo de la gráfica puede obtenerse mediante la consideración de la concavidad sobre intervalos.

El teorema principal en el desarrollo de la solución de los problemas de este capítulo es el teorema del valor medio. Recomendamos al estudiante el dominio de este teorema, uno de los más importantes de todo el análisis.

Problemas de repaso

1. Determínense los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones sobre los intervalos que se indican:

a) $f = \tan - I$; $[-\pi/4, \pi/4]$

b) $f = 3I^4 + 4I^3 - 36I^2$; $[-5, 5]$.

2. Determínense los valores extremos de las siguientes funciones. Determínense, además, los intervalos sobre los que las funciones son crecientes, decrecientes, cóncavas hacia arriba, cóncavas hacia abajo. Dibújense las gráficas.

a) $f = 3I^4 - 16I^3 - 6I^2 + 48I$ *b*) $f = \dfrac{I^2 - 2I + 3}{I - 1}$

c) $f = I^2 + \sqrt{I^2 + 4}$ *d*) $f = I^4 - 2I^3 + 3$.

3. Pruébese que: si el dominio de f es el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f'(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en a; en realidad, existe un intervalo $\langle a, c \rangle$ tal que, para todo $x \in \langle a, c \rangle$, $f(x) < f(a)$.

4. Pruébese que: si el dominio de f es el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f'(b) > 0$, entonces f tiene un máximo relativo en b; en realidad, existe un intervalo $\langle d, b \rangle$ tal que, para toda $x \in \langle d, b \rangle$, $f(x) < f(b)$.

5. Pruébese que: si f' existe sobre $[a, b]$ y $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$, entonces existe un punto $c \in \langle a, b \rangle$ tal que $f'(c) = 0$.

Sugerencia: Como f es continua sobre $[a, b]$, f tiene un mínimo en algún punto $c \in [a, b]$. Pero los problemas 3 y 4 nos dicen que c no puede ser ni a ni b.

6. Pruébese la propiedad del valor intermedio de la derivada: si f' existe sobre $[a, b]$ y $f'(a) < f'(b)$, entonces, para cualquier número t tal que $f'(a) < t < f'(b)$, existe un punto $c \in \langle a, b \rangle$ tal que $f'(c) = t$.

Sugerencia: Aplíquese el problema 5 a la función g definida por $g(x) = f(x) - tx$.

Capítulo

$m = f'(x_n)$ 11

Solución de ecuaciones

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo consideraremos la solución de ecuaciones del tipo

$$f(x) = 0.$$

Algunos de los resultados que obtendremos solamente se referirán al caso en que f es una función polinomial o al caso en que f es una combinación de funciones trigonométricas. Otros resultados se aplicarán al caso más general de una función real de variable real que sea continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$.

1.1 Definición. *Un número r tal que $f(r) = 0$ se dice que es un* ***cero*** *de la función f o una* ***raíz*** *(solución) de la ecuación $f(x) = 0$.*

Consideramos primero la solución de ecuaciones polinomiales. Recuérdese que una función polinomial P se ha definido como una función real de variable real de la forma

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k I^k$$

donde las a_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) son funciones constantes. Si $a_n \neq 0$, entonces se dice que P es una función polinomial de grado n. Nótese que cuando $n = 0$ y $a_0 \neq 0$, entonces P tiene grado cero; mientras que si $n = 0$ y $a_0 = 0$, entonces P es la función cero y a tal P no se le asigna ningún grado. Así pues, los polinomios de grado cero son las funciones constantes distintas de cero y la función cero $\{(x, 0) | x \in \mathrm{R}\}$ es una función polinomial a la que no se asigna ningún grado. Las funciones polinomiales de grado 1 se llaman funciones lineales; a las de grado 2, cuadráticas; a las de grado 3, cúbicas; etc.

El problema de encontrar ceros de una polinomial lineal o, lo que es equivalente, encontrar las soluciones de una ecuación lineal, se consideró en el capítulo 1 (pág. 30). Se encontró que $-b/a$ era el único número real que satisfacía la ecuación

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0).$$

En el capítulo 1, consideramos también la solución de la ecuación cuadrática

1.2 $$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Completando cuadrados tenemos

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{2a^2}\right].$$

De donde, como en una ecuación cuadrática $a \neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Ahora bien, la ecuación

1.3
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

tiene dos soluciones distintas si $b^2-4ac > 0$;

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

y

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si $b^2-4ac = 0$, la ecuación (1.3) se reduce a

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

y hay solamente una solución,

$$x = -b/2a.$$

Si $b^2-4ac < 0$, la ecuación 1.3 no tiene soluciones (reales).

Las soluciones de la ecuación cuadrática 1.2 son los ceros de la función polinomial cuadrática

$$P = aI^2+bI+c \quad (a \neq 0).$$

Hemos visto que esta polinomial tiene ceros si $b^2-4ac \geqslant 0$ y no tiene ceros si $b^2-4ac < 0$. Es decir, si $b^2-4ac < 0$, no hay ningún elemento x en el dominio de P tal que $P(x) = 0$.

Es conveniente tener soluciones para todas las ecuaciones cuadráticas. Esto solamente será posible si extendemos el dominio de definición de las funciones polinomiales. Esto es lo que queremos hacer. Primero debemos definir un conjunto más extenso de números que incluirá a los números reales como un subconjunto. El nuevo sistema de números por definir se llama sistema de los números complejos. Las nuevas funciones "polinomiales" pueden definirse, entonces, con todos los números complejos como su dominio. Cada una de las nuevas funciones polinomiales de grado positivo, tiene al menos un cero. Este resultado se llama teorema fundamental del álgebra.

El problema de resolver las ecuaciones algebraicas ha llevado al hombre desde los números naturales $(1, 2, 3, \ldots)$, a las fracciones $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$, a los enteros $(\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$, a los números racionales, a los

números irracionales y al sistema completo de los números reales (que fue nuestro punto de partida), a los números complejos, y a otros sistemas de números más generales. Leopoldo Kronecker (1823-1891) el primer crítico de los fundamentos del análisis moderno, describió esta evolución larga y gradual de la comprensión del sistema de números por el hombre diciendo: "Dios creó los enteros; el resto es obra del hombre."

Sabemos, por ejemplo, que no existe ningún número real x con la propiedad de que

$$x^2+1 = 0$$

o con la propiedad de que

$$x^2+4x+9 = (x+2)^2+5 = 0.$$

Nuestra posición es análoga a la del hombre del siglo XVI que no sabía nada de números negativos ni del número cero, cuando contemplaba la ecuación

$$x+9 = 5.$$

El número -4 no tenía aún sentido alguno, y si le dijéramos que la ecuación tenía una solución, rechazaría nuestra afirmación como absurda. Podríamos introducir el número 0 como la solución de la ecuación $x+a = a$, y el número -4 como el símbolo para la solución de la ecuación $x+4 = 0$. Podríamos enseñarle las reglas para trabajar con estos nuevos números, y vería que todas sus antiguas reglas se aplican a los nuevos números y que este nuevo sistema de números es ciertamente una extensión de su antiguo sistema de números. Podría ayudarle a la aceptación de estos nuevos números que les diésemos una interpretación geométrica, y podríamos mostrarle que esta extensión de su sistema de números es esencial para el desarrollo de las matemáticas y para la solución de muchos problemas prácticos.

Discutiremos el sistema de los números complejos siguiendo estas mismas líneas. Las definiciones y reglas para operar con los números complejos se dan en primer lugar. Demostraremos después cómo este sistema es una extensión del sistema de los números reales y, finalmente, que los números complejos y las operaciones con estos números tienen una interpretación geométrica.

La primera presentación clara de los números complejos y la primera prueba satisfactoria del teorema fundamental del álgebra las dio Karl Gauss (1777-1855) en su disertación doctoral en 1799. El término "número complejo" lo introdujo Gauss y la definición de los números complejos como pares ordenados de números reales (que es la definición que aquí usamos) fue usada por vez primera en 1835 por el matemático y físico-matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865). Independientemente de Hamilton, Herman Grassman (1809-1877) extendió esta definición de los números complejos a las n-adas ordenadas de números

reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Estos números hipercomplejos generalizaban a los números complejos y a los cuaternios de Hamilton. Hamilton fue honrado por sus contemporáneos. La contribución más importante de Grassman pasó inadvertida hasta su aplicación en 1915 en la teoría general de la relatividad, y es solamente en tiempos recientes cuando su trabajo ha recibido un aprecio pleno. Grassman siguió siendo un oscuro profesor de enseñanza elemental, una profesión para la que, según nos dice E.T. Bell, era "eminentemente inadecuado".

Los números complejos son de capital importancia en álgebra y condujeron en análisis al gran logro de la matemática del siglo XIX —la teoría de funciones analíticas de una variable compleja. Los números complejos juegan también un papel significativo en la teoría de ecuaciones diferenciales y son un argumento indispensable en la teoría y las aplicaciones de circuitos eléctricos lineales y en el estudio, en general, de oscilaciones, vibraciones y fenómenos ondulatorios.

2. LOS NÚMEROS COMPLEJOS

2.1 Definición. *El* ***sistema de los números complejos*** *es el conjunto* C *de todos los pares ordenados de números reales* $z = (x, y)$ *y dos operaciones llamadas adición y multiplicación tales que para cualesquiera dos elementos* $z_1 = (x_1, y_1)$ *y* $z_2 = (x_2, y_2)$ *de* C, *tenemos*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{(adición)}$$

y

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad \text{(multiplicación).}$$

Si $z = (x, y) \in \mathrm{C}$, entonces $x = \mathrm{Rl}\, z$ se llama *la parte real* de z y $y = \mathrm{Im}\, z$ se llama *la parte imaginaria* de z. Debe quedar claro que la parte imaginaria de un número complejo no es menos real que la parte real de un número complejo. Ambos son números reales.

Debe observarse que esta adición de números complejos —pares ordenados de números reales— es la misma que la operación de adición en V_2. De donde las propiedades aditivas de los números complejos son exactamente las propiedades aditivas de los vectores en V_2. La distinción entre C y V_2 se debe a la operación de multiplicación. En V_2 tenemos una operación de multiplicación de un vector por un número real que nos da como resultado un vector; pero no tenemos ninguna operación de multiplicación de dos vectores que nos dé como resultado un vector.

Veremos que el sistema de los números complejos posee las once propiedades especificadas por los primeros once axiomas del sistema de los números reales. Cualquier conjunto de elementos con dos operaciones, adición y multiplicación, que tengan estas once propiedades se llama *campo.*

2.2 Definición. *Un **campo** es un conjunto f y dos operaciones, adición y multiplicación, que satisfacen las siguientes propiedades:*

A_1 Para todo a y b en F, $a+b \in F$.
A_2 Para todo a y b en F, $a+b = b+a$.
A_3 Para todo a, b y c en F, $(a+b)+c = a+(b+c)$.
A_4 Hay un elemento en F, al que denotamos por "0", tal que para todo a en F, $a+0 = a$.
A_5 Para cada a en F, hay un elemento en F, al que denotamos por "$-a$", tal que $a+(-a) = 0$.
M_1 Para todo a y b en F, $ab \in F$.
M_2 Para todo a y b en F, $ab = ba$.
M_3 Para todo a, b y c en F, $(ab)c = a(bc)$.
M_4 Hay un elemento en F, al que denotamos por "1", diferente de 0, tal que para todo a en F, $a \cdot 1 = a$.
M_5 Para cada a en F, diferente de 0, hay un elemento en F, al que denotamos por "a^{-1}", tal que $aa^{-1} = 1$.
D Para todo a, b y c en F, $a(b+c) = ab+ac$.

El sistema de los números reales y el sistema de los números racionales son ejemplos de campos, y en el próximo teorema demostraremos que el sistema de los números complejos es también un campo. En las secciones 4 y 5 del capítulo 1 (pág.24),obtuvimos muchos resultados para los números reales. Como solamente utilizamos las propiedades de campo para probar estos resultados, son válidas para un campo cualquiera. En particular, tales resultados son válidos para los números complejos.

Nota. En términos del concepto de *grupo* tal y como se definió en la sección 6 del capítulo 4, puede definirse un campo como sigue: un conjunto F con dos operaciones, adición y multiplicación, se llama campo si:
1) F es un grupo conmutativo respecto a la operación de adición con elemento neutro 0.
2) Los elementos distintos de cero de F forman un grupo conmutativo respecto a la operación de multiplicación con elemento neutro 1 ($1 \neq 0$).
3) Es válida la ley distributiva: para todo a, b y c en F, $a(b+c) = ab+ac$.

Nota. De acuerdo con nuestro estudio de grupos, sabemos que el elemento neutro y el elemento inverso de un grupo dado son únicos. De donde los elementos neutro e inverso de A_4, A_5, M_4 y M_5 son únicos.

2.3 Teorema. *El sistema de los números complejos,* C, *es un campo.*

PRUEBA. Las propiedades A_1-A_5 se han probado ya para V_2 (pág. 58) y, como hemos señalado anteriormente, la operación de adición en V_2 es la misma que la operación de adición en C. El número complejo $0 = (0, 0)$ y $-z = (-x, -y)$.

M_1. La estabilidad respecto a la multiplicación sigue de la definición 2.1 y la estabilidad de R respecto a la adición y la multiplicación.

M_2. La ley conmutativa de la multiplicación sigue de la definición 2.1 y las leyes conmutativas de la multiplicación y la adición en R:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) = (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + x_1 y_2) = z_2 z_1.$$

M_3. La ley asociativa de la multiplicación sigue otra vez de la definición 2.1 y las leyes asociativa, conmutativa y distributiva para R:

$$\begin{aligned}(z_1 z_2)z_3 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)(x_3, y_3) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3, x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + \\ &\quad + x_3 x_1 y_2 + x_3 x_2 y_1) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 - y_1 x_3 y_2, x_1 x_2 y_3 + x_1 x_3 y_2 + \\ &\quad + x_2 x_3 y_1 - y_2 y_3 y_1) \\ &= (x_1, y_1)(x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2) \\ &= z_1(z_2 z_3).\end{aligned}$$

M_4. El elemento neutro para la multiplicación es $1 = (1, 0) \neq 0$. Para todo $z \in C$, tenemos

$$z \cdot 1 = (x, y)(1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = z.$$

M_5. El inverso multiplicativo de $z \neq 0$ en C, es el número $z^{-1} = (a, b)$ tal que

$$zz^{-1} = (x, y)(a, b) = (xa - yb, xb + ya) = (1, 0) = 1$$

o

$$\begin{aligned} xa - yb &= 1 \\ ya + xb &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones para a y b, tenemos

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$b = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

si $x^2 + y^2 \neq 0$, es decir, si $z = (x, y) \neq (0, 0)$. Así pues, para $z = (x, y) \neq 0$, tenemos

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

D. La ley distributiva se sigue de la ley distributiva para R y las leyes conmutativa y asociativa de la adición para R. Dejamos la prueba al estudiante (problema 2).

Habiendo mostrado que C es un campo, podemos definir las operaciones de sustraccion y división en la misma forma en que las definimos en R.

2.4 Definición. (Sustracción.) *Para* z_1 *y* z_2 *cualesquiera en* C,

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2).$$

2.5 Definición. (División.) *Para* z_1 *y* z_2 *cualesquiera en* C *con* $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}.$$

Podemos establecer una correspondencia uno-uno entre los números reales y un cierto subconjunto de los números complejos en tal forma que las operaciones de adición y multiplicación se preserven. Una correspondencia de tal tipo, uno-uno y que preserva las operaciones definidas, se llama *isomorfismo*. Asociamos cada número real $a \in \mathrm{R}$ con el número complejo $(a, 0) \in \mathrm{C}$. Si $a \leftrightarrow (a, 0)$ y $b \leftrightarrow (b, 0)$, entonces

$$a+b \leftrightarrow (a+b, 0) = (a, 0)+(b, 0)$$

y

$$a \cdot b \leftrightarrow (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0).$$

Así pues los números complejos $\{(x, 0)\}$ con parte imaginaria cero, están asociados con los números reales $\{x\}$, y las sumas y productos de tales números complejos obedecen la misma regla de correspondencia que las sumas y productos de los números reales correspondientes. Como estos números complejos tienen todas las características de los números reales usaremos la convención de identificar el número complejo $(a, 0)$ con el número real a y consideraremos a los números reales como un subconjunto de los números complejos.

Hemos visto que la adición de números complejos es la misma operación que la adición de vectores en V_2. En V_2 hay una segunda operación, la multiplicación de un vector por un número real. Si un número complejo z se multiplica por un número real r, es decir, por un número complejo $(r, 0)$ con parte imaginaria 0, tenemos

$$rz = (r, 0)(x, y) = (rx - 0y, ry + 0x) = (rx, ry).$$

Ésta es exactamente la misma operación que la multiplicación de un vector $(x, y) \in V_2$ por un número real r. Vemos pues, así, que el sistema de los números complejos, C, es el espacio bidimensional vectorial, V_2, con la operación adicional de multiplicación:

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Usando la convención de identificar los números complejos de la forma $(a, 0)$ con el número real a, podemos escribir el número complejo

$z = (x, y)$ en la forma

$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0)+(0, y) \\ &= (x, 0)+(y, 0)(0, 1) \\ &= x+y(0, 1). \end{aligned}$$

Es conveniente tener un símbolo para representar el número complejo (0, 1). En matemáticas, a este número complejo se le denota generalmente por

$$i = (0, 1).$$

Con esta notación, la expresión anterior puede escribirse

$$z = (x, y) = x+yi.$$

El número complejo $i = (0, 1)$ tiene la propiedad de que

$$\begin{aligned} i^2 &= (0, 1)(0, 1) = (0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+0\cdot 1) \\ &= (-1, 0) \end{aligned}$$

lo que, con la convención de identificar el número complejo $(-1, 0)$ con -1, nos da $i^2 = -1$.

Si usamos la notación $z_1 = (x_1, y_1) = x_1+y_1 i$, $z_2 = (x_2, y_2) = x_2+y_2 i$ donde consideramos las x y las y como números complejos, como la ley distributiva es válida en C podemos multiplicar z_1 por z_2 como sigue

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1+y_1 i)(x_2+y_2 i) = x_1 x_2+x_1 y_2 i+x_2 y_1 i+y_1 y_2 i^2 \\ &= (x_1 x_2-y_1 y_2)+(x_1 y_2+x_2 y_1)i \\ &= (x_1 x_2-y_1 y_2, x_1 y_2+x_2 y_1). \end{aligned}$$

Tenemos pues, así, una forma fácil de recordar cómo multiplicar números complejos. Multiplicamos números complejos $z_1 = x_1+y_1 i$, $z_2 = x_2+y_2 i$ usando las leyes asociativa, conmutativa y distributiva, es decir, exactamente como si fueran números reales y reemplazando i^2 por -1 siempre que aparezca.

2.6 Ejemplo. Si $z_1 = (1, 2)$ y $z_2 = (-2, 3)$, encuéntrese $z_1 z_2$.

SOLUCIÓN

$$z_1 z_2 = (1, 2)(-2, 3) = (-2-6, 3-4) = (-8, -1)$$

o

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (1+2i)(-2+3i) = -2+3i-4i+6i^2 \\ &= -2+3i-4i-6 = -8-i. \end{aligned}$$

Asociado con cada número complejo z, tenemos un número complejo llamado su conjugado.

2.7 Definición. *Si $z = (x, y)$ es un número complejo, entonces $\bar{z} = (x, -y)$ se llama **conjugado complejo**, o, simplemente, **conjugado**, de z.*

Tenemos las siguientes propiedades para el conjugado complejo.

2.8 Lema. *Si* $z_1, z_2 \in C$, *entonces*

$$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$$

y

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 .$$

PRUEBA. Se deja la prueba al estudiante (problema 3).

En términos del conjugado complejo, puede darse una forma fácil de recordar para obtener el inverso multiplicativo de un número complejo $z \neq 0$. Como

2.9
$$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2,$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

Lo que, desde luego, concuerda con el resultado obtenido en la prueba de M_5 en la página 489.

Así pues, la división de los números complejos puede efectuarse como ilustra el siguiente ejemplo.

2.10 Ejemplo. Si $z_1 = (1, 2)$ y $z_2 = (-2, 3)$, encuéntrese $\frac{z_1}{z_2}$.

SOLUCIÓN

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(1+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} = \frac{-2-6i^2-4i-3i}{4-9i^2}$$

$$= \frac{4-7i}{4+9} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i = \left(\frac{4}{13}, -\frac{7}{13}\right).$$

Problemas

1. *a*) ¿Es un campo el conjunto de todos los números racionales? Demuéstrese la respuesta.
   b) ¿Es un campo el conjunto de todos los números irracionales? Pruébese la respuesta.
   c) ¿Es un campo el conjunto de todos los enteros? Pruébese la respuesta.
2. Pruébese la ley distributiva para los números complejos.
3. Pruébese el lema 2.8.
4. Pruébese que para todo $z \in C$, $z \cdot 0 = 0$.

5. Pruébese que para z_1 y z_2 cualesquiera en C, $z_1(-z_2) = -(z_1 z_2)$.

6. Pruébese que para todo z_1 y z_2 en C, $(-z_1)(-z_2) = z_1 z_2$.

7. Pruébese que para todo $z \in C$, $-(-z) = z$.

8. Pruébese que para todo $z \in C$, $(-1)z = -z$.

9. Pruebese que: si z_1 y z_2 están en C y $z_1 z_2 = 0$, entonces o $z_1 = 0$ o $z_2 = 0$.

10. Pruébese que: si z_1 y z_2 están en C y $z_1 z_2 \neq 0$, entonces $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}$; es decir, $\dfrac{1}{z_1 z_2} = \left(\dfrac{1}{z_1}\right)\left(\dfrac{1}{z_2}\right)$.

11. Pruébese que: si $z \in C$ y $z \neq 0$, entonces $(z^{-1})^{-1} = z$; es decir, $\dfrac{1}{1/z} = z$.

12. Pruébese que: si z_1, z_2 y z_3 están en C y $z_2 \neq 0$, $z_3 \neq 0$, entonces $\dfrac{z_1 z_3}{z_2 z_3} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

13. Pruébese que: si $z_1 + z_2 = z_1 + z_3$, entonces $z_2 = z_3$. Esta es la ley de cancelación para la adición.

14. Pruébese que: si $z_1 z_2 = z_1 z_3$ y $z_1 \neq 0$, entonces $z_2 = z_3$. Esta es la ley de cancelación para la multiplicación.

15. Si $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 6-i$, y $z_3 = i\sqrt{2}$, encuéntrense

a) $z_1 + z_2$ *b*) $z_1 - z_2$
c) $z_1 \cdot z_2$ *d*) $z_1 \cdot z_3$
e) $\bar{z}_3$ *f*) $z_1 \cdot \bar{z}_2$
g) z_1/z_2 *h*) $\dfrac{1}{z_1}(z_2 + \bar{z}_3)$.

16. Demuéstrese que:

a) $\text{Rl } z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ *b*) $\text{Im } z = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$
c) z es real $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ *d*) z es imaginario $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

17. Exprésese cada uno de los siguientes números complejos en la forma $x + yi$:

a) $2(1-i)+3(1+i)$ *b*) $(1-i)(1+i)$
c) $(3-4i)(-2+4i)$ *d*) $\dfrac{1}{i}$

e) $\dfrac{1-i}{1+i}$ *f*) $(1+i)^3$

g) $i^{24}+i^7+i^6$ *h*) i^n (n un entero positivo)

i) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$ *j*) $\dfrac{1}{1+i}-\dfrac{1}{1-i}$.

18. Resuélvanse las ecuaciones:

a) $(2-5i)z = 1$ *b*) $(1-2i)z+3 = 0$

c) $(1+i)z-(1-i) = 4$ *d*) $z+\bar{z} = 4$

e) $z-\bar{z} = 4i$ *f*) $z+\dfrac{1}{z} = 0$

g) $\begin{cases} (1-i)z_1+2iz_2 = 3 \\ 4z_1+(1-i)z_2 = 2+i. \end{cases}$

3. NÚMEROS COMPLEJOS: LA FORMA POLAR

Puesto que los números complejos son vectores bidimensionales, es natural identificar los números complejos con los puntos del plano R^2 y obtener así una representación geométrica del sistema de los números complejos. Con esta asociación en mente, adoptamos a menudo una cierta imprecisión de lenguaje y usamos las palabras "punto" y "número complejo" indistintamente y hablamos del plano R^2 como del "plano complejo".

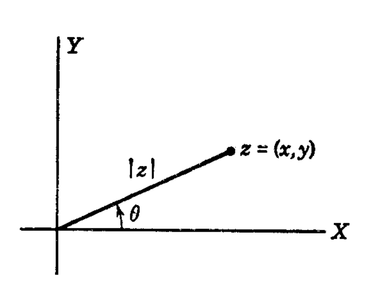


FIGURA 1

3.1 Definición. *El* ***valor absoluto*** *o* ***módulo*** *de un número complejo $z = (x, y)$ es la longitud del vector (x, y), es decir,*

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

3.2 Definición. *El* ***argumento*** *o* ***amplitud*** *de un número complejo distinto de cero $x = (x, y)$, escrito:* ***Arg*** *z o* ***Am*** *z, es una medida en radianes del ángulo de inclinación del vector (x, y).*

Como el valor absoluto de un número complejo z es la longitud de un vector, tiene las siguientes propiedades (pág. 70):

3.3 $|z| \geqslant 0$; $|z| = 0$ implica $z = 0$.

3.4 $$|rz| = |r|\,|z| \text{ para } r \in \mathrm{R} \text{ y } z \in \mathrm{C}.$$

3.5 $$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad \text{(desigualdad del triángulo).}$$

Por 2.9 tenemos

3.6 $$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

En el plano complejo, el punto $\bar{z}$ es la imagen simétrica respecto al eje X del punto z.

El valor absoluto de los números complejos tiene las propiedades adicionales:

3.7 $$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$$

y

3.8 $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad (z_2 \neq 0).$$

Para probar 3.7, nótese que por 3.6

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = (z_1 z_2)(\bar{z}_1 \bar{z}_2) \\ &= (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 \end{aligned}$$

y de ello sigue 3.7. Como

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2} z_2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2|$$

obtenemos 3.8 dividiendo por $|z_2|$.

La representación geométrica de los números complejos sugiere otra forma de escribirlos. Como el punto $\mathbf{P} = (x, y)$ puede también representarse por coordenadas polares (r, θ) donde

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta, \end{cases}$$

el número complejo $z = x + iy$ puede también escribirse en la *forma polar*

3.9 $$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Aquí, $r = |z|$ y $\theta = \operatorname{Arg} z$. Es conveniente introducir la *exponencial compleja*, $e^{i\theta}$, definida por la relación

3.10 $$e^{i\theta} = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

En términos de la exponencial compleja, podemos expresar la forma polar del número complejo $z = x + iy$ por

3.11 $$z = re^{i\theta},$$

donde, de nuevo, $r = |z|$ y $\theta = \text{Arg}\, z$. La forma polar es particularmente conveniente para efectuar las operaciones de multiplicación y división, y para encontrar potencias y raíces de los números complejos.

De acuerdo con la ecuación 3.10, usando las identidades 3.9 y 3.10 del capítulo 6 (pág. 273), tenemos

3.12
$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \text{ sen } \theta_1)(\cos \theta_2 + i \text{ sen } \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2) + \\ &\quad + i(\cos \theta_1 \text{ sen } \theta_2 + \text{sen } \theta_1 \cos \theta_2) \\ &= \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned}$$

Además

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta},$$

ya que por 3.12

$$e^{i\theta} e^{-i\theta} = e^{i0} = (\cos 0, \text{ sen } 0) = 1.$$

Por tanto

3.13
$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} = e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Así pues, para multiplicar exponenciales complejas añadimos los exponentes y, para dividirlas, restamos los exponentes.

Usando las ecuaciones 3.7, 3.8, 3.12, y 3.13, tenemos

3.14
$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

y si $z_2 \neq 0$,

3.15
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Así pues, expresados en palabras 3.14 y 3.15 nos dicen.

Para multiplicar dos números complejos en forma polar multiplicamos los módulos y sumamos los argumentos y, para dividir dos números complejos en forma polar, dividimos los módulos y restamos los argumentos. Es decir,

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \quad \text{Arg}\,(z_1 z_2) = \text{Arg}\, z_1 + \text{Arg}\, z_2,$$

y para $z_2 \neq 0$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

Usando 3.14 e inducción matemática, puede mostrarse que

$$|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1|\,|z_2| \cdots |z_n|$$

y

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2 \cdots z_n) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + \cdots + \operatorname{Arg} z_n.$$

Si en estas igualdades tomamos todos los n complejos iguales, tenemos

$$|z^n| = |z|^n = r^n$$

y

$$\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z = n\theta,$$

de donde obtenemos la fórmula conocida como fórmula de De Moivre:

3.16 $$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$$

Consideremos el problema de encontrar las raíces n-ésimas de un número complejo z. Por una raíz n-ésima de z entendemos un número complejo cualquiera ζ tal que $\zeta^n = z$. Sea

$$\zeta = \sigma e^{i\varphi}$$

una raíz n-ésima de $z = re^{i\theta}$. Es decir

$$\zeta^n = \sigma^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}.$$

Esta última ecuación implica que

$$\sigma^n = r \quad \text{y} \quad e^{in\varphi} = e^{i\theta}.$$

Si $\sigma^n = r$, entonces $\sigma = r^{1/n}$ donde $r^{1/n}$ es el número real no negativo cuya potencia n-ésima es r. Ahora, para los números θ_1 y θ_2,

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} &\Leftrightarrow e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2\pi k \text{ para } k \text{ un entero.} \end{aligned}$$

De aquí que $e^{in\varphi} = e^{i\theta}$ si y sólo si $n\varphi = \theta + 2\pi k$ para k un entero o

$$\varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n} \qquad (k \text{ un entero}).$$

Ahora bien, entre los valores antes dados para φ, cualesquiera que difieran en un múltiplo entero de 2π resultarán en el mismo número complejo ζ.

Es, por tanto, suficiente tomar $k = 0, 1, \ldots, n-1$ para obtener todas las raíces n-ésimas distintas de z. Así pues, si

$$z = re^{i\theta},$$

entonces, para n un entero positivo, los números

$$r^{1/n} e^{i(\theta + 2\pi k)/n}$$

donde $k = 0, 1, \ldots, n-1$ son las raíces n-ésimas de z.

Las raíces n-ésimas de z se encuentran sobre una circunferencia de radio $r^{1/n}$ con centro en el origen y se encuentran igualmente espaciadas, con una de ellas teniendo un argumento igual a $\frac{1}{n}$ Arg z.

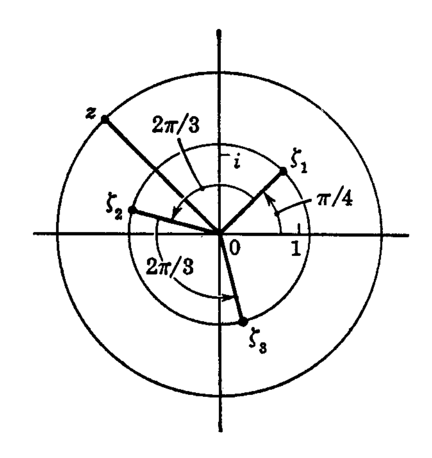


FIGURA 2

3.17 Ejemplo. Encuéntrense las raíces cúbicas de $z = -1+i$.

SOLUCIÓN. (Figura 2.) $z = -1+i = \sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}$, de modo que $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \text{Arg } z = \dfrac{3\pi}{4}$. De donde las raíces cúbicas de z son

$$\zeta = \sqrt[6]{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right)} \text{ donde } k = 0,\ 1,\ 2.$$

Es decir, las raíces cúbicas de z son los números

$$\zeta_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\pi/4}, \quad \zeta_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i11\pi/12}, \quad \text{y} \quad \zeta_3 = \sqrt[6]{2}\, e^{i19\pi/12}.$$

3.18 Ejemplo. Evaluar

$$\frac{(5+5i)(-\sqrt{3}+3i)}{-\sqrt{3}-i}$$

usando la forma polar.

SOLUCIÓN. Tenemos

$$\frac{5\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}\, 2\sqrt{3}\, e^{i2\pi/3}}{2e^{i7\pi/6}} = 5\sqrt{6}\, e^{-i\pi/4} = 5\sqrt{6}\,\frac{1-i}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{3}(1-i).$$

3.19 Ejemplo. Evaluar $(-\sqrt{3}+3i)^6$.

SOLUCIÓN

$$(-\sqrt{3}+3i)^6 = (2\sqrt{3}\,e^{i2\pi/3})^6 = 2^6 3^3 e^{i12\pi/3}$$
$$= 2^6 3^3 e^{i0} = 2^6 3^3 = 1728.$$

Problemas

1. En cada uno de los siguientes, "plotéese" el punto correspondiente y exprésese el número en formas polar y exponencial compleja:

a) i *b*) -1 *c*) $-i$

d) $1-i$ *e*) $1+i$ *f*) $-4i$

g) $-3+\sqrt{3}i$ *h*) $5-5i$ *i*) $\sqrt{3}+3i$

j) $3-4i$ *k*) $-4+4\sqrt{3}i$ *l*) $-2+5i$

m) $3i$ *n*) $-3-7i$ *o*) -7

p) $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$.

2. Efectúense las operaciones indicadas y exprésese el resultado en la forma $x+iy$:

a) $3e^{i\pi/3}\,2\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}$ *b*) $5e^{i2\pi/3}\,4e^{i7\pi/6}$

c) $2e^{i5\pi/6}\,3e^{i\pi/2}$ *d*) $\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}\,\sqrt{3}\,e^{i5\pi/4}$

e) $\dfrac{2\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}}{3e^{i\pi/2}}$ *f*) $\dfrac{7e^{i0}}{3e^{i\pi}}$.

3. Exprésese en términos de la exponencial compleja:

a) $(1+i)^3$ *b*) $(-3+\sqrt{3}i)^4$

c) $(5-5i)^{-6}$ *d*) $(-1+\sqrt{3}i)^5$

e) $(-2+5i)^{-3}$ *f*) $(-3-7i)^4$

g) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)^5$ *h*) $(5+12i)^6$

i) $\mathrm{Rl}((1+i)e^{i\omega t})$ *j*) $\mathrm{Im}((1+i)e^{i\omega t})$

k) $\mathrm{Rl}\left(\dfrac{1}{1+i}\,e^{i\omega t}\right)$ *l*) $\mathrm{Rl}\left(\dfrac{1-i}{2+3i}\,e^{i\omega t}\right)$.

4. Pruébese que $|1-z| = |1-\bar{z}|$ e interprétese geométricamente.

5. Identifíquense geométricamente los conjuntos de números complejos con la propiedad de que:

a) $|z| = 1$ *b*) $\mathrm{Arg}\, z = \pi/2$

c) $\mathrm{Rl}\, z = -2$ *d*) $\mathrm{Rl}\, z \geqslant -2$

e) $\mathrm{Im}\, z = 1$ *f*) $\mathrm{Im}\, z > 0$

g) $\operatorname{Rl} z > 0$ *h*) $|z-1| < 1$
i) $|z+1| < 1$ *j*) $|z-i| = |z-1|$
k) $|z-1|+|z+1| = 2$ *l*) $|z-1|+|z+1| = 4$
m) $|z-1| = |z+1|$ *n*) $|z-1|-|z+1| = 2$.

6. Encuéntrense todas las raíces que se indican:

a) Raíces cuadradas de $2i$.
b) Raíces cúbicas de -8.
c) Raíces cuartas de $16-16\sqrt{3}\,i$.
d) Raíces sextas de -1.
e) Raíces cúbicas de $-27+27i$.

7. Encuéntrense todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^3-27 = 0$ *b*) $x^3-125 = 0$
c) $x^5-1 = 0$ *d*) $x^7+1 = 0$
e) $x^4+16 = 0$ *f*) $x^2+24 = 0$.

8. Mediante la consideración de las partes real e imaginaria del producto $(a+bi)e^{i\theta}$, demuéstrese que

$$a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta = \sqrt{a^2+b^2} \cos (\theta+\delta)$$

y

$$a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen} (\theta+\delta)$$

donde $\delta = \operatorname{Arg}(a+bi)$. Interprétese el resultado geométricamente.

9. Úsese el método del problema 8 para demostrar que

a) $\cos \theta - \operatorname{sen} \theta = \sqrt{2} \cos (\theta+\pi/4)$
b) $\cos \theta + \operatorname{sen} \theta = \sqrt{2} \operatorname{sen} (\theta+\pi/4)$.

10. Exprésese cada uno de los números indicados en la forma $A \operatorname{sen} (\theta+\delta)$. Úsense tablas trigonométricas para hallar el valor aproximado de δ.

a) $2 \cos \theta + 5 \operatorname{sen} \theta$ *b*) $2 \cos \theta - 5 \operatorname{sen} \theta$
c) $2 \operatorname{sen} \theta + 5 \cos \theta$ *d*) $5 \cos (\theta+\pi/8) + 18 \operatorname{sen} (\theta+\pi/8)$.

11. Demuéstrese que:

a) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ *b*) $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$
c) $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{1}{2i}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$ *d*) $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$
e) $\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ *f*) $\cos^3 \theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3 \cos \theta)$.

12. Úsese la fórmula de Demoivre para demostrar que:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta,$$

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta.$$

13. Demuéstrese que: $(a, b)^{\perp} = e^{i\pi/2}(a, b) = i(a, b)$.

14. Demuéstrese que la rotación U_θ que pasa a través del ángulo θ puede representarse en la forma:

$$U_\theta(x, y) = e^{i\theta}(x+iy).$$

4. SOLUCIÓN DE ECUACIONES POLINOMIALES

En la sección 1, vimos que la ecuación cuadrática

4.1 $$ax^2+bx+c = 0 \quad (a \neq 0)$$

tiene las raíces

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

si $b^2-4ac \geqslant 0$. Si $b^2-4ac < 0$, la ecuación 4.1 no tiene raíces en el campo de los números reales. Para que toda ecuación polinomial tenga raíces, generalizamos nuestra definición de función polinomial extendiendo el dominio de definición de las funciones polinomiales al campo de los números complejos.

4.2 Definición. ***Un polinomio sobre el campo de los números complejos*** *es una función con valores en el campo complejo de una variable compleja de la forma*

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k I^k$$

donde las a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ *son funciones constantes valuadas en el campo complejo con dominio* C, *e* I *es la función identidad de valores complejos* $\{(z, z) \mid z \in \mathrm{C}\}$.

En esta sección, cuando hablamos de un polinomio queremos decir un polinomio sobre el campo de los números complejos al menos que se avise expresamente lo contrario.

Con nuestra definición generalizada de un polinomio, todo polinomio cuadrático

$$aI^2+bI+c \quad (a \neq 0)$$

tiene ceros dados por la fórmula cuadrática

4.3 $$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

donde $\sqrt{b^2-4ac} \geqslant 0$ si $b^2-4ac \geqslant 0$, y $\sqrt{b^2-4ac}$ denota una cualquiera de las raíces cuadradas de b^2-4ac si b^2-4ac no es $\geqslant 0$. La polinomial cuadrática puede escribirse en la forma factorizada

$$aI^2+bI+c = a(I-r_1)(I-r_2)$$

donde r_1, r_2 son los dos ceros dados por la fórmula cuadrática.

Hay fórmulas para los ceros de las funciones polinomiales generales de tercero y cuarto grado aunque son mucho más complicadas que la fórmula cuadrática. Así pues, todas las funciones polinomiales de cuarto o menor grado tienen ceros. Puede probarse que no pueden existir fórmulas algebraicas para los ceros de las funciones polinomiales generales de quinto grado o grado más alto. Sin embargo, hay un teorema, llamado generalmente el teorema fundamental del álgebra, que asegura la existencia de un cero para toda función polinomial de grado positivo. Aunque el teorema asegura la existencia de un cero tal, no da información de cómo encontrarlo. Damos aquí el teorema sin prueba.

4.4 Teorema. (Teorema fundamental del álgebra.) *Todo polinomio de grado positivo sobre el campo de los números complejos tiene un cero.*

Si podemos encontrar un factor lineal, $I-r$, de un polinomio P de grado n, entonces

$$P = (I-r)Q$$

donde Q es un polinomio de grado $n-1$. El número r es un cero de P, ya que

$$P(r) = (r-r)\,Q(r) = 0.$$

Así pues, el problema de encontrar ceros de un polinomio está relacionado con el problema de la división de polinomios. El siguiente teorema nos asegura que para cualesquier dos ecuaciones polinomiales P y $D \neq 0$, P puede dividirse por D, dando un único *cociente* Q y *residuo* (o *resto*) R.

4.5 Teorema. (Algoritmo de la división.) *Si P es un polinomio de grado n y $D\,(\neq 0)$ es un polinomio de grado m, entonces existen polinomios únicos Q y R, donde R es la función cero o tiene grado menor que m, tales que*

4.6 $$P = QD+R.$$

PRUEBA. Probamos primero que los polinomios Q y R existen.

Caso 1. Si $m > n$, entonces

$$P = 0D + P$$

y

$$Q = 0, \quad R = P.$$

Caso 2. Si $m \leqslant n$, efectuamos la prueba usando el segundo principio de inducción matemática (pág. 331). Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los enteros no negativos n para los que el teorema se verifica.

1) Si $n = 0$, entonces $m = 0$, de modo que

$$P = \frac{P}{D} D + 0.$$

Como D es una función constante, P/D es un polinomio y tenemos

$$Q = P/D, \quad R = 0.$$

Así pues, $0 \in \mathcal{S}$.

2) Si, para todo $n \leqslant k$, $n \in \mathcal{S}$, demostraremos que $k+1 \in \mathcal{S}$. Sea

$$P = a_{k+1} I^{k+1} + a_k I^k + \dots + a_0 \qquad (a_{k+1} \neq 0)$$

y

$$D = b_m I^m + b_{m-1} I^{m-1} + \dots + b_0 \qquad (b_m \neq 0).$$

La polinomial

$$P_1 = P - \frac{a_{k+1}}{b_m} I^{k+1-m} D$$

es de grado k o menor. Luego existen polinomios Q_1 y R tales que R es o la función cero o de grado menor que m y

$$P_1 = Q_1 D + R.$$

Luego

$$\begin{aligned} P &= P_1 + \frac{a_{k+1}}{b_m} I^{k+1-m} D \\ &= \left[Q_1 + \frac{a_{k+1}}{b_m} I^{k+1-m} \right] D + R \\ &= QD + R \end{aligned}$$

y $k+1 \in \mathcal{S}$.

El conjunto $\mathcal{S}$ tiene las propiedades 1) $0 \in \mathcal{S}$ y 2) si, para todo $n \leqslant k$, $n \in \mathcal{S}$, entonces $k+1 \in \mathcal{S}$. Por tanto, por el segundo principio de inducción, $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros no negativos, y para todos los enteros no negativos n, hemos demostrado la existencia de los polinomios Q y R.

Para demostrar que los polinomios Q y R son únicos, supongamos que hay otros polinomios Q_1 y R_1 donde R_1 es o la función cero o de grado menor que m, tales que

$$P = Q_1 D + R_1 = QD + R.$$

Entonces

4.7 $$[Q_1 - Q]D = R - R_1.$$

Ahora bien, si dos polinomios tienen grados j y k, entonces su producto tiene grado $j+k$. Luego si $Q_1 - Q$ no es la función cero, entonces $(Q_1 - Q)D$ tiene grado $\geqslant m$. Pero $R - R_1$ es la función cero o de grado menor que m. Debemos, por tanto, tener que $Q_1 - Q = 0$ y

$$Q_1 = Q.$$

Pero, por 4.7, se sigue entonces que $R - R_1 = 0$ y

$$R_1 = R.$$

Y esto completa la prueba.

4.8 Definición. *Un polinomio D se dice que* ***divide*** *a un polinomio P y P se dice que es* ***divisible*** *por D si $P = QD$.*

Obtenemos un caso especial importante de (4.6) cuando $D = I - r$. Como en este caso $m = 1$, el resto es cero o de grado cero; es decir, R es una función constante. Tenemos entonces

4.9 $$P = (I - r)Q + R.$$

Así pues, tenemos los siguientes corolarios al teorema 4.5.

4.10 Corolario. (Teorema del residuo.) *Cuando un polinomio P se divide por $I - r$, el residuo es $P(r)$.*

PRUEBA. Por 4.9,

$$P(r) = (r - r)\,Q(r) + R = R.$$

4.11 Corolario. (Teorema del factor.) *Un polinomio P es divisible por $I - r$ si y sólo si r es un cero de P.*

PRUEBA. Si $P(r) = 0$, entonces por el teorema del residuo $R = 0$ y 4.9 nos da

$$P = (I - r)Q.$$

Recíprocamente, si P es divisible por $I-r$, el resto $R = 0$, y, de nuevo, por el teorema del residuo $P(r) = 0$.

4.12 Definición. *Si el polinomio D^k divide al polinomio P y si ninguna de las potencias más altas de D divide a P, entonces D se dice que es un **factor de P de multiplicidad** k.*

Si $I-r$ es un factor de P, entonces, según el teorema del factor r es un cero de P. Si $I-r$ es un factor de P de multiplicidad k, entonces r se dice que es un cero de P de multiplicidad k. Al contar los ceros de P, un cero de multiplicidad k se contará como k ceros.

Como una consecuencia inmediata del teorema fundamental del álgebra y del teorema del factor, tenemos el siguiente teorema.

4.13 Teorema. *Si un polinomio P sobre el campo de los números complejos tiene grado $n > 0$, entonces P tiene exactamente n ceros.*

PRUEBA. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los enteros positivos n para los que el teorema se verifica.

1) $1 \in \mathcal{S}$ ya que un polinomio de grado uno tiene exactamente un cero.

2) Según el teorema 4.4, P tiene un cero r_1, y de acuerdo con el corolario 4.11, $P = (I-r_1)Q$. Ahora Q es de grado $n-1$. Si $n-1 \in \mathcal{S}$, entonces Q tiene exactamente $n-1$ ceros y P tiene exactamente $(n-1)+1 = n$ ceros, de modo que $n \in \mathcal{S}$.

Por tanto, por el principio de inducción, $\mathcal{S}$ es el conjunto de todos los enteros positivos y P tiene exactamente n ceros.

Si la función polinomial $P = a_n I^n + \ldots + a_1 I + a_0$ tiene n ceros $r_1, \ldots, r_n$, que puede que sean distintos o no, entonces

$$P = a_n(I-r_1)\ldots(I-r_n).$$

4.14 Corolario. *Si $P = a_n I^n + \ldots + a_1 I + a_0$ y $Q = b_n I^n + \ldots + b_1 I + b_0$ son polinomios de grado n y si $P(x) = Q(x)$ para $n+1$ valores distintos de x, entonces $P = Q$. Es decir, $a_k = b_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n$.*

PRUEBA. $P-Q$ es o el polinomio cero o un polinomio de grado cuando más n. Ahora bien, según el teorema 4.13, si $P-Q$ tiene un grado positivo k, entonces $P-Q$ tiene $k \leqslant n$ ceros. Como suponemos que $P-Q$ tiene $n+1$ ceros ($P(x) = Q(x)$ o $(P-Q)(x) = 0$ para $n+1$ valores distintos de x), $P-Q$ no puede tener un grado positivo. Luego $P-Q$ es una función constante. Como $P-Q$ toma el valor cero, $P-Q = 0$ y $P = Q$.

En el resto de esta sección supondremos siempre que nuestros polinomios tienen todos sus coeficientes reales.

4.15 Teorema. *Si un polinomio P con coeficientes reales tiene el cero r, entonces P tiene también el cero $\bar{r}$.*

PRUEBA. Sea

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k I^k$$

donde las a_k son funciones constantes sobre C con valores reales. Si r es un cero de P, entonces

$$P(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = 0$$

y

$$\overline{P(r)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k r^k} = \bar{0} = 0.$$

Ahora bien, por el lema 2.8 (pág. 492),

$$\overline{P(r)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k r^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k r^k} = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{r}^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{r}^k = P(\bar{r})$$

ya que para a_k real $\bar{a}_k = a_k$. De donde

$$P(\bar{r}) = \overline{P(r)} = 0$$

y $\bar{r}$ es un cero de P.

Como se señaló al comienzo de esta sección, una función polinomial cuadrática aI^2+bI+c con coeficientes reales, no tiene ceros reales si su discriminante $b^2-4ac < 0$. Así pues, las funciones polinomiales cuadráticas con coeficientes reales y discriminante negativo no son reducibles a factores lineales con coeficientes reales. Diremos que son *irreducibles* en términos de polinomios con coeficientes reales. Como una consecuencia del teorema 4.13 una función polinomial con coeficientes reales tiene una factorización en factores lineales. Sin embargo, los coeficientes en los factores no tienen que ser necesariamente reales. El teorema 4.15 nos dice que todo factor lineal correspondiente a un cero complejo, $a+bi$ con $b \neq 0$, puede parearse con un factor lineal correspondiente al cero conjugado $a-bi$ El producto de dos tales factores lineales,

$$[I-(a+bi)]\,[I-(a-bi)] = (I-a)^2+b^2,$$

es un polinomio cuadrático con coeficientes reales. De aquí puede deducirse, el siguiente teorema.

4.16 Teorema. *Una función polinomial con coeficientes reales puede escribirse*

como un número real por un producto de factores cuadráticos irreducibles con coeficientes reales y factores lineales con coeficientes reales.

Problemas

1. Encuéntrese el cociente y el residuo cuando el polinomio P se divide por el polinomio D, y exprésese P en la forma $P = QD+R$:

a) $P = 2I^3-3I+5;\ D = I-4$
b) $P = 3I^4+2I^3+I^2+4I+2;\ D = I^2+2$
c) $P = \frac{1}{2}I^3+2I^2-I+3;\ D = I^2+I+2$
d) $P = 4I^5-I^4+2I^2+1;\ D = I^3+2I+3$
e) $P = 5I^5-2I^4+2I^2+3I-7;\ D = 2I^3-5I^2+1$
f) $P = 4I^4+I^3+I-3;\ D = 3I^2-2I+4.$

2. Exprésense los siguientes polinomios en la forma $a_n(I-r_1)\ \dots\ (I-r_n)$:

a) I^3-3I^2+3I-1
b) I^3-2I^2-5I+6
c) I^3-1
d) $2I^3-3I^2+5I-4$
e) $I^3-(1+2i)I^2+(3+2i)I-3$
f) $I^3-2iI^2+3I-6i.$

3. Demuéstrese que $I-a$ es un factor de I^n-a^n si n es un entero positivo.

4. Demuéstrese que $I+a\ (a \neq 0)$ es un factor de I^n-a^n si n es un entero positivo par y que $I+a$ no es un factor de I^n-a^n si n es un entero positivo impar.

5. Demuéstrese que $I+a\ (a \neq 0)$ es un factor de I^n+a^n si n es un entero positivo impar y que $I+a$ no es un factor de I^n+a^n si n es un entero positivo par.

6. Demuéstrese que $I-a\ (a \neq 0)$ no es un factor de I^n+a^n si n es un entero positivo.

7. Pruébese que si $\omega \neq 1$ es un número complejo, entonces

$$1+\omega+\ \dots\ +\omega^n = \frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega}.$$

8. Resuélvase la ecuación $1+z+z^2+z^3 = 0.$
Sugerencia. Úsese la fórmula del problema 7.

9. Demuéstrese que si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k I^k$ es un polinomio con la propiedad de que

$$\overline{P(z)} = P(\bar{z}) \text{ para todo } z \in \mathrm{C},$$

entonces los coeficientes $a_k (k = 0, 1, \dots, n)$ son todos reales.

10. Sea P un polinomio con coeficientes reales. Demuéstrese que un

número real r es un cero de P de multiplicidad 2 si y sólo si $P(r) = P'(r) = 0$ y $P''(r) \neq 0$. Explíquese cuál es el comportamiento de P cerca del cero r.

Sugerencia. Si r es un cero de multiplicidad k, entonces

$$P(x) = (x-r)^k Q(x) \text{ donde } Q(r) \neq 0.$$

11. Generalícese el resultado del problema 10.

5. DIVISIÓN SINTÉTICA

El método de la división sintética ha sido diseñado para facilitar la obtención del cociente Q y el residuo R cuando un polinomio P se divide por el polinomio $I-r$.

Supongamos

$$P = a_n I^n + a_{n-1} I^{n-1} + \cdots + a_1 I + a_0.$$

Entonces si

$$P = (I-r)Q + R,$$

Q es un polinomio de grado $n-1$ y R es una función constante. Sea

$$Q = b_{n-1} I^{n-1} + b_{n-2} I^{n-2} + \cdots + b_1 I + b_0.$$

Deseamos determinar R y los coeficientes de Q. Como

$$\begin{aligned} P &= (I-r)Q + R \\ &= b_{n-1} I^n + (b_{n-2} - rb_{n-1}) I^{n-1} + \cdots + (b_0 - rb_1) I + (R - rb_0), \end{aligned}$$

igualando coeficientes en las dos expresiones para P (corolario 4.14), tenemos

$$a_n = b_{n-1}, \quad a_{n-1} = b_{n-2} - rb_{n-1}, \ldots, \quad a_1 = b_0 - rb_1, \quad a_0 = R - rb_0.$$

Resolviendo este sistema para R y los coeficientes de Q, obtenemos

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = a_{n-1} + rb_{n-1}, \ldots, \quad b_0 = a_1 + rb_1, \quad R = a_0 + rb_0.$$

Para fines de cálculo, podemos arreglar el trabajo de acuerdo con el siguiente esquema:

a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0	$\lfloor r$
	rb_{n-1}	$\ldots$	rb_1	rb_0	
$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + rb_{n-1}$	$\ldots$	$b_0 = a_1 + rb_1$	$R = a_0 + rb_0$	

De esta forma, con sólo escribir ordenadamente los coeficientes y efectuar unas sencilla multiplicación y adición, podemos obtener los coeficientes del cociente y el residuo.

Debe notarse que si una de las potencias de I no aparece en el polinomio

entonces esa potencia de I tiene coeficiente cero y la división sintética debe tener un cero en la posición correspondiente.

Un segundo detalle que debe tenerse en cuenta es que la división sintética se ha diseñado para la división por $I-r$, de modo que cuando dividimos por $I+a$ hemos de poner $r = -a$.

5.1 Ejemplo. Encuéntrense el cociente y el residuo cuando el polinomio $3I^4+2I^2+I+4$ se divide por $I+2$.

SOLUCIÓN. Usando la división sintética, tenemos

3	0	2	1	4	$\lfloor -2$
	-6	12	-28	54	
3	-6	14	-27	$\lfloor 58$	

Así pues $3I^3-6I^2+14I-27$ es el cociente, y el residuo es 58.

5.2 Ejemplo. Si $P = 5I^3-3I^2+1$, encontrar $P(6)$.

SOLUCIÓN. De acuerdo con el corolario 4.10, $P(6)$ es igual al residuo de la división de P por $I-6$. Tenemos, pues, usando la división sintética

5	-3	0	1	$\lfloor 6$
	30	162	972	
5	27	162	$\lfloor 973$	

y $P(6) = 973$.

Problemas

1. Encontrar el cociente y el residuo

a) si $P = I^2-I+2$ es dividido por $I-2$
b) si $P = 3I^3+I^2-4I+2$ es dividido por $I-3$
c) si $P = I^5-I^3+2I^2+1$ es dividido por $I-1$
d) si $P = I^4+5I^2+I-3$ es dividido por $I+3$
e) si $P = 5I^3-3I^2+I-1$ es dividido por $I+2$
f) si $P = 3I^5+2I^4+3I$ es dividido por $I+5$.

2. Usando la división sintética,

a) si $P = I^3-4I^2-8I-50$, encontrar $P(2)$, $P(-2)$, $P(3)$
b) si $P = I^4-3I^3+2I^2-I+5$, encontrar $P(1)$, $P(\frac{1}{2})$, $P(-2)$
c) si $P = 3I^4+5I^2-8I+2$, encontrar $P(-2)$, $P(0.5)$, $P(-1.5)$
d) si $P = 2I^5-3I^3+4I-2$, encontrar $P(1)$, $P(-1)$, $P(2)$
e) si $P = 2I^5-I^2+I-5$, encontrar $P(-1)$, $P(1)$, $P(3)$
f) si $P = 1.5I^4-2.2I^3+1.3I+2.3$, encontrar $P(1)$, $P(0.3)$.

6. RAÍCES REALES DE ECUACIONES POLINOMIALES

Hasta este momento, las ecuaciones polinomiales consideradas han tenido coeficientes que eran números reales cualesquiera. En esta sección, discutiremos el problema de encontrar las raíces racionales de ecuaciones polinomiales con coeficientes racionales.

Notamos en primer lugar que dada una ecuación polinomial con coeficientes racionales, si multiplicamos por el mínimo denominador común de los coeficientes, la ecuación resultante tendrá coeficientes enteros. Así pues es suficiente discutir el problema de encontrar las raíces racionales de las ecuaciones polinomiales con coeficientes enteros.

Antes de enunciar el teorema acerca de las raíces racionales de tales ecuaciones, damos la siguiente definición.

6.1 Definición. *Dos enteros c y d se dice que son* ***primos relativos*** *si los únicos enteros que dividen a ambos, c y d, son* ± 1.

6.2 Teorema. *Si el número racional* c/d*, donde c y d son primos relativos, es una raíz de la ecuación*

6.3 $$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (a_n \neq 0),$$

con coeficientes enteros, entonces c divide a a_0 *y d divide a* a_n.

PRUEBA. Como c/d es una raíz de 6.3, tenemos

$$a_n (c/d)^n + a_{n-1} (c/d)^{n-1} + \cdots + a_1 (c/d) + a_0 = 0.$$

Multiplicando por d^n para hacer desaparecer las fracciones, obtenemos

6.4 $$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} d + \cdots + a_1 c d^{n-1} + a_0 d^n = 0.$$

Esta última ecuación puede escribirse en la forma

$$c(a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} d + \cdots + a_1 d^{n-1}) = -a_0 d^n.$$

Pero el primer miembro de esta ecuación es un entero que tiene c como un factor. Luego c divide a $-a_0 d^n$. Pero como c y d son primos relativos, c y d^n son también primos relativos.[1] Como c divide a $-a_0 d^n$ y no tiene factores en común con d^n, c divide a a_0.

Escribiendo 6.4 en la forma

$$d(a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c d^{n-2} + a_0 d^{n-1}) = -a_n c^n$$

y usando un argumento análogo, encontramos que d divide a a_n.

[1] Este argumento hace uso del hecho de que todo entero positivo puede ser factorizado en un producto de positivos primos (enteros irreducibles) en una forma y sólo en una forma. No siendo los factores primos de c factores de d, tampoco son factores de d^n.

6.5 Corolario. *Todas las raíces racionales de la ecuación polinomial*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con coeficientes enteros son enteros, y divisores de a_0.

6.6 Ejemplo. Encontrar todas las raíces de la ecuación

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 9x - 5 = 0.$$

SOLUCIÓN. Las únicas raíces racionales posibles son

$$\pm\tfrac{1}{2},\ \pm 1,\ \pm\tfrac{5}{2},\ \pm 5.$$

Pero $P(0) = -5$ y $P(-1) = 5$. Como P es continua sobre $[-1, 0]$ y toma signos opuestos en los puntos extremos -1 y 0, por el teorema del valor intermedio P tiene un cero real entre -1 y 0. Este cero real puede ser racional. Si el cero es racional, debe ser $-\frac{1}{2}$. Tenemos

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & 3 & -9 & -5 & \underline{-\tfrac{1}{2}} \\ & -1 & -1 & 5 & \\ \hline 2 & 2 & -10 & \boxed{0} & \end{array}$$

de modo que

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+\tfrac{1}{2})(2x^2+2x-10) \\ &= (2x+1)(x^2+x-5). \end{aligned}$$

Los ceros de $x^2 + x - 5$ son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{21}.$$

Por tanto, las tres raíces de la ecuación son

$$-\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{21}$$

y

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 9x - 5 \\ &= 2(x+\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{21})(x+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{21}). \end{aligned}$$

6.7 Ejemplo. Encuéntrense todas las raíces de la ecuación

$$8x^4 + 30x^3 + 29x^2 - 2x - 30 = 0.$$

SOLUCIÓN. Los factores de 8 son 1, 2, 4, y 8, y los factores de 30 son 1, 2, 5, 6, 10, 15, 30. Luego las raíces racionales posibles son:

$$\pm\left(\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{8}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{8}, \tfrac{3}{4}, 1, \tfrac{5}{4}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{15}{8}, 2, \tfrac{5}{2}, \tfrac{15}{4}, 3, 5, 6, \tfrac{15}{2}, 10, 15, 30\right).$$

Probando +1 tenemos

$$\begin{array}{rrrrr|l} 8 & 30 & 29 & -2 & -30 & \underline{1} \\ & 8 & 38 & 67 & 65 & \\ \hline 8 & 38 & 67 & 65 & \underline{35} & \end{array}$$

Como todos los números de la última fila son positivos, números mayores que 1 pueden solamente dar lugar a residuos mayores. Eliminamos, por tanto, todos los valores $\geqslant 1$.

Tenemos ahora $P(0) = -30$ y $P(1) = +35$, luego hay una raíz real entre 0 y +1. Esta raíz puede ser racional. Probamos $\frac{1}{2}$, ya que si todo en la última fila resulta de nuevo positivo habremos eliminado varias posibilidades más.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 8 & 30 & 29 & -2 & -30 & \underline{\frac{1}{2}} \\ & 4 & 17 & 23 & \frac{21}{2} & \\ \hline 8 & 34 & 46 & 21 & \underline{-\frac{39}{2}} & \end{array}$$

Probamos después con $\frac{3}{4}$,

$$\begin{array}{rrrrr|l} 8 & 30 & 29 & -2 & -30 & \underline{\frac{3}{4}} \\ & 6 & 27 & 42 & 30 & \\ \hline 8 & 36 & 56 & 40 & \underline{0} & \end{array}$$

Así pues

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-\tfrac{3}{4})(8x^3+36x^2+56x+40) \\ &= (4x-3)(2x^3+9x^2+14x+10) \\ &= (4x-3)\,Q(x). \end{aligned}$$

Las únicas posibilidades para ceros racionales de $Q(x)$ son

$$\pm(\tfrac{1}{2}, 1, 2, \tfrac{5}{2}, 5, 10).$$

Todos los valores positivos han sido previamente eliminados ya que los ceros de $Q(x)$ son también ceros de $P(x)$. Probando con $-\frac{5}{2}$, tenemos

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & 9 & 14 & 10 & \underline{-\frac{5}{2}} \\ & -5 & -10 & -10 & \\ \hline 2 & 4 & 4 & \underline{0} & \end{array}$$

de modo que

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x+\tfrac{5}{2})(2x^2+4x+4) \\ &= (2x+5)(x^2+2x+2) \end{aligned}$$

o

$$P(x) = (4x-3)(2x+5)(x^2+2x+2).$$

El último término puede ser factorizado con la ayuda de la fórmula

cuadrática

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\cdot 2}}{2} = -1 \pm i$$

y

$$P(x) = (4x-3)(2x+5)(x+1-i)(x+1+i).$$

Las cuatro raíces son

$$x = \tfrac{3}{4},\ -\tfrac{5}{2},\ -1+i,\ -1-i.$$

Problemas

1. Determínense las raíces racionales de las siguientes ecuaciones. Cuando el factor restante es cuadrático encuéntrense todas las raíces.

a) $x^3+3x^2-4x-12 = 0$ *b*) $6x^3+7x^2-11x-2 = 0$
c) $2x^3-3x^2-7x+3 = 0$ *d*) $6x^4+5x^3-9x^2-x+2 = 0$
e) $2x^4-3x^3+12x^2-16x+5 = 0$ *f*) $3x^5-5x^3+2x = 0.$

2. Exprésense los siguientes polinomios como una constante por el producto de factores lineales:

a) $P = I^4+I^3-6I^2-I+5$ *b*) $P = 3I^4-8I^2+4$
c) $P = I^4+3I^3+I^2-3I-2$ *d*) $P = I^4-I^3-I^2-I-2$
e) $P = 2I^3+I^2+I-1$ *f*) $P = 6I^4+19I^3+23I^2+8I-6.$

7. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

En esta sección consideramos ecuaciones del tipo $T(x) = 0$ donde T es una combinación algebraica de funciones trigonométricas. $T(x)$ será un polinomio en una de las funciones trigonométricas o el producto de dos o más polinomios cada uno de una de las funciones trigonométricas o $T(x)$ será reducible a uno de estos tipos.

Como las seis funciones trigonométricas tienen todas un periodo 2π o π, es en general suficiente al resolver una ecuación trigonométrica encontrar todas las raíces en el intervalo $[0, 2\pi\rangle$ y observar que todas las otras raíces se obtienen por la condición de periodicidad.

7.1 Ejemplo. Encuéntrense todas las soluciones de la ecuación

$$2\cos^2 x = \cos x$$

en el intervalo $[0, 2\pi\rangle$.

Solución

$$2\cos^2 x = \cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{o} \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{o} \\ \cos x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ahora bien, $\cos x = 0$ para $x = \pi/2$ y $x = 3\pi/2$, mientras que $\cos x = \frac{1}{2}$ para $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$. Así pues, las soluciones son $x = \pi/3, \pi/2, 3\pi/2$ y $5\pi/3$.

7.2 Ejemplo. Encuéntrense todas las soluciones de la ecuación

$$3\tan x - 5\,\text{sen}\, x = 0$$

en el intervalo $[0, 2\pi\rangle$.

Solución

$$3\tan x - 5\,\text{sen}\, x = 0 \Leftrightarrow 3\,\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} - 5\,\text{sen}\, x = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\, x\left(\frac{3}{\cos x} - 5\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x = 0 \\ \text{o} \\ \dfrac{3}{\cos x} - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{sen}\, x = 0 \\ \text{o} \\ \cos x = \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Ahora bien, $\text{sen}\, x = 0$ para $x = 0$ o $x = \pi$, y $\cos x = \frac{3}{5}$ para $x = 0.927 = 53°7'$ o $x = 5.356 = 306°53'$. Así pues

$$x = 0, 0.927, \pi, 5.356.$$

7.3 Ejemplo. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$\operatorname{sen} x + 2\cos x = 2$$

en el intervalo $[0, 2\pi\rangle$.

SOLUCIÓN. Es conveniente reemplazar esta ecuación por una ecuación polinomial en $\cos x$ (o en $\operatorname{sen} x$). Tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x + 2\cos x = 2 &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 2 - 2\cos x \\
&\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 4 - 8\cos x + 4\cos^2 x \\
&\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = 4 - 8\cos x + 4\cos^2 x \\
&\Leftrightarrow 5\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow (5\cos x - 3)(\cos x - 1) = 0.
\end{aligned}$$

Así pues, si x es una solución a la ecuación dada, entonces

$$\cos x = 1 \quad \text{o} \quad \cos x = \tfrac{3}{5}.$$

Las soluciones a las últimas ecuaciones son $x = 0$ y $x = 0.927$ o 5.356 (ejemplo 7.2). Ahora bien, no es cierto que todas las soluciones a las últimas ecuaciones deban ser soluciones de la ecuación original ya que no todas las operaciones efectuadas para obtener las ecuaciones finales eran reversibles. En particular, no es reversible la operación de elevar al cuadrado. Es decir, $A = B$ implica $A^2 = B^2$, pero $A^2 = B^2$ no implica que necesariamente $A = B$; puede ser que $A = -B$. Por tanto, debemos comprobar cuál o cuáles, si existen algunas, de las tres soluciones posibles encontradas son realmente soluciones. Encontramos que para $x = 5.356$, $\operatorname{sen} x = -\frac{4}{5}$, pero que $2 - 2\cos x = +\frac{4}{5}$, de modo que ésta no es una solución. Por otra parte, para $x = 0$, $\operatorname{sen} x = 0$ y $2 - 2\cos x = 0$; para $x = 0.927$, $\operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$ y $2 - 2\cos x = \frac{4}{5}$. Así pues, las soluciones son

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 0.927.$$

Problemas

1. Resuélvanse las siguientes ecuaciones para todos los valores en el intervalo $[0, 2\pi\rangle$. Dense también todas las contestaciones en medida en grados en $[0, 360°\rangle$.

a) $2\operatorname{sen} x + 1 = 0$

b) $\cot x + 1 = 0$

c) $4\cos^2 x - 3 = 0$

d) $2\cot x - 3\cos x = 0$

e) $\cos 2x - \cos x = 0$

f) $\csc x - 4\operatorname{sen} x = 0$

g) $\tan x - 3\cot x = 0$

h) $\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x = 1$

i) $\tan^2 x + \cot^2 x + 1 = 0$

j) $4\csc^2 x + \cot x = 7$

k) $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = 0$

l) $\operatorname{sen} x = \sqrt{2} - \cos x$.

8. SOLUCIÓN DE ECUACIONES MEDIANTE APROXIMACIONES SUCESIVAS

En las secciones 4 y 6, discutimos la solución de ecuaciones polinomiales y en la sección 7 se discutió la solución de ecuaciones trigonométricas. Excepto en casos especiales, usualmente es poco práctico intentar resolver ecuaciones de grado superior al segundo o ecuaciones trigonométricas por operaciones analíticas directas. Por otra parte, los métodos discutidos hasta el momento no son aplicables a la solución de ecuaciones en que aparezcan tipos más generales de funciones continuas. En esta sección consideramos métodos para obtener aproximaciones a las soluciones reales de una ecuación $f(x) = 0$.

En el capítulo 9 (pág. 431), se demostró que si una función f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y se sabe que $f(x_1)$ y $f(x_2)$ tienen signos opuestos para dos números $x_1, x_2 \in \mathfrak{J}$, entonces, según el teorema del valor intermedio hay un cero de f entre x_1 y x_2. Podemos tomar x_1, x_2, o cualquiera de los números entre x_1 y x_2 como aproximaciones al cero de f que se encuentra entre x_1 y x_2.

Sea r el cero de f que deseamos encontrar, y sea x_n una aproximación a este cero (figura 3). Intentaremos encontrar otra aproximación x_{n+1}

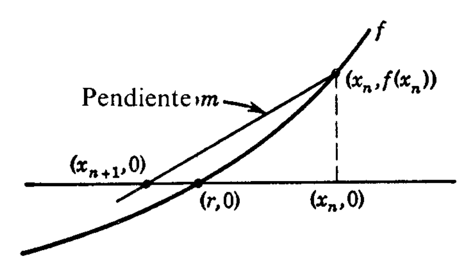


FIGURA 3

mediante el reemplazo de la gráfica de f en la vecindad del punto $(x_n, f(x_n))$ por una línea recta. La pendiente de esta recta debe escogerse de modo que la intercepción con X de ella, x_{n+1}, sea una mejor aproximación a r que la que era x_n. Si m es la pendiente de la recta tendremos

$$m = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

o

8.1 $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}.$$

La elección ideal sería tomar m igual a la pendiente de la recta que contiene $(x_n, f(x_n))$ y $(r, 0)$. Entonces el problema quedaría resuelto con $x_{n+1} = r$. Sin embargo, como r es desconocido, no puede conocerse cuál sea esta elección ideal de m y nos tenemos que contentar con alguna aproximación a esta elección ideal. Tenemos varias posibilidades de elección.

1. Método de Newton. Podemos usar la pendiente de la tangente a la gráfica de f en $(x_n, f(x_n))$:

$$m = f'(x_n).$$

2. Si el cero r está entre x_1 y x_2, podemos usar la pendiente de la recta que contiene los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ para localizar una tercera aproximación x_3. Podemos, entonces, usar sucesivamente la pendiente de una recta que contenga dos puntos previamente calculados, digamos $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y $(x_n, f(x_n))$:

$$m = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

3. Si el cero r está entre x_1 y x_2 y $f'(x)$ no cambia mucho entre x_1 y x_2, podemos fijar

$$m = f'(x_1)$$

en cada uno de los pasos sucesivos. Esto es particularmente conveniente cuando los valores sucesivos $f'(x_n)$ son difíciles de calcular.

4. Si el cero r está entre x_1 y x_2, podemos fijar

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

para todos los pasos sucesivos.

5. Si el cero r está entre x_1 y x_2 y $f''(x)$ es de signo constante entre x_1 y x_2, entonces la tangente en $(x_1, f(x_1))$ se encuentra a un lado de la gráfica de f, y la cuerda que une $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ se encuentra al otro lado de la gráfica de f. En este caso, el valor ideal para m se encuentra entre los valores dados para m en 3 y 4. De donde podemos esperar que el promedio de estas dos pendientes sea una buena elección:

$$m = \frac{1}{2}\left[f'(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right].$$

Que sea una buena elección para m dependerá del problema particular que tengamos que resolver. No intentaremos desarrollar resultados generales. El uso de estos métodos queda ilustrado en los ejemplos siguientes.

8.2 Ejemplo. Obténganse con una aproximación de más de 0.0001 las raíces reales de la ecuación

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 5 = 0.$$

SOLUCIÓN 1. Esta ecuación tiene tres raíces, y como las raíces no reales de una ecuación polinomial con coeficientes reales se presentan en pares conjugados o una es real y las otras dos son no reales o las tres son reales.

Ahora bien

$$P'(x) = 3x^2 - 6x + 5 = 3(x-1)^2 + 2$$

y $P'(x) > 0$ para todo $x \in \mathrm{R}$. De donde P es una función creciente y tiene exactamente un cero real. $P(0) = 5$ y P es creciente, luego el cero real es negativo. Como $P(-1) = -4$, el único cero real está entre -1 y 0.

Usando el método 1, tenemos

$$x_{n+1} = x_n - P(x_n)/P'(x_n).$$

El trabajo de cálculo puede ordenarse como se indica en el siguiente cuadro:

x_n	$P(x_n)$	$m = P'(x_n)$	$-P(x_n)/m$	$x_{n+1} = x_n - P(x_n)/m$
-1	-4	14	$+2.857 \times 10^{-1}$	-0.7
-0.7	-0.313	10.67	$+2.933 \times 10^{-2}$	$-0.67(07)$
-0.67	$+2.537 \times 10^{-3}$	10.367	-2.447×10^{-4}	$-0.6702(45)$
-0.6702	$+4.635 \times 10^{-4}$	10.369	-4.470×10^{-5}	$-0.6702(447)$
-0.6703	-5.737×10^{-4}			

Como $P(-0.6702) > 0$ y $P(-0.6703) < 0$, tenemos $r = -0.6702$ con error menor que $0.0001 = 10^{-4}$.

SOLUCIÓN 2. Como

$$P''(x) = 6x - 6 = 6(x-1),$$

la gráfica de P es cóncava hacia abajo para $x < 1$. Así pues, las tangentes a la gráfica en puntos $(x, P(x))$ con $x < 1$ se encontrarán a la izquierda de la curva mientras que las cuerdas que unan dos de tales puntos se encontrarán a la derecha de la curva. Esto indica que el método 5 sería probablemente preferible a cualquiera de los otros dos métodos que usan pendiente constante.

Tomando $x_1 = -1$ y $x_0 = 0$, tenemos

$$m = \frac{1}{2}\left[P'(x_1) + \frac{P(x_1) - P(x_0)}{x_1 - x_0}\right] = \frac{1}{2}\left[14 + \frac{-4-5}{-1}\right] = 11.5.$$

Y entonces

x_n	$P(x_n)$	$-P(x_n)/m$	$x_{n+1} = x_n - P(x_n)/m$
-1	-4	$+0.35$	-0.65
-0.65	$+2.079 \times 10^{-1}$	-1.807×10^{-2}	$-0.668(07)$
-0.668	$+2.325 \times 10^{-2}$	-2.022×10^{-3}	$-0.670(03)$
-0.670	$+2.537 \times 10^{-3}$	-2.206×10^{-4}	$-0.6702(21)$
-0.6702	$+4.635 \times 10^{-4}$	-4.030×10^{-5}	$-0.6702(403)$

Aunque la solución por el método 5 tomó una aproximación sucesiva más que las que se necesitaron en el método 1, el ahorro de tiempo conseguido por el uso de la misma pendiente en cada paso compensó de sobra el tiempo usado en efectuar el paso adicional.

8.3 Ejemplo. Encuéntrense, con una aproximación de más de 0.001, los ceros de la función cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = x^4 + x - 1.$$

SOLUCIÓN 1. Tenemos

$$f'(x) = 4x^3 + 1$$
$$f''(x) = 12x^2$$

de modo que la gráfica de f es cóncava hacia arriba en todos sus puntos. De aquí que la gráfica de f tiene o dos ceros reales o ningún cero real. Como

$$f(0) = -1 \quad \text{y} \quad f(1) = 1$$

hay un cero entre 0 y 1. Usando el método 2 con $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, tenemos

x_n	$f(x_n)$	$m = \dfrac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$	$-f(x_n)/m$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/m$
1	1	2	-0.5	0.5
0.5	-0.4375	2.875	$+1.522 \times 10^{-1}$	0.6(522)
0.7	-5.99×10^{-2}	1.888	$+3.178 \times 10^{-2}$	0.73(178)
0.73	$+1.398 \times 10^{-2}$	2.463	-5.676×10^{-3}	0.724(324)
0.724	-1.240×10^{-3}	2.537	$+4.888 \times 10^{-4}$	0.724(488)
0.725	$+1.282 \times 10^{-3}$			

Como $f(0.724) < 0$ y $f(0.725) > 0$, $r = 0.724$ con error menor que 0.001.

SOLUCIÓN 2. El cálculo puede simplificarse considerablemente usando el método 4. En este caso no es necesario volver a calcular m en cada etapa. Además, si tomamos $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, tenemos

$$m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1-(-1)}{1-0} = 2$$

y el cálculo de $f(x_n)/m$ es muy fácil.

x_n	$f(x_n)$	$-f(x_n)/2$	$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/2$
1	1	-0.5	0.5
0.5	-0.4375	$+2.188\times10^{-1}$	0.72(188)
0.72	-1.126×10^{-2}	$+5.63\times10^{-3}$	0.725(63)
0.725	$+1.282\times10^{-3}$	-6.41×10^{-4}	0.724(36)
0.724	-1.240×10^{-3}		

8.4 Ejemplo. En un problema sobre pandeo de columnas es necesario resolver la siguiente ecuación:

$$\tan x = x.$$

SOLUCIÓN. Si dibujamos las gráficas de las ecuaciones $y = \tan x$ y $y = x$, entonces las intersecciones de estas dos gráficas nos darán primeras

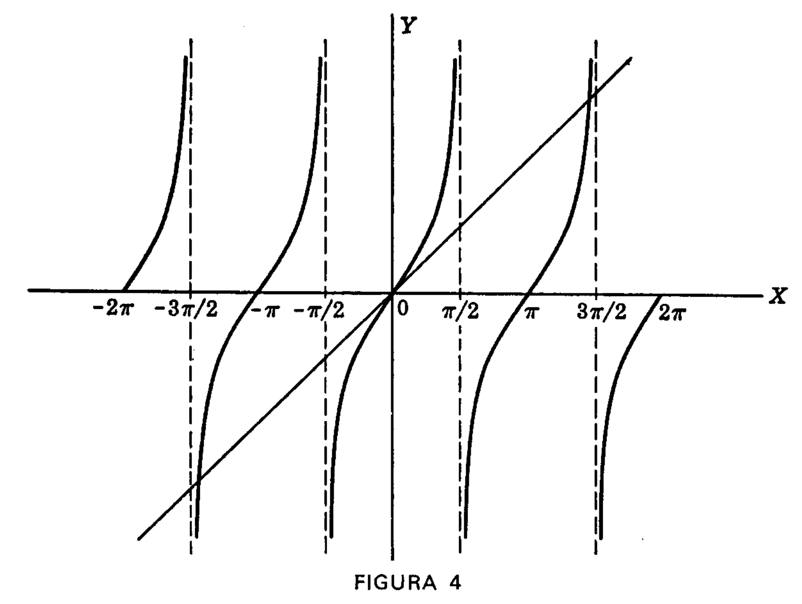


FIGURA 4

aproximaciones a las soluciones de tal ecuación, es decir, a los ceros de la función cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = \tan x - x.$$

Una de las primeras cosas que deben notarse es que

$$f(-x) = -f(x),$$

de modo que si r es un cero de f, entonces $-r$ es también un cero. Así pues, es suficiente encontrar los ceros no negativos de la función f.

Obviamente 0 es un cero de f y en la figura 4 se ve que hay ceros cerca de $\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots, \dfrac{2n+1}{2}\pi, \ldots$ Para los valores mayores de n los ceros deben estar muy cerca de $\dfrac{2n+1}{2}\pi$. Para los valores menores de n estos números deben ser aproximaciones bastante pobres de los ceros.

Emplearemos el método 3 para aproximar el primer cero positivo de $f = \tan - I$. Del examen de la figura 4 resulta claro que r_1, primer cero positivo de f, es menor que $3\pi/2$. Tomamos $x_1 = 4.5$. Usando una tabla de funciones trigonométricas con ángulos en radianes y tomando $\pi = 3.14$, tenemos

$$f'(x_1) = \sec^2 x_1 - 1 = \tan^2 x_1 = \tan^2 (x_1 - \pi) = \tan^2 (4.50 - 3.14) = 22.$$

Sigue el cálculo:

x_n	$\tan x_n =$ $\tan (x_n - \pi)$	$f(x_n) =$ $\tan x_n - x_n$	$-f(x_n)/m$	$x_{n+1} =$ $x_n - f(x_n)/m$
4.5	4.673	+0.173	−0.0079	4.49(2)
4.49	4.455	−0.035	+0.0016	4.49(16)

Encontramos, así, que $r_1 = 4.49$ con error menor que 10^{-2}. Usando valores más exactos para la función tangente, puede mostrarse que $r_1 = 4.4934$ con error menor que 10^{-4}.

Problemas

1. Dibújense las gráficas de las siguientes funciones y encuéntrense los ceros especificados con errores menores que 0.01 usando los métodos 1 y 2:

a) $f = 2I^3 - 6I^2 - 5$; todos los ceros reales.
b) $f = I^3 + 2I^2 - 4I - 1$; cero positivo.
c) $f = I^4 - 4I^3 - 18I^2 + 72I - 18$; cero entre 0 y 1.
d) $f = \cos - I$; todos los ceros reales.
e) $f = \text{sen} + I^2$; todos los ceros reales.

2. Dibújese la gráfica de f donde

$$f(x) = x-2 \operatorname{sen} x$$

en el intervalo $[0, \pi]$. Usando el método 3, encuéntrese el cero positivo de f con error menor que 0.01. Nótese que $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(\pi-2x)$.

3. Dibújense las gráficas de las expresiones que aparecen en cada miembro de las siguientes ecuaciones para determinar una primera aproximación de las soluciones anotando los puntos de intersección de las dos gráficas. Úsense los métodos 3, 4, y 5 para determinar la solución deseada con error menor que 0.005. Si uno de los métodos no trabaja bien, explíquese el porqué.

a) $\operatorname{sen} x = 1-x$ *b*) $x = \cos x$
c) $\sqrt{x} = 3-x$ *d*) $x = 1.5 \operatorname{sen} x$
e) $x^3 = \cot x, x \in \langle -\pi, 0\rangle \cup \langle 0, \pi\rangle$
f) $1-x^2 = \tan x, x = [0, \pi/2\rangle$.

4. Úsese el método 3 para calcular

a) $\sqrt[3]{100}$ *b*) $\sqrt[5]{40}$
c) $\sqrt[4]{90}$ *d*) $\sqrt[5]{-125}$.

9. RESUMEN

En este capítulo hemos considerado la solución de ecuaciones del tipo $f(x) = 0$. Encontramos que si deseábamos considerar soluciones de ecuaciones polinomiales generales, era necesario introducir un campo de números que es más extenso que el campo de los números reales. Esto nos llevó al campo de los números complejos.

Una ecuación del tipo

$$ax+b = 0 \quad (a \neq 0),$$

donde a y b son números racionales, tiene el número racional $-b/a$ como su solución. Sin embargo, el campo de los números racionales no es suficientemente extenso para contener soluciones de la ecuación

$$x^2-2 = 0.$$

Las dos soluciones de esta ecuación son los números irracionales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Si esta ecuación ha de tener soluciones es, pues, necesario extender nuestro campo numérico al campo de los números reales. No se tiene que buscar mucho para encontrar ecuaciones polinomiales que no tienen soluciones en el campo de los números reales. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2+1 = 0$$

no tiene soluciones en el campo de los números reales. Luego, si queremos que esta ecuación tenga soluciones, debemos extender de nuevo nuestro sistema numérico. El nuevo campo numérico que se obtiene es el campo de los números complejos.

Se nos presenta naturalmente la siguiente pregunta: ¿hay campos con la propiedad de que todo polinomio de grado positivo n, cuyos coeficientes sean elementos del campo, tiene n ceros en ese campo? Un campo tal se dice que es *algebraicamente cerrado.* Como hemos visto, el campo de los números racionales y el campo de los números reales no poseen esta propiedad. Sin embargo, el teorema fundamental del álgebra implica que el campo de los números complejos tiene esta propiedad y es, por tanto, algebraicamente cerrado.

Aunque históricamente el campo de los números complejos se introdujo en conexión con el problema de la solución de las ecuaciones polinomiales, los números complejos juegan un papel importante en conexión con otros temas como se señaló en la introducción a este capítulo (pág. 487).

Después de discutir los números complejos, pasamos a considerar la solución de las ecuaciones polinomiales. Siguió a esto una consideración de la solución de las ecuaciones trigonométricas. Las ecuaciones polinomiales y las trigonométricas son casos especiales de ecuaciones del tipo $f(x) = 0$, pero los resultados obtenidos para estos casos especiales no son aplicables al caso general. Para el caso general de una función f continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, consideramos métodos para localizar aproximadamente los ceros de f sobre $\mathfrak{J}$. Estos métodos requieren que encontremos una aproximación x_n a un tal cero y luego construyamos una recta por el punto $(x_n, f(x_n))$ con pendiente m tal que la intercepción con X, x_{n+1}, de esta recta esté más cerca del cero buscado que lo que está x_n. Se consideraron varios métodos para elegir la pendiente m de la recta que pasa por $(x_n, f(x_n))$.

Problemas de repaso

1. Exprésense cada uno de los siguientes números en la forma $x+yi$:

a) $3(2+i)+2(1-3i)$ *b*) $(2+i)(2-i)$

c) $|12+5i|(2-i)$ *d*) $\dfrac{1}{-i}$

e) $i^{25}+i^{19}+i^7$ *f*) $\dfrac{1}{a+bi}+\dfrac{1}{a-bi}$.

2. Exprésense cada uno de los siguientes números en la forma $x+yi$:

a) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{25}$ *b*) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{17}$

c) $\dfrac{(1+i)^2(\sqrt{3}+i)^3}{(2-2i)^5}$ *d*) $\dfrac{(3-\sqrt{3}i)^4(-\sqrt{3}+i)}{(3+3i)^6}$

e) $\dfrac{(-\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^6}{(-\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^8(\sqrt{15}-\sqrt{5}i)^7}$ *f*) $(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}})^6$.

3. Exprésense todas las raíces que se indican en la forma $x+iy$ usando tablas de funciones trigonométricas solamente cuando sea necesario:

a) las raíces cuadradas de $-i$
b) las raíces sextas de $-i$
c) las raíces cuartas de -1
d) las raíces cuartas de $(-8\sqrt{2}+8\sqrt{2}i)$.

4. Exprésense los siguientes polinomios en la forma $a_n(I-r_1)\ldots(I-r_n)$:

a) $2I^4+7I^3-13I^2+7I-15$
b) $2I^4+I^3-2I-1$
c) $2I^5+3I^4-12I^3-18I^2+10I+15$
d) $6I^4+11I^3+8I^2-6I-4$.

5. Encuéntrense todas las soluciones de las siguientes ecuaciones en el intervalo $[0, 2\pi\rangle$.

a) $\cot x-2\cos x = 0$ *b*) $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-\cos x+1 = 0$
c) $\cos x+\sqrt{3}\operatorname{sen} x = 2$ *d*) $\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} x = 0$
e) $4\tan^2 x = \sec^2 x$ *f*) $\tan^2 x+\cot^2 x-2 = 0$
g) $\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} 5x = 0$ *h*) $\tan 2x\tan x = 1$.

6. Encuéntrense las raíces de cada una de las siguientes ecuaciones con errores menores que 0.01. Díganse en cada caso claramente cuáles han sido los métodos usados.

a) $x^2 = \cos x$; todas las raíces. *b*) $x^3 = \operatorname{sen} x$; todas las raíces.
c) $\sqrt{x} = \tan x$, $x\in[0, \pi/2\rangle$ *d*) $2-x^2 = \sec x$, $x\in\langle-\pi/2, \pi/2\rangle$.

Capítulo

$\int udx$ 12

La integral definida

1. INTRODUCCIÓN

La medida del área es un problema que ha preocupado al hombre desde la antigüedad. Los egipcios (2000-1800 A.C.) conocían reglas para el cálculo de las áreas y los volúmenes de algunos objetos sencillos. Tenían fórmulas exactas para las áreas de los rectángulos, triángulos, y trapezoides, y una fórmula incorrecta para el área de un cuadrilátero general. Daban el área aproximada de un círculo como el cuadrado de $\frac{8}{9}$ del diámetro —una buena aproximación, puesto que $4(\frac{8}{9})^2 = 3.160+$. Sabían cómo calcular el volumen de los cubos, cilindros y, como podía esperarse, el volumen de una pirámide truncada de base cuadrada. No hay ninguna evidencia de derivación sistemática alguna de estas reglas. Pero estas reglas pasaron de los egipcios y babilonios a los griegos y, empezando con Tales (585 A.C.) los

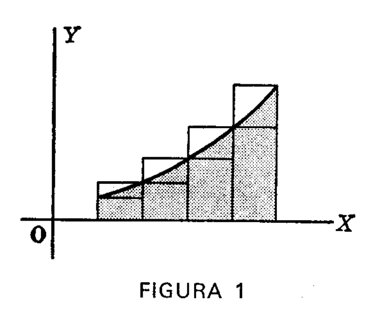


FIGURA 1

griegos dieron derivaciones lógicas y sistemáticas de las fórmulas.

De todos los griegos, Arquímedes (250 A.C.) fue el que más se acercó al concepto moderno de área. Conocía el método de acotar un área por un conjunto de rectángulos situados en el interior y un conjunto que cubría justamente el área (figura 1). Riemann (1826-1866) basó su definición de la integral sobre esta idea. Es la integral de Riemann la que presentaremos y estudiaremos en este capítulo.

Los conceptos fundamentales del cálculo, la derivada y la integral, preceden a Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716), pero es a estos dos hombres a quienes se les da el título de "Los Fundadores del Cálculo". En la sección 7 se nos dice el porqué. En esa sección presentaremos los teoremas fundamentales del cálculo, que fueron descubiertos, independientemente, por Newton y Leibniz.

2. ÁREA DE LAS FIGURAS PLANAS

El área de un cuadrado es nuestro punto de partida para la definición de área de figuras planas. El área de un cuadrado cuyos lados son de longitud a se define como a^2. La unidad de medida del área es longitud al cuadrado —un metro cuadrado, un centímetro cuadrado, un pie cuadrado, una pulgada cuadrada, etc., según cuál sea la unidad de longitud que se adopte.

Con el área de un cuadrado así definida, podemos derivar una fórmula para el área del rectángulo. Sea $\mathcal{R}$ un rectángulo de ancho a y altura $b (a < b)$. Colóquense cuatro de tales rectángulos juntos como se ilustra en la figura 2. Los lados exteriores de los rectángulos limitan un cuadrado cuyos lados son de longitud $a+b$. Los lados interiores de los rectángulos limitan un cuadrado de lados $b-a$. Obtenemos entonces

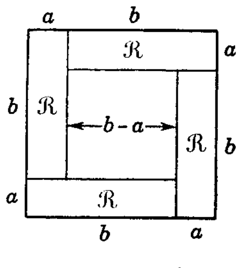


FIGURA 2

$$4 \text{ área } (\mathcal{R}) + (b-a)^2 = (b+a)^2.$$

Lo que, despejando el área de R, nos da

2.1 $$\text{área } (\mathcal{R}) = \frac{(b+a)^2 - (b-a)^2}{4} = ab.$$

Aunque el área de un triángulo rectángulo puede obtenerse formando un rectángulo con dos

triángulos rectángulos congruentes, nosotros efectuaremos una derivación de la fórmula distinta y más difícil. Nuestro propósito al hacer esto es ilustrar un método de mayor generalidad e importancia. Este método nos proveerá de una definición para las áreas de una gran clase de regiones planas (conjuntos de puntos en el plano) y de un medio para calcularlas.

En la anterior derivación de la fórmula para el área de un rectángulo, aceptamos los resultados a pesar del hecho de que no se había dado ninguna definición de lo que ha de entenderse por área de un rectángulo. La razón de nuestra aceptación fue que la derivación se basa en una propiedad no formulada que estamos casi obligados a esperar que el área contenga: la suma del área de las partes ha de ser igual al área del todo. Si el área ha de tener esta propiedad, entonces la fórmula *ab* para el área de un rectángulo es la única posible. Enfocamos el problema más general de asignar áreas a regiones de esta misma forma, sólo que, de antemano, enunciamos cuáles han de ser las condiciones satisfechas por el área. Descubriremos luego que esto nos lleva a una asignación única de área para cada una de las regiones de una gran variedad de regiones planas.

Sea $\mathcal{E}$ un conjunto de puntos en el plano. Deseamos definir el área de $\mathcal{E}$, a la que denotaremos por área ($\mathcal{E}$). El área ha de ser un número real no negativo. Requerimos como condiciones para una definición aceptable de área —para aquellos conjuntos de puntos $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots$ para los que el área ha de definirse— que :

2.2 *Si* $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, *entonces* área ($\mathcal{E}$) $\leqslant$ área ($\mathcal{F}$).

2.3 *Si* $\mathcal{G} = \mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ *y* $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ *tiene área cero, entonces*

$$\text{área}\,(\mathcal{G}) = \text{área}\,(\mathcal{E}) + \text{área}\,(\mathcal{F}).$$

2.4 *Si* $\mathcal{E}$ *es un rectángulo de anchura a y altura b*, área ($\mathcal{E}$) $= ab$.

La condición 2.2 requiere que el área de una parte no sea mayor que la total y la condición 2.3 pide que si una región está dividida en dos partes que no se traslapan, la suma de las áreas de las partes sea igual al área del total. La condición 2.4 acepta la fórmula para el área de un rectángulo. El no traslapamiento quiere decir que el área de la intersección es cero. Un segmento rectilíneo, un arco de circunferencia y la gráfica de una función continua, son ejemplos de conjuntos con área cero (problema 8).

Aplicamos ahora estas condiciones para determinar el área de un triángulo rectángulo $\mathcal{T}$ con base a y altura b. Sea $\mathcal{T}$ el triángulo ilustrado en la figura 3. $\mathcal{T}$ está acotado por las rectas cuyas ecuaciones son $y = 0$, $x = a$ y $y = \frac{a}{b}x$. El punto (x, y) está en $\mathcal{T}$ si y sólo si $0 \leqslant x \leqslant a$ y $0 \leqslant y \leqslant \frac{b}{a}x$; es decir, $\mathcal{T} = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{b}{a}x\}$. Dividamos la base del triángulo en cuatro partes iguales y construyamos los rectángulos que se muestran

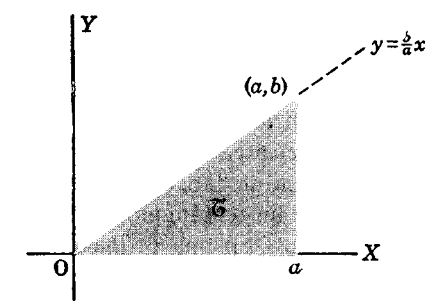


FIGURA 3

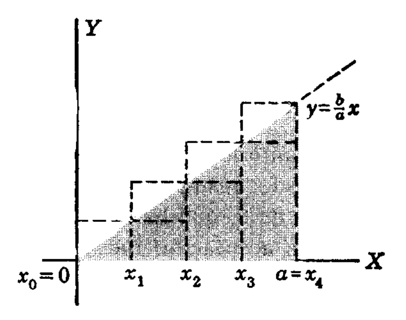


FIGURA 4

en la figura 4 ($x_0 = 0$, $x_1 = a/4$, $x_2 = 2a/4$, $x_3 = 3a/4$, $x_4 = a$). La unión de los cuatro rectángulos "exteriores" cubre el triángulo y la unión de los tres rectángulos "interiores" está contenida en el triángulo. Si hemos de asignar al triángulo un área, entonces de 2.2, 2.3, y 2.4 tenemos

$$\frac{b}{a}x_1(x_2-x_1) + \frac{b}{a}x_2(x_3-x_2) + \frac{b}{a}x_3(x_4-x_3) \leqslant \text{área } (\mathfrak{T})$$

$$\leqslant \frac{b}{a}x_1(x_1-x_0) + \frac{b}{a}x_2(x_2-x_1) + \frac{b}{a}x_3(x_3-x_2) + \frac{b}{a}x_4(x_4-x_3)\,.$$

Sustituyendo por sus valores a $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_4$ y operando en ambos miembros de la desigualdad, obtenemos

$$\frac{ab}{16}(1+2+3) \leqslant \text{área } (\mathfrak{T}) \leqslant \frac{ab}{16}(1+2+3+4)$$

o

$$\tfrac{3}{8}ab \leqslant \text{área } (\mathfrak{T}) \leqslant \tfrac{5}{8}ab.$$

Podemos ahora concluir: si ha de asignarse a este triángulo un área que satisfaga las condiciones 2.2, 2.3, y 2.4, tal área debe estar entre los números $3ab/8$ y $5ab/8$. Si proseguimos sustituyendo la base, obtenemos cotas para área ($\mathfrak{T}$) cada vez más próximas una a otra. En realidad, con una partición de $[0, a]$ definida por

$$x_0 = 0,\ x_1 = a/n,\ x_2 = 2a/n, \ldots, x_k = ka/n, \ldots, x_n = a,$$

obtenemos para la suma de las áreas de los triángulos interiores

$$\frac{b}{a}x_0(x_1-x_0) + \frac{b}{a}x_1(x_2-x_1) + \ldots. + \frac{b}{a}x_{n-1}(x_n-x_{n-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{a} x_{k-1}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{a} \frac{(k-1)a}{n} \frac{a}{n} = \frac{ab}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1)$$

$$= \frac{ab}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k.$$

La suma de las áreas de los triángulos exteriores es

$$\frac{b}{a} x_1(x_1 - x_0) + \frac{b}{a} x_2(x_2 - x_1) + \dots + \frac{b}{a} x_n(x_n - x_{n-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{a} x_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{a} \frac{ka}{n} \frac{a}{n} = \frac{ab}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k.$$

La unión de los rectángulos interiores está contenida en $\mathfrak{T}$ y la unión de los rectángulos exteriores contiene a $\mathfrak{T}$. De donde

$$\frac{ab}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k \leqslant \text{área}\,(\mathfrak{T}) \leqslant \frac{ab}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k.$$

De la fórmula 4.4 del capítulo 7 (pág. 325) para la suma de enteros, obtenemos

$$\frac{ab}{n^2} \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{ab}{2} - \frac{ab}{2n} \leqslant \text{área}\,(\mathfrak{T}) \leqslant \frac{ab}{n^2} \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2n}.$$

Se sigue, entonces, de ello que

$$-ab/2n \leqslant \text{área}\,(\mathfrak{T}) - \tfrac{1}{2}ab \leqslant ab/2n.$$

Como podemos elegir n tan grande como deseemos, podemos concluir que si ha de asignarse un área a un triángulo rectángulo que satisfaga 2.2, 2.3, y 2.4, entonces el área de un triángulo rectángulo de base a y altura b ha de ser $ab/2$.

Análogamente, podemos determinar el área bajo un arco de parábola. Sea $\mathcal{E}$ la región acotada por la parábola $y = f(x) = x^2$, el eje X, y la recta $x = a$ (figura 5). Dividiendo el intervalo $[0, a]$ en n segmentos iguales, obtenemos

2.5 $$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \leqslant \text{área}\,(\mathcal{E}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Como $f(x) = x^2$ y $x_k = ka/n$, tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2 a^2}{n^2} \frac{a}{n} \leqslant \text{área}\,(\mathcal{E}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 a^2}{n^2} \frac{a}{n}.$$

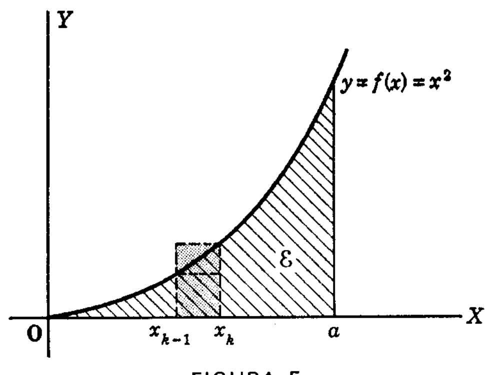


FIGURA 5

Usando la fórmula del capítulo 7 (pág. 326) para la suma de los cuadrados de los enteros, obtenemos

$$\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} a^3 \leqslant \text{área}(\mathcal{E}) \leqslant \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} a^3$$

o

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n}\right)a^3 \leqslant \text{área}(\mathcal{E}) - \frac{1}{3}a^3 \leqslant \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n}\right)a^3.$$

Y, de nuevo, como n es un entero positivo cualquiera, se sigue que el área bajo el arco de parábola es $\frac{1}{3}a^3$.

Problemas

1. El área de la región acotada por el eje X y un arco de la gráfica de sen x, $x \in [0, \pi]$, es un entero. ¿Cuál es el área?

2. El área de la región acotada por el eje X y un arco de la gráfica de $\text{sen}^2 x$, $x \in [0, \pi]$, es π/k donde k es un entero. ¿Cuál es el área?

3. Subdividiendo el segmento [0, 1] en cuatro segmentos de igual longitud, hállense una cota superior y una cota inferior del área de un cuadrante del círculo de radio uno. Obténgase de ello un estimado de π.

4. Usando la fórmula para el área de un rectángulo y un triángulo rectángulo, derívese una fórmula para el área de

a) un triángulo; *b*) un trapezoide.

5. Si la velocidad $v(t)$ de una partícula en el instante t es proporcional a t, relaciónese la distancia viajada en el intervalo de tiempo $[0, a]$ al área del triángulo rectángulo situado bajo la gráfica de v y sobre el intervalo $[0, a]$.

6. Sea $v = \operatorname{sen}/I$ la función tiempo velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una recta donde el tiempo es medido en segundos y la velocidad es medida en metros por segundo ($v(t)$ es la velocidad de la partícula en el instante t). Demuéstrese que en los primeros π segundos la partícula viaja más de 1 metro y menos de $1+\pi/2$ metros.

7. Encuéntrese el área acotada por la ecuación cúbica $y = x^3$, el eje X, y las rectas $x = 0$ y $x = a$.

Sugerencia. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)$.

8. Demuéstrese que, si el área ha de satisfacer las condiciones 2.2, 2.3, 2.4, entonces:

a) El área del conjunto nulo, $\varnothing$, es cero.

b) El área de un conjunto consistente en un número finito de puntos es cero.

Sugerencia. Cúbrase cada punto del conjunto por un pequeño rectángulo.

c) El área de un segmento rectilíneo es cero.

$\star$*d*) Un arco de circunferencia tiene área cero.

Sugerencia. Como para $x_1, x_2 \in [0, a/\sqrt{2}]$

$$\left|\sqrt{a^2-x_1{}^2} - \sqrt{a^2-x_2{}^2}\right| \leqslant |x_2-x_1|,$$

argúyase que para cada entero positivo n un octavo de la circunferencia de radio a puede cubrirse por n cuadrados cuya área total es (figura 6)

$$n\,\frac{a^2}{2n^2} = \frac{a^2}{2n}.$$

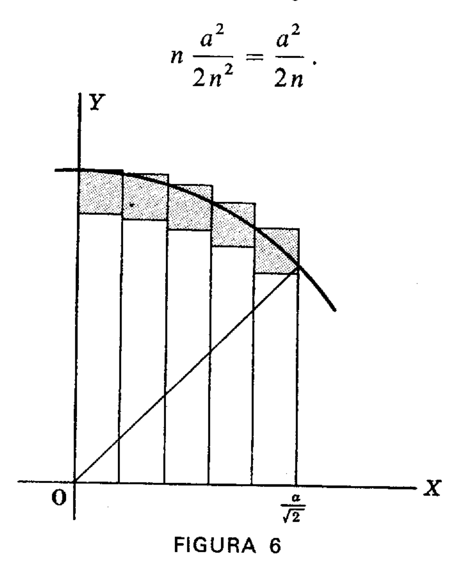


FIGURA 6

$*e)$ Si f es continua sobre $[a, b]$, la gráfica de f sobre $[a, b]$ tiene área cero.

Sugerencia. Hágase uso del hecho de que f es uniformemente continuo sobre $[a, b]$.

3. LA INTEGRAL DEFINIDA

En lugar de limitarnos al problema del área, ampliaremos nuestro campo de discusión considerando el concepto de "integral definida". La integral definida no solamente nos provee de una definición de área y un medio para computarla sino que nos permite también definir y calcular muchas magnitudes físicas —por ejemplo, trabajo, centro de masa, momento de inercia, energía potencial, valores medios, etc.— y nos proporciona, además, un lenguaje para poder formular muchas leyes físicas.

Sea f una función cuyo dominio de definición incluye el intervalo cerrado $[a, b]$. El símbolo para "la integral definida de f desde a a b" es $\int_a^b f$. El adjetivo "definida" se usa para indicar que $\int_a^b f$ es un número único. Se llama "integral" para sugerir que el número $\int_a^b f$ se obtiene poniendo juntas partes de algo —un proceso de integración. Este proceso se ilustró cuando pusimos juntas áreas de rectángulos para obtener el área de un triángulo y el área bajo un arco de parábola. En la notación $\int_a^b f$ para la integral definida de f desde a a b, el símbolo "$\int$" es una "S" alargada y es un símbolo de integración o sumación generalizada. Como veremos, hay una fuerte analogía entre el símbolo "$\int$" y el símbolo ordinario de sumación, "$\sum$", la "S" griega.

3.1 Definición. *Un conjunto finito de números* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *se dice que es una* ***partición*** *de* $[a, b]$ *si* $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_j \leqslant x_{j+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$. *Denotamos una partición de* $[a, b]$ *por* $P = \{x_i | i = 0, 1, \ldots, n\}$, *y definimos la* ***norma*** *de* P, *escrito* P, *por*

$$|P| = \text{Max}\,\{x_j - x_{j-1} | j = 1, \ldots, n\}.$$

La norma de una partición es una medida de la finura de la partición. Por ejemplo, en la sección 2 usamos la partición $P = \{0, a/n, 2a/n, \ldots, ka/n, \ldots, a\}$ de $[0, a]$. La norma de esta partición es $|P| = a/n$.

Sea f una función acotada sobre $[a, b]$; es decir, hay números m y M tales que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para toda $x \in [a, b]$. Definamos

3.2
$$\begin{cases} M_i(f) = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ m_i(f) = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{cases}$$

Como hemos supuesto que f es acotada, $M_i(f)$ y $m_i(f)$ existen para todo $i = 1, \ldots, n$, y

3.3
$$m \leqslant m_i(f) \leqslant M_i(f) \leqslant M.$$

Daremos la definición de la integral en términos de sumas de los siguientes tipos:

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

y

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}).$$

Llamamos a $L(f, P)$ la "suma interior", y a $U(f, P)$ la "suma superior", correspondientes a la partición P.

Estas sumas tienen una interpretación geométrica simple para funciones no negativas, aunque debemos recordar que la única restricción que estamos exigiendo al presente de nuestras funciones es que sean acotadas. La gráfica de una función acotada no negativa con $[a, b]$ "partido" la dibujamos en la figura 7.

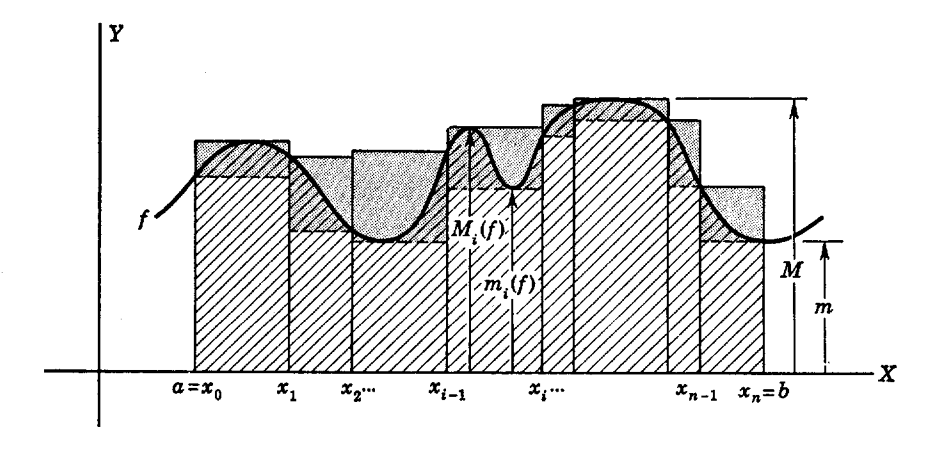


FIGURA 7

La suma superior

$$U(f, P) = M_1(f)(x_1-x_0)+M_2(f)(x_2-x_1)+ \dots +M_i(f)(x_i-x_{i-1})+ \\ + \dots +M_n(f)(x_n-x_{n-1}) \\ = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i-x_{i-1})$$

es la suma de las áreas de los rectángulos exteriores en la figura 7. La suma inferior

$$L(f, P) = m_1(f)(x_1-x_0)+ \dots +m_i(f)(x_i-x_{i-1})+ \dots +m_n(f)(x_n-x_{n-1}) \\ = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i-x_{i-1})$$

es la suma de las áreas de los rectángulos interiores en la figura 7. El área sombreada es $U(f, P)-L(f, P)$. Tales sumas se calcularon en la sección 2. Allí, las funciones eran monótonamente crecientes y asumían sus valores mínimos $m_i(f)$ en las fronteras izquierdas de los subintervalos y sus valores máximos $M_i(f)$ en las fronteras derechas de los mismos. Después de que hayamos definido la integral y aprendido más acerca de estas sumas volveremos a esta interpretación geométrica y definiremos el área.

Por 3.3

$$m(b-a) = \sum_{i=1}^{n} m(x_i-x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i-x_{i-1}) \\ \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i-x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M(x_i-x_{i-1}) = M(b-a)$$

o

3.4 $$m(b-a) \leqslant L(f, P) \leqslant U(f, P) \leqslant M(b-a).$$

Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las particiones del intervalo $[a, b]$. La desigualdad 3.4 se verifica para toda partición P en $\mathcal{P}$ y nos dice que el conjunto de números $\{L(f, P) | P \in \mathcal{P}\}$ —el conjunto de todas las sumas inferiores obtenidas tomando todas las posibles particiones de $[a, b]$— tiene una cota superior; a saber, $M(b-a)$. El conjunto $\{L(f, P) | P \in \mathcal{P}\}$ tiene, por tanto, un supremo. Análogamente, el conjunto $\{U(f, P) | P \in \mathcal{P}\}$ de todas las sumas superiores tiene una cota inferior, $m(b-a)$, luego $\{U(f, P) | P \in \mathcal{P}\}$ tiene un ínfimo. Este ínfimo y este supremo son los suficientemente importantes para que introduzcamos nombres y símbolos para ellos.

3.5 Definición. *Definimos*

$$\underline{\int_a^b} f = \sup \{L(f, P) \mid P \in \mathfrak{P}\}$$

y

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \{U(f, P) \mid P \in \mathfrak{P}\}.$$

$\underline{\int_a^b} f$ *se llama* ***integral inferior de f desde a a b****, y* $\overline{\int_a^b} f$ *se llama la* ***integral superior de f desde a a b****.*

La discusión que precede a esta definición estableció la existencia de $\underline{\int_a^b} f$ e $\overline{\int_a^b} f$ para todas las funciones f que son acotadas en $[a, b]$.

Si $P = \{x_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ y $P' = \{x_i' \mid i = 0, 1, \ldots, n'\}$ son particiones de un intervalo $[a, b]$, $P \subset P'$ significa que cada punto de división x_i de P es también un punto de división de P'. Cuando éste es el caso, P' se dice que es un "refinamiento" de P. Ahora demostraremos que un refinamiento de una partición no disminuye la suma inferior ni aumenta la suma superior. Enunciado precisamente, probamos para una función acotada f que:

3.6 Lema. *$P \subset P'$ implica $L(f, P) \leqslant L(f, P')$ y $U(f, P') \leqslant U(f, P)$.*

Prueba. Si $P = P'$, el lema es obviamente cierto. Supongamos que $P \neq P'$ y $P \subset P'$. Sea x_j' el primer punto de división de P' que no es de P. Entonces, para algún k, $x_{k-1} < x_j' < x_k$. Definamos

$$P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_j', x_k, \ldots, x_n\},$$
$$m^*(f) = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_j']\},$$

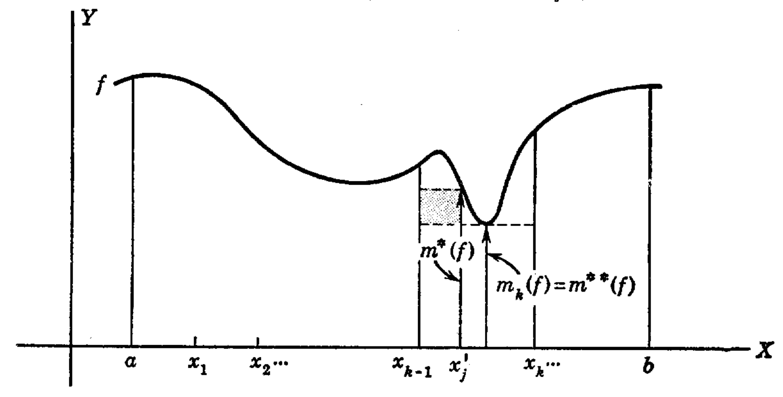


FIGURA 8

y

$$m^{**}(f) = \inf \{f(x) \mid x \in [x_j', x_k]\}.$$

Un caso especial de esto se ilustra en la figura 8.

Por la definición de $m_k(f)$ en 3.2, $m_k(f) \leqslant m^*(f)$ y $m_k(f) \leqslant m^{**}(f)$ Por tanto

$$\begin{aligned} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) &= m_k(f)(x_j' - x_{k-1}) + m_k(f)(x_k - x_j') \\ &\leqslant m^*(f)(x_j' - x_{k-1}) + m^{**}(f)(x_k - x_j'), \end{aligned}$$

y de aquí

$$\begin{aligned} L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) &\leqslant m_1(f)(x_1 - x_0) + m_2(f)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ &+ m_{k-1}(f)(x_{k-1} - x_{k-2}) + m^*(f)(x_j' - x_{k-1}) \\ &+ m^{**}(f)(x_k - x_j') + m_{k+1}(f)(x_{k+1} - x_k) + \ldots \\ &+ m_n(f)(x_n - x_{n-1}) = L(f, P_1). \end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento un número finito de veces, podemos añadir a P todos los x_i' de P' que no estén ya en P y obtener así $L(f, P) \leqslant L(f, P')$. En una forma semejante —con todas las desigualdades invertidas— obtenemos $U(f, P) \geqslant U(f, P')$.

Aplicamos ahora el lema 3.6 junto con el 3.4 para obtener la siguiente importante propiedad sobre integrales superiores e inferiores.

3.7 Lema. *Si f está acotada sobre $[a, b]$ y $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$, entonces*

$$m(b-a) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant M(b-a).$$

PRUEBA. Como $\underline{\int_a^b} f$ es el supremo de $\{L(f, P) \mid P \in \mathfrak{P}\}$, se sigue de 3.4 que $m(b-a) \leqslant \underline{\int_a^b} f$. Análogamente, $\overline{\int_a^b} f \leqslant M(b-a)$. Queda entonces por demostrar que el supremo $\underline{\int_a^b} f$ de las sumas inferiores no puede exceder al ínfimo $\overline{\int_a^b} f$ de las sumas superiores.

Sean P_1 y P_2 un par de particiones cualesquiera de $[a, b]$, y sea $P' = P_1 \cup P_2$. Tenemos $P_1 \subset P'$ y $P_2 \subset P'$; es decir, P' es un refinamiento tanto de P_1 como de P_2. Entonces, según el lema 3.6,

3.8 $$L(f, P_1) \leqslant L(f, P') \quad \text{y} \quad U(f, P') \leqslant U(f, P_2).$$

De 3.4, que se verifica para una partición arbitraria cualquiera P, obtenemos

$$L(f, P_1) \leqslant L(f, P') \leqslant U(f, P') \leqslant U(f, P_2)$$

o

$$L(f, P_1) \leqslant U(f, P_2)$$

para cualquier par de particiones P_1 y P_2 de $[a, b]$. Se sigue entonces para todo P_2 que $U(f, P_2)$ es una cota superior de $\{L(f, P_1) \mid P_1 \in \mathcal{P}\}$. Como $\underline{\int_a^b} f$ es el supremo (la menor cota superior) de $\{L(f, P_1) \mid P_1 \in \mathcal{P}\}$,

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant U(f, P_2) \text{ para todo } P_2 \in \mathcal{P},$$

y $\underline{\int_a^b} f$ es una cota inferior de $\{U(f, P_2) \mid P_2 \in \mathcal{P}\}$. Como $\underline{\int_a^b} f$ es el ínfimo (la mayor cota inferior) de $\{U(f, P_2) \mid P_2 \in \mathcal{P}\}$,

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f.$$

Lo que completa la prueba.

Estamos particularmente interesados en aquellas funciones para las que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En este caso, las sumas superiores e inferiores se aproximan unas a otras y asocian un número único con la función f sobre $[a, b]$. Este número es la integral definida.

3.9 Definición. *Una función f sobre $[a, b]$ se dice que es **(Riemann) integrable sobre** $[a, b]$ si f es acotada sobre $[a, b]$ y*

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

*Si f es integrable sobre $[a, b]$ entonces la **integral definida (de Riemann) de f desde** a **a** b, escrita $\int_a^b f$, está definida por*

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Otra notación para $\int_a^b f$ que a menudo se usa es $\int_a^b f(x)dx$. La "x" es un símbolo mudo y puede reemplazarse por cualquier otro símbolo conve-

niente. A este respecto, el símbolo “x” es como la “k” en $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Por ejemplo, podemos escribir

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(\theta)\,d\theta$$

o

$$\int_0^\pi \text{sen} = \int_0^\pi \text{sen}\, x\,dx = \int_0^\pi \text{sen}\, t\,dt = \int_0^\pi \text{sen}\, \theta\,d\theta.$$

El símbolo $\int_a^b f(x)dx$ representa la integral de a a b de la función cuya regla de correspondencia es $f(x)$. Por ejemplo, $\int_a^b \text{sen}\,(ax+b)dx$ representa la integral de a a b de la función f cuya regla de correspondencia es $f(x) = \text{sen}\,(ax+b)$; es decir, $\int_a^b \text{sen}\,(ax+b)dx = \int_a^b \text{sen}\,(aI+b)$.

Nuestra definición de la integral definida incluye el caso $a = b$. El intervalo $[a, a]$ consiste tan solo en el punto a, y la única partición de $[a, a]$ es $P = \{a = x_0, x_1 = a\}$. De aquí que si f está definida en a, entonces $L(f, P) = U(f, P) = f(a)\,(x_1 - x_0) = 0$. $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = 0$. Por tanto

3.10
$$\int_a^a f = 0$$

para toda función f definida en a. Esto corresponde geométricamente al hecho de que un rectángulo con una anchura igual a cero (un segmento rectilíneo) tiene área cero.

El siguiente resultado es una consecuencia directa de 3.4.

3.11 Teorema. *Si f es integrable sobre $[a, b]$ y P es una partición de $[a, b]$, entonces*

$$m(b-a) \leqslant L(f, P) \leqslant \int_a^b f \leqslant U(f, P) \leqslant M(b-a).$$

Prueba. Por 3.4 y la definición 3.5, tenemos para cualquier partición P de $[a, b]$,

$$m(b-a) \leqslant L(f, P) \leqslant \underline{\int_a^b} f \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f \leqslant U(f, P) \leqslant M(b-a).$$

Ahora bien, f integrable sobre $[a, b]$ implica $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, y de aquí

$$m(b-a) \leqslant L(f, P) \leqslant \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f \leqslant U(f, P) \leqslant M(b-a).$$

Enunciamos el anterior teorema para enfatizar que la integral definida es un número y que tenemos un medio de calcular este número colocándole cotas superiores e inferiores. Ilustramos a continuación el método de aproximarnos al valor de una integral por el cálculo de sumas superiores e inferiores.

3.12 Ejemplo. Supongamos que $f(x) = 1/x$ es integrable sobre $[1, 5]$ (más adelante veremos que tal es el caso). Obténganse valores aproximados de

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx.$$

SOLUCIÓN. Tomemos $P = \{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4, 5\}$. Ilustramos esto en la figura 9.

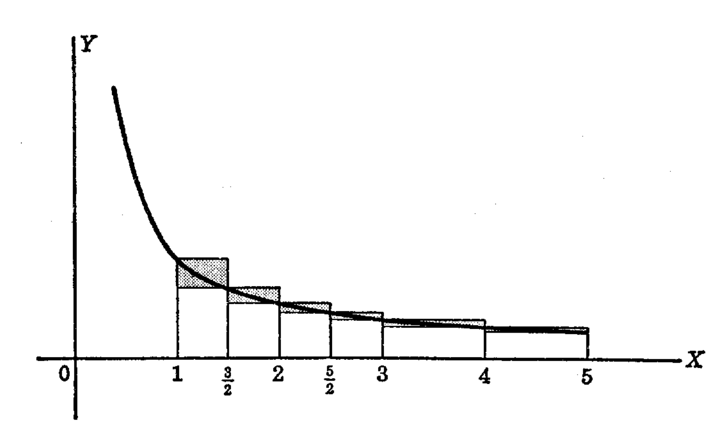


FIGURA 9

Como la función es monótonamente decreciente,

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{y} \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^{6} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

De donde

$$L(f, P) = \tfrac{2}{3}(\tfrac{3}{2}-1)+\tfrac{1}{2}(2-\tfrac{3}{2})+\tfrac{2}{5}(\tfrac{5}{2}-2)+\tfrac{1}{3}(3-\tfrac{5}{2})$$
$$+\tfrac{1}{4}(4-3)+\tfrac{1}{5}(5-4) = 1+\tfrac{2}{5} = 1.40$$

y

$$U(f, P) = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4} = 1.87.$$

Podemos aproximarnos entonces a $\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$ por $\frac{1}{2}(L(f,P)+U(f,P)) = 1.64$. Como

$$L(f, P) \leqslant \int_a^b f \leqslant U(f, P)$$

implica

$$\tfrac{1}{2}(L(f, P)-U(f, P)) \leqslant \int_a^b f-\tfrac{1}{2}(L(f, P)+U(f,P)) \leqslant \tfrac{1}{2}(U(f,P)-L(f,P)),$$

vemos que

3.13 $$\left|\int_a^b f-\tfrac{1}{2}(L(f, P)+U(f, P))\right| \leqslant \tfrac{1}{2}(U(f, P)-L(f, P)).$$

El número $\frac{1}{2}(U(f, P)-L(f, P))$ es una cota superior del error cometido al tomar como valor de $\int_1^5 f$ el número $\frac{1}{2}(L(f, P)+U(f, P))$. [El área sombreada en la figura 9 es $U(f, P)-L(f, P)$.] Así pues, en nuestro ejemplo, el error al tomar 1.64 como valor de $\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$ es menor o igual que $\frac{1}{2}(1.87-1.40) = 0.24$. La aproximación es —como nos hace esperar el examen de la figura 9— mucho mejor que esto. En realidad, $\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx = \ln 5$ —el logaritmo natural de 5— y con cinco cifras significativas $\ln 5 = 1.6094$.

Pasamos ahora a establecer un teorema que nos muestra que, en principio, es siempre posible aproximarnos a las integrales definidas, por medio de las sumas superiores e inferiores, tanto como deseemos.

3.14 Teorema. *Una función acotada f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ hay una partición P con la propiedad de que $U(f, P)-L(f, P) < \varepsilon$.*

PRUEBA. ($U(f, P)-L(f, P)$ es el área sombreada en la figura 7, pág. 533.) Supongamos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una tal P. Entonces, como

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant U(f, P)-L(f, P) < \varepsilon,$$

se sigue que $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, y f es integrable sobre $[a, b]$. Recíprocamente,

supongamos que f es integrable sobre $[a, b]$. Entonces $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f$.

Por lo tanto $\int_a^b f$ es el supremo de las sumas inferiores $\{L(f, P)\}$ y el ínfimo de las sumas superiores $\{U(f, P)\}$. De donde, para cada $\varepsilon > 0$ hay una P_1 tal que

$$\int_a^b f - L(f, P_1) < \varepsilon/2$$

y una P_2 tal que

$$U(f, P_2) - \int_a^b f < \varepsilon/2.$$

Sumando estas dos desigualdades, obtenemos

$$U(f, P_2) - L(f, P_1) < \varepsilon.$$

Sea $P = P_1 \cup P_2$; P es un refinamiento tanto de P_1 como de P_2. Por tanto,

$$U(f, P) - L(f, P) \leqslant U(f, P_2) - L(f, P_1) < \varepsilon.$$

Lo que completa la prueba.

Problemas

Supóngase —como es el caso— que todas las funciones que siguen son integrables sobre los intervalos dados por los límites de integración.

1. Demuéstrese que:

a) $0 \leqslant \int_0^\pi \text{sen} \leqslant \pi$

b) $\frac{1}{2} \leqslant \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx \leqslant 1$

c) $5 \leqslant \int_0^2 x^4 \, dx \leqslant 10$

d) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx < 1$

e) $\int_1^3 \frac{1}{x} dx > 1.$

2. Para una cierta partición P, sea $\bar{x}_k$ un cierto punto en $[x_{k-1}, x_k]$. Demuéstrese que cualquiera que sea la elección de los x_k se tiene

$$L(f, P) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant U(f, P).$$

Conclúyase de aquí, si f es integrable, que

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leqslant U(f, P) - L(f, P).$$

3. Usando la misma partición que en el ejemplo 3.12, calculemos un valor aproximado de $\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$ por la suma $\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)(x_k - x_{k-1})$, donde $\bar{x}_k$ es el punto medio del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Ilústrese esta suma aproximativa geométricamente.

4. Si f es no decreciente o no creciente, demuéstrese que la aproximación $\frac{1}{2}(U(f, P) + L(f, P))$ es la suma del área de trapezoides. Ilústrese geométricamente.

5. *a*) Por medio de un dibujo suficientemente aproximado de la gráfica de $y = f(x) = 1/x$ sobre papel cuadriculado estímese $\int_1^6 \frac{dx}{x}$.

b) Calcúlese analíticamente el valor aproximado de $\int_1^6 \frac{dx}{x}$ usando $P = \{1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6\}$ y una tabla de recíprocos. (El número que se está calculando es $\ln 6$, el logaritmo natural de 6. Con cinco cifras significativas, tenemos $\ln 6 = 1.7918$.)

6. Determínese si es o no integrable cada una de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.

a) I^{-1} sobre [1, 2].

Sugerencia. Demuéstrese que $M_k(I^{-1}) - m_k(I^{-1}) < |P|$ para toda partición P de [1, 2].

b) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ es irracional} \\ 0 \text{ si } x \text{ es racional} \end{cases}$, sobre [0, 1].

Sugerencia. Pruébese que para cualquier partición P, que $U(f, P) - L(f, P) = 1$.

c) La función "máximo entero contenido" sobre [0, 5].

d) $\sqrt{a^2 - x^2}$ sobre $[0, a/\sqrt{2}]$.

*7. Pruébese que: *si f es no decreciente (no creciente) sobre* $[a, b]$, *entonces f es integrable sobre* $[a, b]$.

Sugerencia. Puede demostrarse que bajo esas condiciones $U(f, P) - L(f, P) \leqslant |P|\,|f(b) - f(a)|$ para toda partición P.

*8. Supongamos que f es diferenciable sobre $[a, b]$ y que $|f'(x)| \leqslant K$ para todo $x \in [a, b]$. Aplíquese el teorema del valor medio y conclúyase que 1) para toda partición P, $U(f, P) - L(f, P) \leqslant K|P|(b-a)$, 2) f es integrable sobre $[a, b]$, y 3) $\left|\int_a^b f - \frac{1}{2}(U(f, P) + L(f, P))\right| \leqslant \frac{1}{2}K|P|(b-a)$.

***9.** ¿Cuán pequeño debería hacerse $|P|$ para estar seguros de que el error en la aproximación de

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos$ *b*) $\displaystyle\int_1^2 \frac{du}{u}$

c) $\displaystyle\int_{10}^{11} \frac{du}{u}$ *d*) $\displaystyle\int_0^5 \operatorname{sen}(\theta^2)\,d\theta$

por $\frac{1}{2}(U(f, P)+L(f, P))$ no es mayor que 0.0005?

***10.** Demuéstrese como una consecuencia del teorema 3 4 que: *f integrable sobre* $[a, b]$ *implica que la gráfica de f sobre* $[a, b]$ *tiene area cero.*

Sugerencia. Véase la figura 7.

****11.** Pruébese la siguiente extensión del teorema 3.14:

Una función f es integrable sobre $[a, b]$ *si y sólo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una* $\eta > 0$ *tal que* $|P| < \eta$ *implica* $U(f, P)-L(f, P) < \varepsilon$.

***12.** Pruébese que: si $f(x) = 0$ para todo $x\in[a, b]$ salvo un número finito de excepciones, entonces $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

4. DEFINICIÓN DE ÁREA

Volvemos ahora al problema de la definición del área. Nos restringimos aquí al siguiente tipo de conjuntos de puntos: dada una función f que no sea negativa en $[a, b]$, definimos

$$\mathfrak{R} = \{(x, y)\,|\,x\in[a, b] \quad \text{y} \quad y\in[0, f(x)]\}.$$

A $\mathfrak{R}$ se le llama "región bajo f de a a b". $\mathfrak{R}$ es la región limitada por la gráfica de f, las rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje X (figura 10). Denotamos el área $(\mathfrak{R})$ por $A_a^b(f)$. Trasladando los requerimientos 2.2, 2.3, y 2.4 sobre áreas a esta nueva notación, convenimos que una definición aceptable de $A_a^b(f)$ para funciones que son no negativas y acotadas sobre $[a, b]$ debe tener las siguientes propiedades:

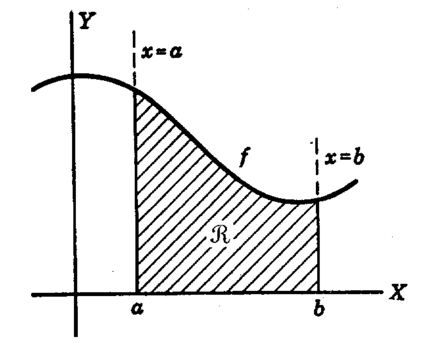


FIGURA 10

4.1 $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x\in[a, b]$ implica $A_a^b(f) \leqslant A_a^b(g)$;

4.2 $A_a^b(f) = A_a^c(f) + A_c^b(f)$ para todo $c \in [a, b]$;

4.3 $A_a^b(c) = c(b-a), \quad c \geqslant 0.$

La condición 4.1 afirma que el área de una parte no es mayor que el área del todo (figura 11). La condición 4.2 es un caso especial de 2.3 (figura 12): área $(\mathcal{E}) = A_a^c(f)$, área $(\mathcal{F}) = A_c^b(f)$, y área $(\mathcal{E} \cup \mathcal{F}) = A_a^b(f)$; 4.2 nos dice que área $(\mathcal{E} \cup \mathcal{F})$ = área $(\mathcal{E})$ + área $(\mathcal{F})$. Geométricamente 4.3 afirma que si $c > 0$, el área de un rectángulo es igual a su altura por su anchura (figura 13).

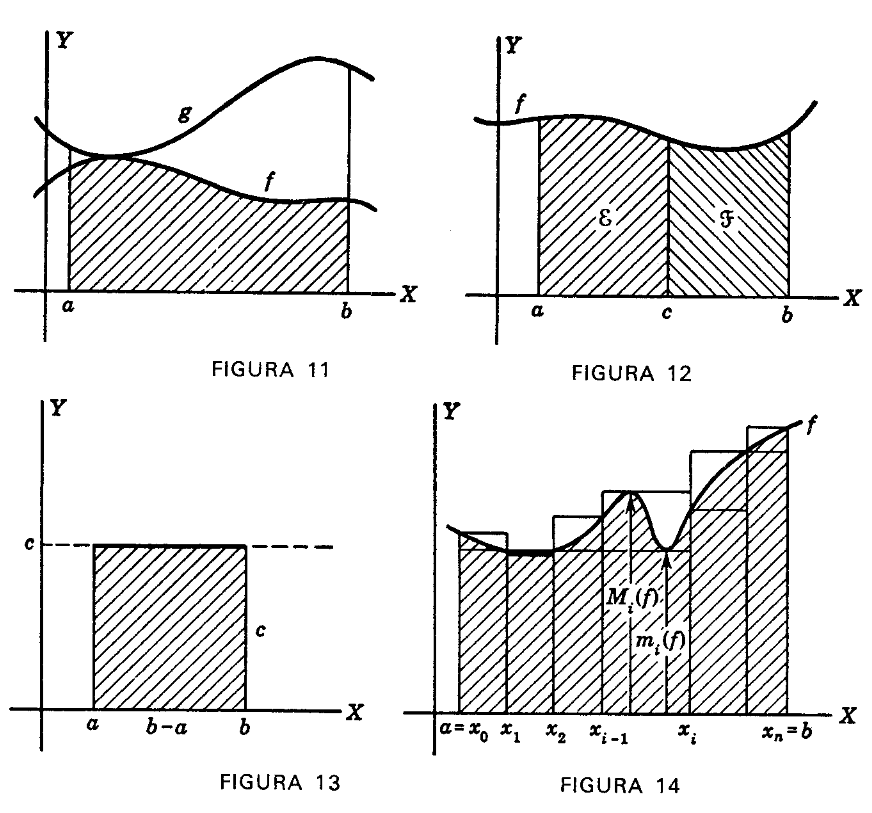


FIGURA 11

FIGURA 12

FIGURA 13

FIGURA 14

Sea $P = \{x_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ una partición arbitraria (figura 14) de $[a, b]$. De 4.2 se sigue que

4.4 $$A_a^b(f) = A_{x_0}^{x_1}(f) + A_{x_1}^{x_2}(f) + \ldots + A_{x_{n-1}}^{x_n}(f) = \sum_{i=1}^{n} A_{x_{i-1}}^{x_i}(f).$$

Usando ahora la notación 3.2, se sigue de 4.1 y 4.3 que

$$m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leqslant A_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leqslant M_i(f)(x_i - x_{i-1});$$

de donde obtenemos por 4.4

$$\textbf{4.5}\quad L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leqslant A_a^b(f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$
$$= U(f, P).$$

Se sigue entonces por 4.5 —que afirma que $A_a{}^b(f)$ es una cota superior de $\{L(f, P) \mid P \in \mathfrak{T}\}$ y una cota inferior de $\{U(f, P) \mid P \in \mathfrak{T}\}$— que

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant A_a^b(f) \leqslant \overline{\int_a^b} f.$$

Para funciones integrables, podemos, por tanto, concluir que $A_a{}^b(f) = \int_a^b f$.

Hemos así mostrado que si las áreas $A_a{}^b(f)$ bajo las gráficas de funciones no negativas integrables tienen que satisfacer 4.1, 4.2, y 4.3 (que para las regiones aquí consideradas son equivalentes a 2.2, 2.3, y 2.4), la única definición posible para $A_a{}^b(f)$ es

$$\textbf{4.6}\qquad A_a^b(f) = \int_a^b f.$$

Verificamos en la sección 6 que esta definición de área como una integral definida ciertamente satisface 4.1, 4.2, y 4.3, y sabemos entonces, por tanto, que estas condiciones determinan en forma única la definición de área para regiones del tipo aquí considerado.

5. LA EXISTENCIA DE FUNCIONES INTEGRABLES

El número denotado por $\int_a^b f$ y llamado integral definida de f de a a b ha sido definido para funciones integrables. Pero, ¿qué son las funciones integrables? El teorema 3.14 nos da una caracterización de las funciones integrables y este teorema puede usarse para establecer que las funciones no decrecientes (problema 7 de la sección 3) y las funciones con una primera derivada acotada (problema 8 de la sección 3) son integrables. Estos resultados son adecuados para decidir la integrabilidad de la mayor parte de las funciones elementales. Es, sin embargo, importante saber que las funciones continuas sobre un intervalo cerrado y acotado son integrables sobre ese intervalo. Veremos que este resultado se necesita para establecer los teoremas fundamentales del cálculo.

5.1 Teorema. *Toda función continua sobre* $[a, b]$ *es integrable sobre* $[a, b]$.

PRUEBA. Demostraremos que este teorema se sigue del teorema 3.14 y el hecho de que la continuidad de f sobre $[a, b]$ implica que f es uniformemente

continua sobre $[a, b]$. Sabemos también, como f es continua sobre $[a, b]$, que f es acotada sobre $[a, b]$ y que f tiene un máximo y un mínimo sobre cada subintervalo de $[a, b]$. Significa esto que para cada partición P de $[a, b]$ hay un $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ y un $x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$ tales que $f(x_i') = m_i(f)$ y $f(x_i'') = M_i(f)$. Tenemos ahora

$$0 \leqslant U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} [M_i(f) - m_i(f)] (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i'') - f(x_i')] (x_i - x_{i-1}).$$

La continuidad uniforme de f sobre $[a, b]$ implica que para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $x, y \in [a, b]$ y $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$. De donde $|P| < \delta$ implica

5.2 $$U(f, P) - L(f, P) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

De donde, por el teorema 3.14, se sigue que f es integrable.

La anterior prueba de existencia es muy parecida a la de otro importante resultado que enunciaremos y probaremos.

5.3 Teorema. *Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que*

$$\left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) (x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon$$

para toda partición P con norma $|P| < \delta$ y todos los $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

PRUEBA. Para cualquier partición P y cualquier elección $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$L(f, P) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) (x_i - x_{i-1}) \leqslant U(f, P).$$

Ahora bien, si f es continua en $[a, b]$, entonces, por el teorema 5.1, f es integrable sobre $[a, b]$ y, por el teorema 3.11,

$$L(f, P) \leqslant \int_a^b f \leqslant U(f, P).$$

Por tanto

$$\int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) (x_i - x_{i-1}) \leqslant U(f, P) - L(f, P)$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f \leqslant U(f, P) - L(f, P).$$

De donde

5.4 $$0 \leqslant \left| \int_a^b f - \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leqslant U(f, P) - L(f, P).$$

La conclusión de este teorema es, por tanto, una consecuencia de 5.2.

Este teorema nos muestra que haciendo la norma de nuestra partición suficientemente pequeña, podemos calcular por un número finito de multiplicaciones y adiciones integrales definidas de funciones continuas tan aproximadamente como deseemos. El resultado se expresa a menudo con una notación de límites: *si* f *es continua sobre* $[a, b]$, *entonces*

5.5 $$\lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f.$$

Lo que este límite significa exactamente queda explicado por el teorema 5.3.

Señalamos en la sección 3, página 540, cómo podemos aproximarnos a las integrales definidas por medio de las sumas superiores e inferiores. Como $L(f, P) \leqslant \int_a^b f \leqslant U(f, P)$, entonces $\frac{1}{2}(U(f, P) - L(f, P))$ es una cota superior del error cometido al tomar $\frac{1}{2}(U(f, P) + L(f, P))$ como valor de $\int_a^b f$. Una desventaja del método es la necesidad de computar dos sumas y de localizar y computar los valores máximos y mínimos de la función sobre cada subintervalo. El teorema 5.3 nos dice que también podemos aproximarnos a las integrales definidas por sumas $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)$ $(x_i - x_{i-1})$. Puede, sin embargo ser difícil determinar cuánto nos hemos aproximado. El teorema 5.3 establece la existencia de un δ para cada $\varepsilon > 0$, pero no provee medio alguno de determinarlo. La ventaja de la aproximación $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$ está en la libertad de elección que nos da para escoger los $\bar{x}_i$ dentro del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si se sabe más acerca de la función f, entonces los problemas 7 y 8 de la sección 3 ilustran cómo pueden hacerse estimaciones de cuán pequeña debe ser la norma para obtener una precisión dada.

Problemas

1. Subdivídase $[0, 10]$ en 5 subintervalos iguales y hallemos con tal P valores aproximados de $\int_0^{10} x^3\,dx$ por

a) $\frac{1}{2}(U(f, P)+L(f, P))$.

b) $\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$ donde $\bar{x}_i$ es el punto medio de cada subintervalo.

Ilústrense geométricamente las sumas aproximativas usadas. Compárense las aproximaciones obtenidas con el valor de la integral (problema 7 de la sección 2).

2. Subdivídase [0, 1] en 10 subintervalos iguales y obténganse aproximaciones de:

a) $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$

b) $\ln(1+\sqrt{2}) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

c) $\ln 2 = \int_0^1 (1+I)^{-1}$.

3. Dada la siguiente tabla de valores de una función continua f estímese gráfica y analíticamente el valor de $\int_0^{10} f$.

x	$f(x)$
0	0.00
1	1.25
2	3.00
3	3.87
4	2.71
5	0.92
6	−0.15
7	−0.22
8	−0.15
9	0.50
10	0.00

***4.** Pruébese que: *si* 1) *f está definido en* $[a, b]$, 2) g *es continua en* $[a, b]$, *y* 3) $f = g$ *en* $\langle a, b \rangle$, *entonces f es integrable en* $[a, b]$ *y* $\int_a^b f = \int_a^b g$.

***5.** Pruébese que: *si* 1) *f está definida en* $[a, b]$, 2) *f es continua en* $\langle a, b \rangle$, *y* 3) $\lim_{x \to a+} f(x)$ *y* $\lim_{x \to b-} f(x)$ *existen, entonces f es integrable en* $[a, b]$.

6. Exprésese el límite de cada una de las siguientes sumas como una integral definida.

a) $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)^3 (x_i-x_{i-1})$, P una partición de $[1, 9]$

b) $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{1+x_i}(x_i-x_{i-1})$, P una partición de $[0, \sqrt{2}]$

c) $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^2-x_{i-1}{}^2)$, P una partición de $[-5, 13]$

d) $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\operatorname{sen} \bar{x}_i}{1+\bar{x}_i^2}(x_i-x_{i-1})$, P una partición de $[0, 2]$ y $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

e) $\lim\limits_{|P|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$, donde f es continua en $[a, b]$, P es una partición de $[a, b]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\bar{x}_i$ se encuentra entre x_{i-1} y $x_{i-1}+\Delta x_i$.

6. PROPIEDADES BÁSICAS DE LA INTEGRAL

En nuestro estudio de sumas finitas aprendimos que

1) $$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

2) $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

3) $$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

4) $$\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

5) $$a_k \leqslant b_k (k = 1, \ldots, n) \text{ implica } \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k$$

6) $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

La integral definida tiene propiedades que son completamente análogas.

6.1 $$\int_a^b c = c(b-a).$$

6.2a *Si* $c \in [a, b]$ *y* f *es integrable en* $[a, b]$, *entonces* f *es integrable en* $[a, c]$ *y en* $[c, b]$ *e*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

6.2b *Si* $c \in [a, b]$ *y* f *es integrable en* $[a, c]$ *y en* $[c, b]$, *entonces* f *es integrable en* $[a, b]$ *e*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

6.3 *Si* f *es integrable en* $[a, b]$ *y* c *es una constante, entonces* cf *es integrable en* $[a, b]$ *e*

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f.$$

6.4 *Si* f *y* g *son integrables en* $[a, b]$, *entonces* $f+g$ *es integrable en* $[a, b]$ *e*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

6.5 *Si* f *y* g *son integrables en* $[a, b]$ *y* $f(x) \leqslant g(x)$ *para toda* $x \in [a, b]$, *entonces*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

6.6 *Si* f *es integrable en* $[a, b]$, *entonces* $|f|$ *es integrable en* $[a, b]$ *e*

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Nota. Las propiedades 6.5, 6.2, y 6.1 son ahora la verificación de que la definición en 4.6 ($A_a^b(f) = \int_a^b f$) de área bajo la gráfica de una función integrable satisface 2.2, 2.3, y 2.4.

Como preparación para las pruebas de estas propiedades básicas establecemos tres lemas.

6.7 Lema. *Si* f *es integrable sobre* $[A, B]$ *y* $[a, b] \subset [A, B]$, *entonces* f *es integrable sobre* $[a, b]$.

PRUEBA. (Véase el teorema 3.14.) Como f es integrable sobre $[A, B]$, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[A, B]$ tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Sea P_1 la partición P más los puntos divisorios a, b. Entonces, P_1 es un refinamiento de P y

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \varepsilon.$$

Sea $P_1' = P_1 \cap [a, b]$; es decir, si $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l$ son los puntos de P_1 en $[a, b]$ entonces $P_1' = \{a = x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l = b\}$. Tenemos ahora

$$U(f, P_1') - L(f, P_1') = \sum_{i=k+1}^{l} (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1})$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1})$$

$$= U(f, P_1) - L(f, P_1) < \varepsilon.$$

De donde f es integrable en $[a, b]$, lo que completa la prueba.

6.8 Lema. *Si f es acotada en $[a, b]$ y $c \in [a, b]$, entonces*

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$$

e

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

PRUEBA. Sea P_1 una partición de $[a, c]$ y sea P_2 una partición de $[c, b]$. Entonces $P = P_1 \cup P_2$ es una partición de $[a, b]$. Por la propiedad 2 de las sumas finitas, $L(f, P) = L(f, P_1) + L(f, P_2)$. De donde

$$L(f, P_1) + L(f, P_2) \leqslant \underline{\int_a^b} f$$

para cualquier partición P_1 de $[a, c]$ y cualquier partición P_2 de $[c, b]$. Por tanto, como $\underline{\int_a^b} f - L(f, P_2)$ es una cota superior de $\{L(f, P_1) \mid P_1 \in \mathcal{T}_1\}$, donde $\mathcal{T}_1$ es el conjunto de todas las particiones de $[a, c]$,

$$\underline{\int_a^c} f \leqslant \underline{\int_a^b} f - L(f, P_2).$$

Esto, a su vez, implica que

$$\underline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^c} f$$

es una cota superior de $\{L(f, P_2) \mid P_2 \in \mathcal{T}_2\}$, donde $\mathcal{T}_2$ es el conjunto de

todas las particiones de $[c, b]$. De donde

$$\underline{\int_c^b} f \leqslant \underline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^c} f$$

y

6.9
$$\underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \leqslant \underline{\int_a^b} f.$$

Para probar la desigualdad inversa, sea P una partición de $[a, b]$ y sea P' la partición de $[a, b]$ obtenida añadiendo c a P. Entonces P' es un refinamiento de P y $L(f, P) \leqslant L(f, P')$. Sea $P_1 = P' \cap [a, c]$ y $P_2 = P' \cap [c, b]$. Entonces

$$L(f, P) \leqslant L(f, P') = L(f, P_1) + L(f, P_2) \leqslant \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f.$$

De donde $\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_c^b} f$ es una cota superior de $\{L(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\}$, y

6.10
$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f.$$

Las desigualdades 6.9 y 6.10 implican

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f.$$

La prueba del resultado correspondiente para integrales superiores es completamente análoga.

6.11 Lema. *Si f y g son acotadas en $[a, b]$, entonces*

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leqslant \underline{\int_a^b} (f+g)$$

e

$$\overline{\int_a^b} (f+g) \leqslant \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

PRUEBA. Es una consecuencia directa del problema 8, pág. 446, que

$$m_i(f) + m_i(g) \leqslant m_i(f+g)$$

y

$$M_i(f+g) \leqslant M_i(f)+M_i(g).$$

De donde

$$L(f, P)+L(g, P) \leqslant L(f+g, P)$$

y

$$U(f+g, P) \leqslant U(f, P)+U(g, P)$$

para todas las particiones P de $[a, b]$. Sean P_1 y P_2 particiones de $[a, b]$ y sea $P = P_1 \cup P_2$. Entonces

$$L(f, P_1)+L(g, P_2) \leqslant L(f, P)+L(g, P) \leqslant L(f+g, P) \leqslant \underline{\int_a^b} (f+g).$$

Como $L(f, P_1)+L(g, P_2) \leqslant \underline{\int_a^b} (f+g)$ se verifica para todas las particiones P_1 y P_2 de $[a, b]$, se sigue (véase prueba del lema 6.8 para un argumento análogo) que

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leqslant \underline{\int_a^b} (f+g).$$

La prueba para las integrales superiores es la misma con las desigualdades invertidas.

Pasamos ahora a probar 6.1-6.6.

Prueba de 6.1. Para una función constante c, $L(c, P) = U(c, P) = c(b-a)$ para toda partición P de $[a, b]$. De donde $\int_a^b c = c(b-a)$.

Prueba de 6.2a. El lema 6.7 implica que f es integrable sobre $[a, c]$ y sobre $[c, b]$. La propiedad 6.2a es entonces una consecuencia directa del lema 6.8.

Prueba de 6.2b. Se sigue esto directamente del lema 6.8 (problema 1 *a*).

Prueba de 6.3. (Problema 1 *b*).

Prueba de 6.4. Como f y g se supone que son integrables sobre $[a, b]$, el lema 6.11 implica

$$\overline{\int_a^b} (f+g) \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g \leqslant \underline{\int_a^b} (f+g).$$

Pero

$$\underline{\int_a^b} (f+g) \leqslant \overline{\int_a^b} (f+g) \qquad \text{(lema 3.7)}.$$

De donde

$$\underline{\int_a^b} (f+g) = \overline{\int_a^b} (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,.$$

Esto completa la prueba.

PRUEBA DE 6.5. Sea $h = g-f = g+(-1)f$. Entonces por 6.3 y 6.4, h es integrable sobre $[a, b]$ y

$$\int_a^b h = \int_a^b g - \int_a^b f\,.$$

Como $h(x) \geqslant 0$ para $x \in [a, b]$, $L(h, P) \geqslant 0$ para toda partición P. Por tanto,

$$0 \leqslant L(h, P) \leqslant \int_a^b h = \int_a^b g - \int_a^b j$$

y

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g\,.$$

Lo que completa la prueba.

PRUEBA DE 6.6. Definimos f^+ y f^- de acuerdo con las reglas

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

y

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) \geqslant 0 \\ f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0\,. \end{cases}$$

Es claro entonces que

$$f = f^+ + f^- \quad \text{y} \quad |f| = f^+ - f^-\,.$$

Primero demostramos que f integrable sobre $[a, b]$ implica que f^+ es integrable sobre $[a, b]$. Como $f^+(x) \geqslant 0$ y $f^+(x) \geqslant f(x)$ para toda x, o

(i) $$M_i(f^+) = M_i(f) > 0 \quad \text{y} \quad m_i(f^+) \geqslant m_i(f)$$

o

(ii) $$M_i(f^+) = 0 \quad \text{y} \quad m_i(f^+) = 0\,.$$

En cualquiera de los casos

$$M_i(f^+) - m_i(f^+) \leqslant M_i(f) - m_i(f)\,.$$

De donde, para cada partición P de $[a, b]$,

$$U(f^+, P) - L(f^+, P) \leqslant U(f, P) - L(f, P),$$

y entonces se sigue del teorema 3.14 que, si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces f^+ es integrable sobre $[a, b]$. Es una consecuencia de 6.3 y 6.4 que la diferencia de un par de funciones integrables es una función integrable. Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces f^+ —como acabamos de ver— es integrable sobre $[a, b]$, y, por lo tanto, $f^- = f - f^+$ es integrable sobre $[a, b]$. Por tanto, $|f| = f^+ - f^-$ es también integrable sobre $[a, b]$.

Como $-f(x) \leqslant |f(x)|$ y $f(x) \leqslant |f(x)|$ para toda $x \in [a, b]$, 6.3 y 6.5 implican

$$-\int_a^b f = \int_a^b -f \leqslant \int_a^b |f|$$

y

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|.$$

Por tanto

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|,$$

lo que completa la prueba.

Hasta ahora, al hablar de $\int_a^b f$ hemos considerado que la integral era una integral sobre $[a, b]$, $a \leqslant b$. Queremos ahora extender la definición de $\int_a^b f$ para incluir el caso en que $a > b$. (La función f se llama *integrando*, y a y b los *límites de integración.*) Al extender la definición de integral queremos conservar sus principales propiedades. Esto determina entonces cómo debemos definir $\int_a^b f$ cuando $a > b$. Por ejemplo, queremos conservar la propiedad de aditividad 6.2a. Entonces

$$0 = \int_a^a f = \int_a^b f + \int_b^a f,$$

lo que implica

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

En las aplicaciones, esta extensión tiene, como veremos más tarde, un significado físico bien definido.

6.12 Definición. *Si f es integrable sobre $[A, B]$ y si $A \leqslant b < a \leqslant B$, entonces definimos*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Con esta extensión de la integral definida, podemos ahora reformular las propiedades básicas como sigue: (*f y g se supone que son integrables sobre $[A, B]$ y a, b se supone que están en $[A, B]$*).

6.1′ $$\int_a^b c = c(b-a)$$

6.2′ $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \qquad c \in [A, B]$$

6.3′ $$\int_a^b cf = c\int_a^b f$$

6.4′ $$\int_a^b [f+g] = \int_a^b f + \int_a^b g$$

6.5′ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ *para todo* $x \in [A, B]$

implica

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b g\right|.$$

6.6′ $$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|.$$

Las extensiones 6.1′, 6.3′, 6.4′, 6.5′, y 6.6′ realmente son obvias (problema 6).

PRUEBA DE 6.2′. Si $a \leqslant c \leqslant b$, entonces 6.2′ es una consecuencia de 6.2a. Si $a \leqslant b \leqslant c$, entonces, por el lema 6.7, f es integrable sobre $[a, c]$; por 6.2a y la definición 6.12,

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^b f - \int_c^b f$$

y de aquí

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Todos los otros casos son análogos.

Problemas

1. Pruébese: *a*) 6.2b. *b*) 6.3.

2. Pruébese que: *f continua sobre* $[a, b]$, $a < b$, $f(x) \geqslant 0$ *para todo* $x \in [a, b]$ *y* $f(x_0) \neq 0$ *para algún* $x_0 \in [a, b]$, *implica* $\int_a^b f > 0$.

Sugerencia. Como f es continua, existe un $\delta > 0$ tal que $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ implica $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0)$. Argúyase, con base en esto, que $L(f, P) > \delta f(x_0)$.

3. Pruébese que: *f y g continuas sobre* $[a, b]$, $a < b$, $f(x) \leqslant g(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$, *y* $f \neq g$ *sobre* $[a, b]$, *implica* $\int_a^b f < \int_a^b g$.

4. Si f es integrable sobre un intervalo $[a, b]$, demuéstrese que para cualquier número c

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx; \text{ es decir, } \int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} f \circ (I - c).$$

¿ Qué significa esto geométricamente?

5. Complétese la prueba de 6.2′.

6. Pruébense:

a) 6.1′ *b*) 6.3′ *c*) 6.4′
d) 6.5′ *e*) 6.6′.

7. Demuéstrese que:

a) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} u^3\,du = x^3$

b) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} I^{-1} = \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$

c) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} u^2\,du - \int_a^x u^2\,du \right] = x^2.$

***8.** Pruébese que: *si f está definida sobre* $[a, b]$, *si g es integrable sobre* $[a, b]$ *y si* $f(x) = g(x)$ *para toda* $x \in [a, b]$ *salvo un número finito, entonces f es integrable sobre* $[a, b]$ *y* $\int_a^b f = \int_a^b g$.

**Nota.* El teorema anterior nos dice que puede cambiarse un número finito de valores de una función integrable sin que quede afectado el valor de su integral. Así pues, si f está definida para todos, salvo para

un número finito de puntos de $[a, b]$, si g está definida sobre $[a, b]$, y si $f(x) = g(x)$ para todos, salvo un número finito de puntos en $[a, b]$, entonces decimos que f es *integrable* sobre $[a, b]$ si g es integrable sobre $[a, b]$; definimos $\int_a^b f = \int_a^b g$.

*9. Una función se dice que es *continua por pedazos* sobre $[a, b]$ si f es continua en todos, salvo un número finito de puntos en $[a, b]$, y si en cada punto de discontinuidad existen los límites a la derecha y a la izquierda (en a requerimos solamente que el límite a la derecha exista y en b solamente que exista el límite a la izquierda).

Pruébese que: *si f es continua por pedazos sobre $[a, b]$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.*

7. LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

"La originalidad de las matemáticas consiste en el hecho de que en la ciencia matemática se exhiben conexiones entre cosas que, aparte de por la acción de la razón humana, son extraordinariamente poco obvias." —A. N. Whitehead.

Los teoremas fundamentales del cálculo relacionan la diferenciación y la integración y muestran que, hasta un cierto punto, la integración es la inversa de la diferenciación. La operación D de diferenciación aplicada a una función f define una nueva función Df, por ejemplo, D sen = cos. La operación $\int_a$, llamada *integración* y leída "la integral desde a" está definida por $G = \int_a f$ donde G es la función con regla de correspondencia $G(x) = \int_a^x f$; el dominio de G es el conjunto de todas las x para las que la integral está definida, es decir, el conjunto de todas las x tales que f es integrable sobre $[a, x]$ si $a \leqslant x$ o sobre $[x, a]$ si $x < a$. Sabemos ya que

$$\int_0^x c\,dt = cx, \qquad \int_0^x t\,dt = x^2/2, \qquad \int_0^x t^2\,dt = x^3/3;$$

es decir,

$$\int_0 c = cI, \qquad \int_0 I = I^2/2, \qquad \int_0 I^2 = I^3/3.$$

Es cierto para cada uno de estos ejemplos que $D\int_a f = f$. El primer teorema fundamental del cálculo afirma que esta relación inversa entre la

diferenciación y la integración se verifica si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y si $a \in \mathfrak{J}$.

7.1 Teorema. *(El primer teorema fundamental del cálculo.)*
Sea G la función definida por

$$G(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y si $a \in \mathfrak{J}$, entonces G es diferenciable sobre $\mathfrak{J}$ y

$$G' = f \text{ sobre } \mathfrak{J}.$$

PRUEBA. En la prueba hacemos uso del teorema 5.1 y de las propiedades 6.1′ a 6.6′. Supongamos que $x_0 \in \mathfrak{J}$, $h \neq 0$, y $x_0 + h \in \mathfrak{J}$. Entonces (figura 15)

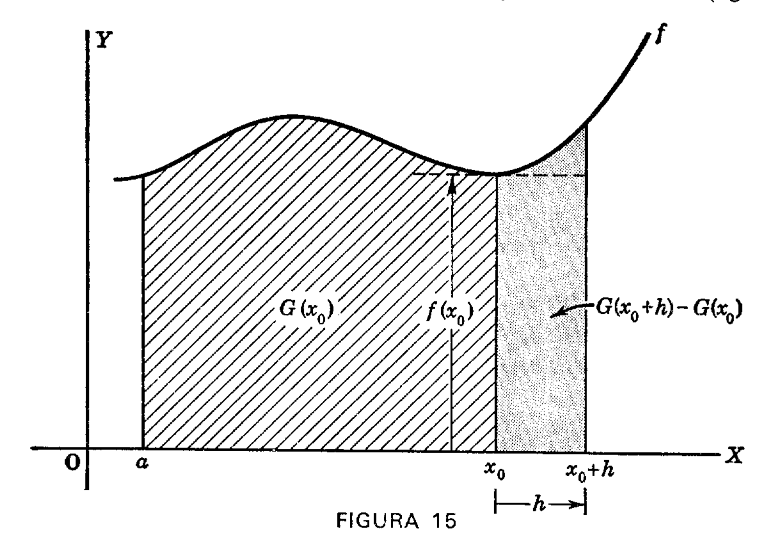


FIGURA 15

$$G(x_0+h) - G(x_0) = \int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^{x_0+h} f = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

Como $f(x_0) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)$, obtenemos

7.2

$$\frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f - f(x_0)]$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\,dt.$$

Como f es continua en x_0, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$ para todo $t \in \mathfrak{J} \cap \langle x_0-\delta, x_0+\delta \rangle$. Podemos entonces concluir que $0 < |h| < \delta$ y $x_0+h \in \mathfrak{J}$ implica $|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$ siempre que $x_0 \leqslant t \leqslant x_0+h$ si $h > 0$ o $x_0+h \leqslant t \leqslant x_0$ si $h < 0$. Por tanto, 7.2 implica

$$\left| \frac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon \, dt \right| = \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |h| < \delta \quad \text{y} \quad x_0+h \in \mathfrak{J}.$$

De donde

$$G'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h} = f(x_0)$$

para todo $x_0 \in \mathfrak{J}$. Que es lo que queríamos probar.

El segundo teorema fundamental del cálculo es una simple consecuencia del primer teorema fundamental. Enuncia que si F tiene una derivada continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y si $a \in \mathfrak{J}$, entonces la integración y la diferenciación están relacionadas por

$$\int_a DF = F - F(a) \text{ sobre } \mathfrak{J}.$$

7.3 Teorema. *(El segundo teorema fundamental del cálculo.)*

Sea f continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$. Si F es diferenciable sobre $\mathfrak{J}$ y si $F' = f$ sobre $\mathfrak{J}$, entonces para $a, b \in \mathfrak{J}$ cualesquiera

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

PRUEBA 1. Sea G la función definida sobre $\mathfrak{J}$ por

$$G(x) = \int_a^x f.$$

Por el primer teorema fundamental $G' = f$ sobre $\mathfrak{J}$. Por tanto, $G' = F'$ sobre $\mathfrak{J}$, y

$$G(x) = \int_a^x f = F(x) + c$$

para cierto número c y todo $x \in \mathfrak{J}$. Se sigue entonces, como $G(a) = 0$, que $c = -F(a)$. Por tanto

$$G(b) = \int_a^b f = F(b) - F(a),$$

lo que completa la prueba.

PRUEBA 2. Esta prueba del segundo teorema fundamental está basada en el teorema del valor medio para las derivadas y el teorema 5.3. Supongamos que $a, b \in \mathfrak{J}$ y $a < b$. Sea $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Como F es diferenciable sobre $[a, b]$ y $F' = f$ sobre $[a, b]$, obtenemos por el teorema del valor medio que para cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ hay una $\bar{x}_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ con la propiedad de que

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x_{i-1}) &= F'(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \\ &\quad + \ldots + [F(b) - F(x_{n-1})] \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Como esto es cierto para todas las subdivisiones P de $[a, b]$, se sigue del teorema 5.3 que

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Si $b \leqslant a$, entonces

$$\int_a^b f = -\int_b^a f = -[F(a) - F(b)] = F(b) - F(a).$$

El primer teorema fundamental enuncia: si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces

$$D_x\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

para $a, x \in \mathfrak{J}$ cualesquiera.

El segundo teorema fundamental enuncia: si F tiene una derivada continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces para $a, b \in \mathfrak{J}$ cualesquiera

$$\int_a^b D_x[F(x)]\,dx = F(b) - F(a).$$

La notación

$$F\Big]_a^b = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

es conveniente en la evaluación de las integrales y se usa en los siguientes ejemplos.

7.4 Ejemplo. Evalúense $\int_a^b I^2$ e $\int_0^a I^2$.

SOLUCIÓN. Para aplicar el segundo teorema fundamental, necesitamos encontrar una función y que satisfaga

$$y' = I^2.$$

Sabemos que

$$D(I^3) = 3I^2$$

y, por tanto,

$$D(\tfrac{1}{3}I^3) = I^2.$$

Por el segundo teorema fundamental, como I^2 es continua sobre R,

$$\int_a^b I^2 = \int_a^b D(\tfrac{1}{3}I^3) = \tfrac{1}{3}I^3\Big]_a^b = \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

para $a, b \in$ R cualesquiera, e

$$\int_0^a I^2 = \frac{a^3}{3}.$$

(Compárese esto con el método usado en la sección 2 para evaluar $\int_0^a x^2\,dx$.)

7.5 Ejemplo. Evalúese $\int_a^b x^{-2}\,dx$.

SOLUCIÓN. Si $x \neq 0$, entonces $D_x(x^{-1}) = -x^{-2}$. De donde, si $a, b \in \langle 0, \infty\rangle$ o $a, b \in \langle -\infty, 0\rangle$, podemos aplicar el segundo teorema fundamental y obtener

$$\int_a^b x^{-2}\,dx = \int_a^b D_x(-x^{-1})\,dx = -x^{-1}\Big]_a^b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Para ilustrar la necesidad de la restricción de que o $a, b \in \langle 0, \infty\rangle$ o $a, b \in \langle -\infty, 0\rangle$, planteémonos la pregunta:

$$¿\text{Es } \int_{-1}^1 x^{-2}\,dx = -x^{-1}\Big]_{-1}^1 = -1-1 = -2?$$

La contestación es, ciertamente, no, ya que si la integral estuviera definida sería, ciertamente, positiva (figura 16).

7.6 Ejemplo. Evalúese $\int_a^b I^n$ (n un entero).

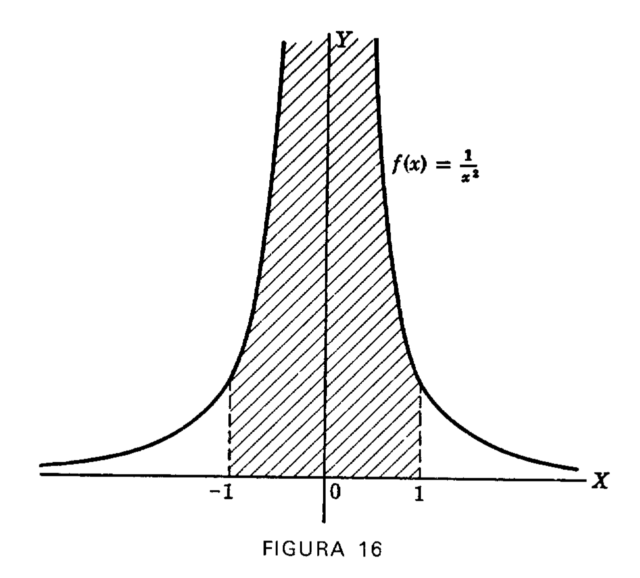


FIGURA 16

SOLUCIÓN. Deseamos encontrar una función y que satisfaga $y' = I^n$. Ahora bien

$$D(I^{n+1}) = (n+1)I^n.$$

De donde, si $n \neq -1$, una solución es

$$D\left(\frac{1}{n+1} I^{n+1}\right) = I^n.$$

Por tanto, por el segundo teorema fundamental

$$\int_a^b I^n = \frac{1}{n+1} I^{n+1}\bigg]_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}),$$

si tenemos en cuenta las siguientes restricciones:

(i) $n \neq -1$. (Ninguna de las funciones elementales que hemos estudiado tiene una derivada igual a $I^{-1} = \frac{1}{I}$.)

(ii) $a, b \in \langle 0, \infty \rangle$ o $a, b \in \langle -\infty, 0 \rangle$ si n es un entero negativo.

7.7 Ejemplo. Encuéntrese el área bajo la curva $y = 1/x^3$ desde $x = 1$ a $x = 10$.

SOLUCIÓN. De acuerdo con la sección 4 sabemos que esta área A está dada por $A = \int_1^{10} \frac{1}{x^3}\, dx$. Usando el resultado del ejemplo 7.6,

$$A = \int_1^{10} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{-2} \frac{1}{x^2}\Big]_1^{10} = \frac{1}{2}(1 - 10^{-2}) = 0.495.$$

7.8 Ejemplo. Encuéntrese el área bajo la gráfica de la función seno desde $x = 0$ a $x = \pi$ (figura 17).

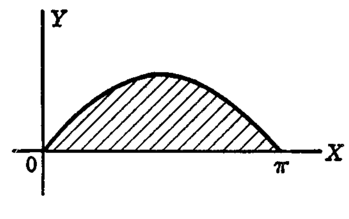


FIGURA 17

SOLUCIÓN. Esta área es $\int_0^{\pi}$ sen. Ahora bien

$$D \cos = - \operatorname{sen}$$

o

$$D(-\cos) = \operatorname{sen}.$$

Por tanto, por el segundo teorema fundamental,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} = \int_0^{\pi} D(-\cos) = -\cos\Big]_0^{\pi} = 2.$$

7.9 Ejemplo. Evalúese $\int_{-3}^{5} (x-1)^2 dx$.

SOLUCIÓN 1. Por 6.3′ y 6.4′,

$$\int_{-3}^{5} (x-1)^2\, dx = \int_{-3}^{5} (x^2 - 2x + 1)\, dx = \int_{-3}^{5} x^2\, dx - 2\int_{-3}^{5} x\, dx + \int_{-3}^{5} dx.$$

Por el segundo teorema fundamental

$$\int_{-3}^{5} dx = 8, \qquad \int_{-3}^{5} x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big]_{-3}^{5} = \frac{1}{2}[5^2 - (-3)^2] = 8,$$

$$\int_{-3}^{5} x^2\, dx = \tfrac{1}{3}\int_{-3}^{5} D_x(x^3)\, dx = \tfrac{1}{3}[5^3 - (-3)^3] = \tfrac{152}{3}.$$

De donde

$$\int_{-3}^{5} (x-1)^2\, dx = \tfrac{152}{3} - 2(8) + 8 = \tfrac{128}{3}.$$

SOLUCIÓN 2. Por el segundo teorema fundamental,

$$\int_{-3}^{5} (x-1)^2\,dx = \int_{-3}^{5} D_x[\tfrac{1}{3}(x-1)^3]\,dx = \tfrac{1}{3}(x-1)^3\Big]_{-3}^{5}$$

$$= \tfrac{1}{3}(4^3-(-4)^3) = \frac{2\cdot 4^3}{3} = \frac{128}{3}.$$

7.10 Ejemplo. Evalúese $\int_0^{\pi/2} \cos 3x dx$.

SOLUCIÓN. $D_x \operatorname{sen} 3x = 3 \cos 3x$. Por tanto

$$\int_0^{\pi/2} \cos 3x\,dx = \tfrac{1}{3}\int_0^{\pi/2} D_x(\operatorname{sen} 3x)\,dx = \tfrac{1}{3}(\operatorname{sen} 3\pi/2 - \operatorname{sen} 0) = -\tfrac{1}{3}.$$

7.11 Ejemplo. Evalúese $\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} x dx$.

SOLUCIÓN. (Integración por partes.) $D_x(x \cos x) = \cos x - x \operatorname{sen} x$. De donde

$$x \operatorname{sen} x = -D_x(x\cos x) + \cos x = -D_x(x\cos x) + D_x(\operatorname{sen} x)$$

$$= D_x(\operatorname{sen} x - x\cos x).$$

Por el segundo teorema fundamental

$$\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} x\,dx = \operatorname{sen} x - x\cos x\int_0^{2\pi} = -2\pi.$$

7.12 Ejemplo. Evalúese $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2$.

SOLUCIÓN 1. (Integración por partes.)

$$\begin{aligned} D(-\cos \operatorname{sen}) &= \operatorname{sen}^2 - \cos^2 \\ &= 2\operatorname{sen}^2 - 1 \\ &= 2\operatorname{sen}^2 - D(I). \end{aligned}$$

De donde

$$D[\tfrac{1}{2}(I - \cos \operatorname{sen})] = \operatorname{sen}^2.$$

Por tanto

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 = \frac{1}{2}(I - \cos \operatorname{sen})\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

SOLUCIÓN 2. $\text{sen}^2 = \frac{1}{2}(I - \cos \circ 2I)$. Por tanto

$$\int_0^\pi \text{sen}^2 = \frac{1}{2}\int_0^\pi (I - \cos \circ 2I) = \frac{1}{2}(I - \tfrac{1}{2}\,\text{sen} \circ 2I)\Big]_0^\pi = \pi/2.$$

7.13 Ejemplo. Evalúese $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$D_x(1-x^3)^{3/2} = \tfrac{3}{2}(1-x^3)^{1/2}(-3x^2)$$

o

$$D_x[-\tfrac{2}{9}(1-x^3)^{3/2}] = x^2\sqrt{1-x^3}.$$

Por el segundo teorema fundamental

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^3}\,dx = -\tfrac{2}{9}(1-x^3)^{3/2}\Big]_0^1 = \tfrac{2}{9}.$$

7.14 Ejemplo. La velocidad $v(t)$ en el instante t de una partícula que viaja a lo largo de una recta es $v(t) = t + \cos t$. ¿Cual es la distancia recorrida desde el instante $t = 0$ al instante $t = 4\pi$?

SOLUCIÓN. Sea $s(t)$ la distancia de la partícula al origen en el instante t. Entonces, la distancia recorrida desde el instante t_1 al instante t_2 es $s(t_2) - s(t_1)$.

Como $s' = |v|$, tenemos el segundo teorema fundamental

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} |v|.$$

De donde

$$s(4\pi) - s(0) = \int_0^{4\pi} (t + \cos t)\,dt$$

$$= (\tfrac{1}{2}t^2 + \text{sen}\, t)\Big]_0^{4\pi} = 8\pi^2.$$

7.15 Ejemplo. ¿Cuál es la solución de

$$y'(t) = \frac{\text{sen}\, t}{t}$$

que satisface

$$y(3) = -18\ ?$$

SOLUCIÓN. Supongamos que y es una solución. Entonces

$$\int_3^x y'(t)\,dt = \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

y, por el segundo teorema fundamental,

$$y(x) - y(3) = \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

De aquí que, si y es una solución, su regla de correspondencia es

$$y(x) = y(3) + \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = -18 + \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

Es, entonces, una consecuencia del primer teorema fundamental que la función definida por

$$y(x) = -18 + \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

es *la* solución de la ecuación diferencial que satisface $y(3) = -18$. (Esta función puede expresarse en términos de la función "integral de seno" $\int_0 \frac{\operatorname{sen}}{I}$. Para esta función se han calculado tablas muy extensas. Si no fuera así, sabemos que podríamos calcular valores de esta función tan aproximados como deseáramos, y con las máquinas calculadoras modernas y un conocimiento de análisis numérico éste no es un cálculo difícil.)

Problemas

1. Evalúense las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^{3} 2(x^3+4)\,dx$ *b*) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}$ *c*) $\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx$

d) $D_x\left\{\int_0^x \cos^3\right\}$ *e*) $\int_0^{\pi} D_t\{\cos^3 t\}\,dt$ *f*) $\int_{-2}^{2} u^4\,du$

g) $\int_0^8 x^{13}\,dx$ *h*) $\int_1^3 \frac{1}{x^3}\,dx$

i) $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^3}\,dx$ *j*) $\int_0^{2.5} x(x^2-1)^3\,dx$

k) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \cos$

l) $\displaystyle\int_{-1}^{3} z\sqrt{1+z^2}\,dz$

m) $\displaystyle\int_4^{0} u(u^2+2)\,du$

n) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} I \cos \circ 3I$

o) $\displaystyle\int_0^{0.997} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$

p) $\displaystyle\int_0^{0.997} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$

q) $\displaystyle\int_0^{1.5} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$

r) $\displaystyle D_t\left\{\int_0^{t} \sqrt{1+x^4}\,dx\right\}$

s) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2$

t) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta\,d\theta$

u) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \circ 2I$

v) $\displaystyle\int_0^{3} I^3\sqrt{1+I^4}$

w) $\displaystyle D_t\left\{\int_0^{t^2} \frac{1}{1+u^2}\,du\right\}$

x) $\displaystyle D_\theta\left\{\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2}\right\}$

y) $\displaystyle D_\theta\left\{\int_\theta^{\theta^2} \frac{1}{1+\cos^2}\right\}$

z) $\displaystyle\int_0^{t} (\operatorname{sen} \circ \cos)\operatorname{sen}.$

2. Encuéntrese el área de la región sobre el intervalo dado y bajo la curva dada.

a) $[0, 3]$, $y = 4x^2$

b) $[2, 6]$, $y = \dfrac{x+1}{x^3}$

c) $[-3, 7]$, $y = 5$

d) $[-\pi/2, 0]$, $y = \cos x$

e) $[0, \pi/2]$, $y = \cos x$

f) $[0, \pi/2]$, $y = x^2 \cos x$.

3. Encuéntrese el área acotada por la curva $y+4x^2 = 5$ y el eje X.

4. Encuéntrese el área acotada por la curva $4y^2+x = 2$ y el eje Y.

5. Encuéntrese el área acotada por la curva $x+\sqrt{y} = 2$ y los ejes de coordenadas.

6. Denotemos por $v(t)$ la velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de una recta en el instante t. Determínese la distancia recorrida por la partícula desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2.

a) $v(t) = 32t-10;\ t_1 = 0,\ t_2 = 30$

b) $v(t) = t + |\cos t|$; $t_1 = 0$, $t_2 = 4\pi$

c) $v(t) = t\sqrt{1+t^2}$; $t_1 = 10$; $t_2 = 100$.

7. Determínese la solución de la ecuación diferencial que satisface la condición dada.

a) $y' = (1+I)^2$, $y(0) = 0$

b) $y'(t) = t(1+t)^{10}$, $y(0) = 10$

Sugerencia. Nótese que $(1+t)^{11} = (1+t)^{10} + t(1+t)^{10}$.

c) $y' = \dfrac{\text{sen}}{1+I^2}$, $\quad y(0) = y_0$.

***8.** Pruébese que: *sea f integrable sobre $[a, b]$ y defínase G sobre $[a, b]$ por la regla de correspondencia*

$$G(x) = \int_a^x f.$$

Entonces G es continua sobre $[a, b]$ y en todo punto $x_0 \in [a, b]$ donde f es continua

$$G'(x_0) = f(x_0).$$

***9.** Demuéstrese que: *si f es continua sobre $[a, b]$ y $f = (F' \circ g)g'$ sobre $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f = \int_a^b (F' \circ g)g' = F(g(b)) - F(g(a)).$$

10. Demuéstrese que:

$$\int_a^b \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int_{1+a^2}^{1+b^2} \frac{du}{u}.$$

Sugerencia. Sea $F(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{du}{u}$, $t > 0$. Entonces

$$D_x(F(1+x^2)) = \frac{2x}{1+x^2} \text{ para todo } x.$$

8. EL PRIMER TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA LAS INTEGRALES

La media o promedio aritmético de n números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

La integral definida nos permite extender el concepto de media o promedio a los valores de una función sobre un intervalo.

8.1 Definición. *Sea f integrable sobre un intervalo* $[a, b]$. *La* ***media de*** f ***sobre*** $[a, b]$ *se define como*

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Geométricamente, $\bar{f}$ es la altura "promedio" de f sobre el intervalo (figura 18). El área del rectángulo de altura $\bar{f}$ y base $[a, b]$ es igual al área bajo la curva:

$$(b-a)\bar{f} = \int_a^b f.$$

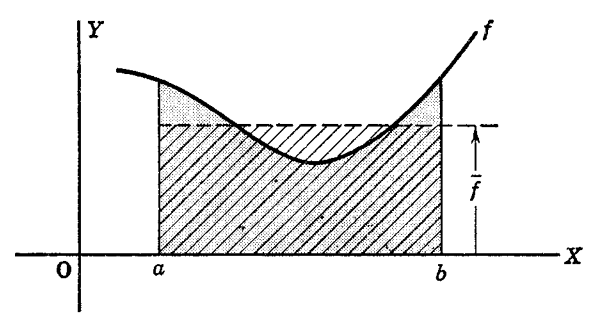


FIGURA 18

En el siguiente teorema probamos que una función continua asume su valor medio.

8.2 Teorema. (Primer teorema del valor medio para las integrales.)

Si f es continua sobre $[a, b]$, *entonces hay un número* $c \in \langle a, b \rangle$ *tal que* $f(c) = \bar{f}$; *es decir, tal que*

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

PRUEBA. El primer teorema del valor medio para las integrales es una consecuencia del teorema del valor medio para las derivadas y del primer teorema fundamental. Sea

$$G(x) = \int_a^x f, \qquad x \in [a, b].$$

Entonces, por el primer teorema fundamental, G es diferenciable sobre $[a, b]$ y podemos aplicar el teorema del valor medio a G.

Luego, para alguna $c \in \langle a, b \rangle$

$$G(b) - G(a) = G(b) = G'(c)(b-a).$$

Por el primer teorema fundamental y la definición de G esta ecuación nos dice que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

Lo que completa la prueba.

En lugar de la media o promedio aritmético simple

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

se considera con frecuencia una media o promedio con pesos ($m_k \geqslant 0$)

$$\bar{a} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k a_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

Si, por ejemplo, $a_1, \ldots, a_n$ son las abscisas de partículas de masas $m_1, \ldots, m_n$, entonces $\bar{a}$ es la abscisa del *centro de masas* del sistema de partículas.

La cantidad

8.3
$$\bar{f} = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g},$$

donde $g(x) \geqslant 0$ para $x \in [a, b]$, es la correspondiente generalización de estos promedios con peso.

Tenemos, a su vez, una generalización del primer teorema del valor medio para integrales. Afirma que para cada promedio con peso 8.3 la función f asume su promedio con peso $\bar{f}$.

8.4 Teorema. *Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, $a < b$, y si $g(x) \geqslant 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces, para alguna $c \in \langle a, b \rangle$,*

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

PRUEBA. Consideremos la función G definida por la regla

$$G(t) = f(t) \int_a^b g - \int_a^b fg = \int_a^b [f(t) - \bar{f}] g.$$

Lo que deseamos probar es que $G(t) = 0$ para algún $t \in \langle a, b\rangle$. Sea x_1 un punto en que f toma su valor mínimo sobre $[a, b]$ y x_2 un punto en que f toma su valor máximo sobre $[a, b]$. Entonces

$$G(x_1) \leqslant 0 \quad \text{y} \quad G(x_2) \geqslant 0.$$

Luego o $G(x_1) < 0$ y $G(x_2) > 0$ o una (o ambas) de las dos cantidades es cero.

Si $G(x_1) < 0$ y $G(x_2) > 0$, entonces, por el teorema del valor intermedio $G(c) = 0$ para algún c entre x_1 y x_2, ya que, claramente, la continuidad de f sobre $[a, b]$ implica que G es continua sobre $[a, b]$. Los números x_1 y x_2 están en $[a, b]$ y no son iguales, y, por tanto, c está en $\langle a, b\rangle$. Esto prueba el teorema para este caso.

Supongamos ahora que $G(x_1) = 0$ o $G(x_2) = 0$. Para concretar, suponemos $G(x_2) = 0$. [La prueba para $G(x_1) = 0$ se obtiene simplemente reemplazando f por $-f$.]

Como $[f(x_2)-f(x_1)]\,g(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a, b]$, $G(x_2) = 0$ implica (problema 2, sección 6, pág. 557) que $[f(x_2)-f(x)]\,g(x) = 0$ para toda $x \in [a, b]$. De donde $g(x) = 0$ para toda $x \in \langle a, b\rangle$ o $f(x_2)-f(c) = 0$ para alguna $c \in \langle a, b\rangle$. La primera de estas posibilidades implica que $G(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$, y la segunda posibilidad implica que $G(c) = G(x_2) = 0$. Así pues, en cualquiera de los casos, el teorema es cierto, lo que completa la prueba.

Problemas

Encuéntrese el valor medio de cada una de las siguientes funciones sobre el intervalo dado:

1. $f = I^2$; $[-1, 4]$

2. sen; $[0, 2\pi]$

3. sen; $[-c, c]$

4. sen; $[0, \pi]$

5. $\cos \frac{1}{2}x$; $[-\pi, \pi]$

6. $\cos^2$; $[0, 2\pi]$

7. sen^2; $[0, 2\pi]$

8. $I(1+I)^4$; $[-1, 1]$

9. $I(1+I^2)^4$; $[-1, 1]$

10. $I(1+I)^{1/2}$; $[0, 15]$

11. $I(1+I^2)^{1/2}$; $[0, 1]$

12. I sen; $[0, 2\pi]$

13. $f(\theta) = A^2 \cos \omega\theta$; $[0, 2\pi/\omega]$

14. Determínese el valor mínimo de la función E definida por

a) $E(u) = [\sum_{k=1}^{n} (a_k-u)^2]^{1/2}$ *b*) $E(u) = \left[\int_a^b (f(x)-u)^2\,dx\right]^{1/2}$.

15. Considérese una barra recta AB de longitud l. Sea

$$m(x) = \int_0^x \rho = \int_0^x \rho(u)\,du$$

la masa de una longitud x de la barra donde x se mide desde el extremo A de la barra. La función ρ se llama *densidad lineal* de la barra. La cantidad $\int_0^l I\rho = \int_0^l x\rho(x)$ se llama *(primer) momento* de la barra con respecto a A, y la cantidad

$$\bar{x} = \frac{\int_0^l I\rho}{\int_0^l \rho} = \frac{\int_0^l x\rho(x)\,dx}{\int_0^l \rho(x)\,dx}$$

es la distancia del *centro de masas* de la barra a A.

a) Demuéstrese que el centro de masas de una barra uniforme (de densidad lineal constante) está en el centro de la barra.

b) Localícese el centro de masas de una barra de longitud l si $\rho(x) = a \operatorname{sen} \frac{\pi}{2l} x$ para todo $x \in [0, 1]$; es decir, $\rho = a \operatorname{sen} \circ \left(\frac{\pi}{2l} I\right)$.

c) Localícese el centro de masas de una barra de longitud l si $\rho(x) = c_1$ para $x \in [0, a\rangle$ y $\rho(x) = c_2$ para $x \in \langle a, 1]$.

16. *a*) Una barra AB puede dividirse en dos partes AC y CB cuyas masas y centros de masas son conocidos. Sean M_1 y M_2 las masas de AC y CB, y sean $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ las distancias de sus centros de masas a A. Demuéstrese que la distancia del centro de masas de la barra AB a A es

$$\bar{x} = \frac{M_1 \bar{x}_1 + M_2 \bar{x}_2}{M_1 + M_2}.$$

b) Úsese este resultado para resolver el anterior problema 15*c*.

17. Si la densidad de una barra es simétrica respecto de su centro, demuéstrese que el centro de masas de la barra está en el centro de la barra.

9. INTEGRALES IMPROPIAS

Al definir la integral definida $\int_a^b f$ sobre un intervalo $[a, b]$, nos restringimos 1) a intervalos finitos $[a, b]$, y 2) a funciones acotadas sobre $[a, b]$. Así, por ejemplo, todavía no hemos asignado un significado a $\int_0^\infty \frac{1}{(I+1)^2}$ o a $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$. Tales integrales se llaman *integrales impropias*.

Consideramos primero el caso en que f es integrable sobre $[a, b]$ para

todo $b < \infty$. Entonces $\int_a^\infty f$ se llama *integral impropia de primera clase*. Si existe $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f$, entonces la integral impropia se dice que es *convergente* y

9.1 $$\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f.$$

Si el límite no existe, se dice que la integral impropia es *divergente*. Análogamente, si f es integrable sobre $[a, b]$ para todo $a > -\infty$, $\int_{-\infty}^b f$ se dice que es una integral impropia de primera clase y se define por

$$\int_{-\infty}^b f = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f.$$

9.2 Ejemplo. Determínese la convergencia o divergencia de cada una de las siguientes integrales. Cuando sea convergente, evalúese la integral.

a) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2}$$

b) $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

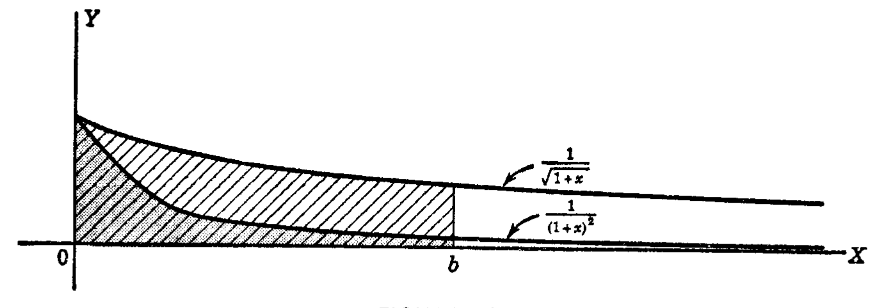


FIGURA 19

SOLUCIÓN. (Figura 19.)

a) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{(1+x)^2} = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[1 - \frac{1}{1+b}\right] = 1.$$

De donde la integral impropia converge e

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = 1 .$$

b) $$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\Big]_0^b = 2(\sqrt{1+b}-1).$$

Por tanto, $\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = \lim\limits_{b\to\infty} 2(\sqrt{1+b}-1) = \infty$ e $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ es divergente.

En cada uno de los anteriores ejemplos la altura de la gráfica de la función tiende a cero cuando $b \to \infty$ (figura 19). En (*a*) la altura tiende a cero con la suficiente rapidez para que el área que está bajo la gráfica tienda a uno. En (*b*) el área que está bajo la gráfica no está acotada.

Consideramos a continuación el caso cuando f es integrable sobre $[a, b-\varepsilon]$ para todo $\varepsilon > 0$, y no está acotada sobre $[a, b\rangle$. Entonces $\int_a^{b-\varepsilon} f$ se llama *integral impropia de segunda clase*. Si $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f$ existe, la integral impropia se dice que es *convergente* y

9.3 $$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f .$$

Si el límite no existe la integral impropia se dice que es *divergente*. Cuando f es integrable sobre $[a+\varepsilon, b]$ para todo $\varepsilon > 0$ y no está acotada sobre $\langle a, b]$ definimos

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f .$$

9.4 Ejemplo. Determínese la convergencia o divergencia de cada una de las siguientes integrales. Cuando sea convergente, evalúese su integral.

a) $$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$$

b) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} .$$

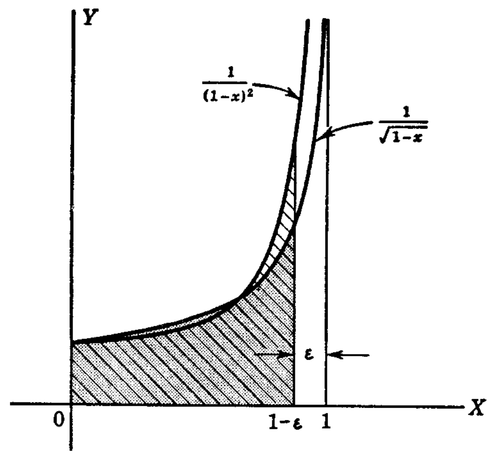


FIGURA 20

SOLUCIÓN. (Figura 20.)

$$a) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{1-x}\Big]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = \infty .$$

La integral impropia es divergente.

$$b) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0+} -2\sqrt{1-x}\Big]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon\to 0+} (1-\sqrt{\varepsilon}) = 2 .$$

En este ejemplo las alturas de las gráficas tienden a ∞ cuando $x \to 1^-$. Pero en el caso *b*) la altura crece con suficiente lentitud para que el área que está bajo la gráfica tienda a 2.

9.5 Ejemplo. Demuéstrese que: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{du}{u} = \infty.$

SOLUCIÓN. Sea $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{du}{u}$, $x > 0$. Entonces $G'(x) = \dfrac{x}{1}$, $x > 0$, y G es una función creciente. Ahora bien

$$D_x[G(x^n)] = nx^{n-1}G'(x^n) = \frac{nx^{n-1}}{x^n} = \frac{n}{x} = nG'(x).$$

Por tanto, como $D_x[G(x^n)] = D_x[nG(x)]$,

$$G(x^n) = nG(x)+c.$$

Tomando $x = 1$, vemos que $c = 0$; es decir,

$$G(x^n) = nG(x).$$

Como $G(x) > 0$ para $x > 1$, se sigue que para todo $x > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} G(x^n) = \infty$. Por ser G una función creciente podemos concluir que

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{du}{u} = \int_1^\infty \frac{du}{u} = \infty.$$

El rango de G sobre $[1, \infty\rangle$ es $[0, \infty\rangle$.

Problemas

1. Dígase por qué cada una de las siguientes integrales es impropia, y determínese la convergencia o divergencia de la integral. Cuando sea convergente, evalúese la integral.

a) $\int_1^\infty I^{-3}$ *b*) $\int_{-\infty}^{-3} I^{-3}$

c) $\int_{r_0}^\infty \frac{dr}{r^2}\ (r_0 > 0)$ *d*) $\int_0^{r_0} \frac{dr}{r^2}$

e) $\int_1^\infty I^{-1/2}$ *f*) $\int_0^1 I^{-1/2}$

g) $\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx$ *h*) $\int_1^\infty x^{-2/3}\,dx$

i) $\int_0^1 I^{-3/2}$ *j*) $\int_0^1 I^{-2/3}$

k) $\int_0^4 \frac{du}{\sqrt{4-u}}$ *l*) $\int_{-5}^0 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$

m) $\int_0^5 \frac{x}{(25-x^2)^{3/2}}\,dx$ *n*) $\int_0^\infty \frac{x}{(a^2+x^2)^4}\,dx$

o) $\int_0^{\pi/2} \cos^{-2}$ *p*) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\cos^{-1/2}$.

2. Si f es integrable sobre cada intervalo finito, entonces la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f$ está definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{0} f + \int_{0}^{\infty} f,$$

donde $\int_{-\infty}^{\infty} f$ se dice que es *convergente* si las dos integrales impropias de la derecha son convergentes y esta ecuación define el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} f$. Si una (o ambas) de las integrales diverge, $\int_{-\infty}^{\infty} f$ se dice que es *divergente*. Determínese la convergencia o divergencia de cada una de las siguientes integrales impropias y evalúense las integrales convergentes.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx$ *b*) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I}{\sqrt{1+I^2}}$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}, \quad a > 0.$

Sugerencia. Demuéstrese que: $D_x\left[\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right] = \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$

d) $\int_{-\infty}^{\infty}$ sen.

3. Si f es integrable sobre $[a, c-\varepsilon]$ y sobre $[c+\varepsilon, b]$ para todo $\varepsilon > 0$ y no está acotada sobre $[a, c\rangle \cup \langle c, b]$, entonces $\int_a^b f$ se llama *integral impropia* y su valor está definido por

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Si las dos integrales de la derecha son convergentes, entonces $\int_a^b f$ se dice que es *convergente* y esta ecuación define el valor de $\int_a^b f$. Si alguna (o ambas) de las integrales diverge, $\int_a^b f$ se dice que es *divergente*. Determínese la convergencia o divergencia de cada una de las siguientes integrales impropias y evalúense las integrales convergentes.

$a)\ \int_{-1}^{\infty} I^{-2}$ $\qquad b)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}}$

$c)\ \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(1-I)^{1/3}}$ $\qquad d)\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^{-1}$

$e)\ \int_{-1}^{1} f$, donde $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x < 0$ y $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ para $x > 0$.

4. ¿Cuál es el área limitada por la curva cuya ecuación es $y = 1/\sqrt{4-x}$, el eje Y, el eje X, y la asíntota $x = 4$?

5. Demuéstrese que: $\int_{0}^{1} I^{-1} = \infty$.

***6.** Demuéstrese que: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty$.

10. RESUMEN

En esta sección hemos definido y estudiado el concepto básico del cálculo integral, la integral definida. Aprendimos cómo encontrar valores aproximados de las integrales definidas mediante un número finito de operaciones aritméticas (adiciones y multiplicaciones), y conocemos también ya algunos métodos para poder estimar la precisión de la aproximación obtenida.

Los teoremas fundamentales del cálculo enuncian las relaciones básicas e importantes entre el cálculo diferencial y el cálculo integral. En cierto sentido, podemos decir que la diferenciación y la integración son procesos inversos.

Podemos comenzar a ver que el primer teorema fundamental es básico para la teoría de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, si $y' = I^{-1}$ sobre $\langle 0, \infty \rangle$ y $y(1) = 0$, entonces $y = \int_1 I^{-1}$. Más adelante se dará un nombre a esta función (la función logaritmo natural) y estudiaremos sus propiedades básicas. En cierto número de problemas y ejemplos hemos calculado valores aproximados de esta función. Muchos problemas físicos pueden reducirse al problema de resolver una ecuación diferencial y la resolución de la ecuación diferencial puede expresarse como una integral. Las propiedades generales de la solución pueden, entonces, derivarse de las propiedades generales de las integrales y las derivadas. Pueden calcularse valores particulares de la solución hasta cualquier grado deseado de precisión y el engorro del cálculo mecánico desaparece con las modernas

calculadoras electrónicas. Desde luego, en muchos problemas la integral puede expresarse en términos de funciones cuyas propiedades son bien conocidas y para las que ya se han computado extensas tablas.

El segundo teorema fundamental nos dice que bajo ciertas condiciones toda fórmula de diferenciación, cuando es invertida, es una fórmula de integración. Hemos ilustrado esto con numerosos ejemplos y problemas. Más adelante estudiaremos en forma más sistemática métodos y técnicas de integración y aprenderemos cómo usar las tablas de integrales.

Problemas de repaso

1. Para cada una de las funciones F abajo definidas localícense los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión.

a) $F(x) = \int_1^x I^{-1}$ *b*) $F(t) = \int_0^t x^3 \operatorname{sen} x\, dx$

c) $F = \int_0 g$, donde $g(0) = 1$, $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ $(x \neq 0)$.

2. ¿Qué está incorrecto en la siguiente integración:

$$\int_0^\pi \sec^2 = \int_0^\pi D(\tan) = \tan\Big]_0^\pi = 0\ ?$$

3. Supongamos que f es continua sobre $\langle -\infty, \infty\rangle$ y que g es diferenciable sobre $\langle -\infty, \infty\rangle$.

a) Demuéstrese que

$$D_t\left[\int_c^{g(t)} f\right] = g'(t)\, f(g(t)) = [(f \circ g)g'](t), \qquad t \in \langle -\infty, \infty\rangle.$$

b) Con la hipótesis adicional de que g' es continua sobre $\langle -\infty, \infty\rangle$, demuéstrese que

$$\int_a^t (f \circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(t)} f, \qquad t \in \langle -\infty, \infty\rangle.$$

4. Evalúense

a) $\int_0^1 2I(1+I^2)^{1/2}$ *b*) $\int_0^\pi 2t \cos t^2 \operatorname{sen} t^2\, dt$

c) $\int_{-1}^3 I^2(1+I^3)^{10}$.

5. Demuéstrese que

$$\int_0^t \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int_1^{1+t^2} \frac{du}{u}.$$

6. Si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, demuéstrese que para toda $t\in\mathfrak{J}$

a) $\displaystyle\int_{-t}^{0} f(x)\,dx = \int_0^t f(-x)\,dx.$

Sugerencia. Demuéstrese que $\displaystyle\int_0^t f(-x)\,dx = -\int_0^{-t} f.$

b) $\displaystyle\int_{-t}^{t} f(x)\,dx = \int_0^t [f(x)+f(-x)]\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-t}^{t} f = 0$ si f es una función impar.

d) $\displaystyle\int_{-t}^{t} f = 2\int_0^t f$ si f es una función par.

7. Evalúense

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} I^2 \operatorname{sen}^3$ *b*) $\displaystyle\int_{-c}^{c} \theta^3 \cos^3\theta\,d\theta$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} I^3$ *d*) $\displaystyle\int_{-1}^{1} I^{-3}.$

8. Supongamos que f es una función continua impar (par) sobre $[-a, a]$. Para cada $x\in[-a, a]$ defínase

$$g(x) = \int_0^x f.$$

Demuéstrese que g es una función par (impar).

9. Evalúese

$$\int_a^b |x|\,dx.$$

10. Si $i(t)$ es la corriente que fluye a través de una resistencia R en el tiempo t, la potencia $P(t)$ disipada en la resistencia en el tiempo t es

$$P(t) = Ri^2(t).$$

Si i es una corriente alterna con frecuencia angular ω y amplitud a [es decir, $i(t) = a\cos(\omega t-\varphi)$], muéstrese que la potencia promedia perdida $\bar{P}$

en un periodo de la corriente es

$$\bar{P} = \tfrac{1}{2}Ra^2.$$

11. Pruébese para cada una de las siguientes integrales impropias que diverge, o, si no es este el caso, evalúese.

$a)$ $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ $b)$ $\displaystyle\int_{0}^{10} \frac{dx}{(4-x)^{2/3}}$

$c)$ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} I^{-3}$ $d)$ $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \operatorname{sen}$

$e)$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $f)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I^2}{(8+I^3)^2}.$

****12.** Pruébese el teorema 5.3 bajo la hipótesis de que f es integrable sobre $[a, b]$.

Capítulo

$\int_0^{\pi}$ sen 13

Aplicaciones de la integral definida

1. INTRODUCCIÓN

Tanto los conceptos físicos como las leyes físicas han surgido de la observación de sistemas físicos sencillos y la consideración de sistemas físicos idealizados. Los conceptos físicos se definen para los sistemas físicos idealizados y las leyes físicas que correlacionan estos conceptos son el resultado de experimentos realizados sobre los sistemas sencillos. La extensión de estas leyes a sistemas más complejos requiere usualmente una generalización de los conceptos físicos al igual que de los enunciados de las leyes físicas. La integral es uno de los muchos conceptos matemáticos que ayudan al físico a ascender de lo particular a lo general (inducción).

2. ÁREA

En el capítulo 12 comenzamos nuestra discusión del área con tres hipótesis básicas (2.2-2.4, pág. 527) que eran propiedades que esperábamos del área y luego vimos que estas propiedades determinan la definición del área de una región sobre el eje X y bajo la gráfica de una función integrable. En esta sección extendemos el concepto de área a regiones que se encuentran sobre la gráfica de una función integrable y bajo la gráfica de otra.

Antes de discutir el área revisemos la notación para sumas superiores e inferiores. Supongamos que f y g están definidas y son acotadas sobre $[a, b]$. Sea $P = \{x_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ una partición de $[a, b]$.

Entonces

$$m_i(f) = \text{ínf } \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$m_i(g) = \text{ínf } \{g(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

$M_i(f)$ y $M_i(g)$ denotan los correspondientes supremos.

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

$$L(g, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(g)(x_i - x_{i-1}),$$

y $U(f, P)$ y $U(g, P)$ denotan las correspondientes sumas superiores.

Si f y g son integrables sobre $[a, b]$, entonces sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ hay particiones P_1 y P_2 de $[a, b]$ tales que

$$-\varepsilon < L(f, P_1) - \int_a^b f \leqslant U(f, P_1) - \int_a^b f < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < L(g, P_2) - \int_a^b g \leqslant U(g, P_2) - \int_a^b g < \varepsilon.$$

Sea $P = P_1 \cup P_2$. Como P es un refinamiento tanto de P_1 como P_2, tenemos

2.1

$$-\varepsilon < L(f, P) - \int_a^b f \leqslant U(f, P) - \int_a^b f < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < L(g, P) - \int_a^b g \leqslant U(g, P) - \int_a^b g < \varepsilon.$$

Así hemos demostrado que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P tal que se satisface 2.1.

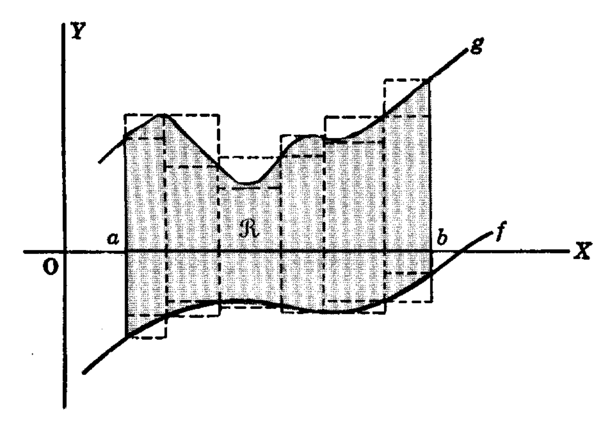


FIGURA 1

Consideremos ahora un par de funciones f y g que son integrables sobre $[a, b]$ y tales que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. La gráfica de f está bajo la gráfica de g sobre $[a, b]$. Sea

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}.$$

El conjunto $\mathcal{R}$ es la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (figura 1). Deseamos extender la definición de área a tales regiones. Sea P una partición de $[a, b]$. Sean (figura 2)

$$\mathcal{R}_i = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$$
$$\overline{\mathcal{R}}_i = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, m_i(f) \leqslant y \leqslant M_i(g)\}$$
$$\underline{\mathcal{R}}_i = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, M_i(f) \leqslant y \leqslant m_i(g)\}.$$

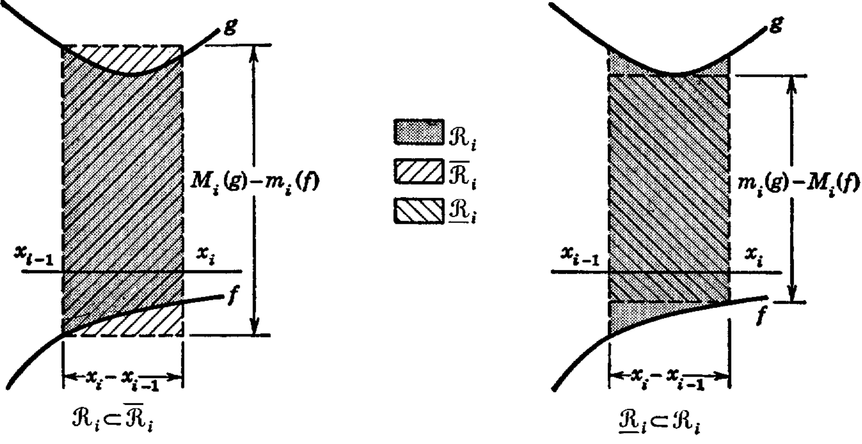


FIGURA 2

Claramente

$$\underline{\mathcal{R}}_i \subset \mathcal{R}_i \subset \overline{\mathcal{R}}_i,$$

y si área ($\mathcal{R}$) y área ($\mathcal{R}_i$) han de satisfacer nuestras hipótesis básicas sobre las áreas, entonces

$$\text{área}\,(\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{n} \text{área}\,(\mathcal{R}_i)$$

y

$$\text{área}\,(\underline{\mathcal{R}}_i) \leqslant \text{área}\,(\mathcal{R}_i) \leqslant \text{área}\,(\overline{\mathcal{R}}_i).$$

Si $M_i(f) > m_i(g)$ —y esto puede suceder— $\underline{\mathcal{R}}_i$ es un conjunto nulo y área $(\underline{\mathcal{R}}_i) = 0$. En otro caso, área $(\underline{\mathcal{R}}_i) = (m_i(g) - M_i(f))\,(x_i - x_{i-1})$. De donde

$$[m_i(g) - M_i(f)]\,(x_i - x_{i-1}) \leqslant \text{área}\,(\underline{\mathcal{R}}_i) \leqslant \text{área}\,(\mathcal{R}_i)$$
$$\leqslant \text{área}\,(\overline{\mathcal{R}}_i) = [M_i(g) - m_i(f)]\,(x_i - x_{i-1}).$$

Sumando sobre todos los intervalos de P, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} [m_i(g) - M_i(f)](x_i - x_{i-1}) \leqslant \text{área}\,(\mathcal{R}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} [M_i(g) - m_i(f)](x_i - x_{i-1});$$

es decir,

$$L(g, P) - U(f, P) \leqslant \text{área}\,(\mathcal{R}) \leqslant U(g, P) - L(f, P).$$

Restando $\int_a^b (g - f) = \int_a^b g - \int_a^b f$, obtenemos

$$\left[L(g, P) - \int_a^b g\right] - \left[U(f, P) - \int_a^b f\right] \leqslant \text{área}\,(\mathcal{R}) - \int_a^b (g - f)$$
$$\leqslant \left[U(g, P) - \int_a^b g\right] - \left[L(f, P) - \int_a^b f\right].$$

La anterior desigualdad se verifica para toda partición P de $[a, b]$. Se sigue entonces de 2.1 que, para cada $\varepsilon > 0$,

$$-2\varepsilon < \text{área}\,(\mathcal{R}) - \int_a^b (g - f) < 2\varepsilon.$$

Por tanto

2.2
$$\text{área}\,(\mathcal{R}) = \int_a^b (g - f).$$

La aditividad del área (2.3 del capítulo 12, pág. 527) implica una definición del área para cualquier región que pueda ser partida en un

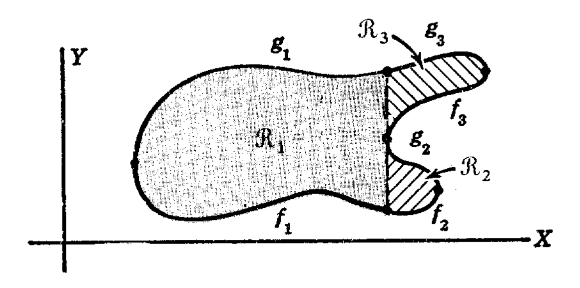


FIGURA 3

número finito de regiones del tipo de las que aquí se consideran. Por ejemplo, en figura 3 el área de las regiones $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, y $\mathcal{R}_3$ puede calcularse mediante 2.2, y el área total es la suma de las áreas de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, y $\mathcal{R}_3$.

2.3 Ejemplo. Determínese el área acotada por la ecuación cúbica $y = x^3$ y la parábola $y = 2x - x^2$.

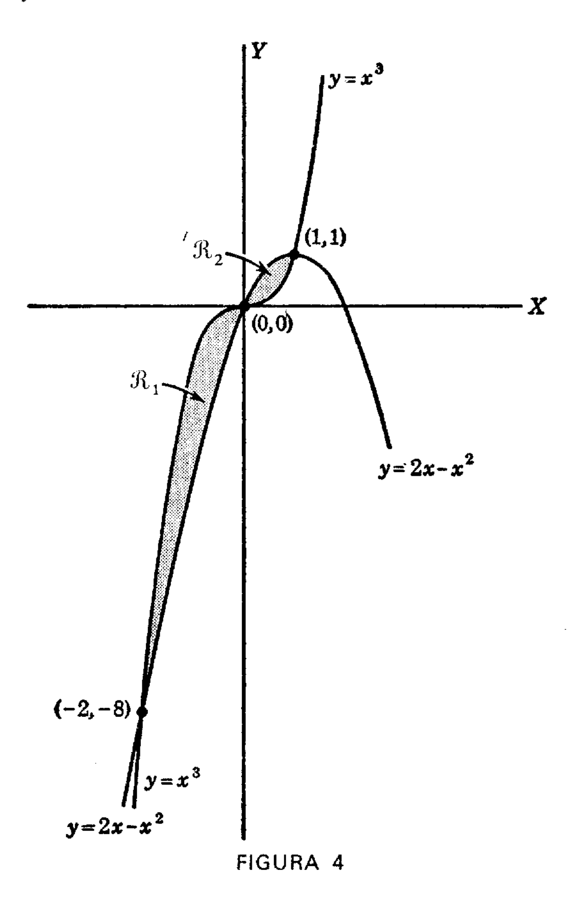


FIGURA 4

SOLUCIÓN. (Figura 4.) Las ecuaciones de las curvas son

$$y = x^3$$
$$y = x(2-x).$$

Las curvas se intersectan si y sólo si

$$x^3 = x(2-x),$$

lo que es equivalente a

$$x(x^2+x-2) = x(x+2)(x-1) = 0.$$

Los puntos de intersección son $(-2, -8)$, $(0, 0)$, y $(1, 1)$. Entre $(-2, -8)$ y $(0, 0)$ la ecuación cúbica está sobre la parábola, y entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$ la parábola está sobre la cúbica (véase el problema 1). Sean $\mathfrak{R}_1$ y $\mathfrak{R}_2$ las regiones indicadas en la figura 4.

$$\text{área}(\mathfrak{R}_1) = \int_{-2}^{0} [I^3-(2I-I^2)]$$
$$= \int_{-2}^{0} [x^3-(2x-x^2)]\,dx = \frac{x^4}{4} - x^2 + \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{0} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{área }(\mathfrak{R}_2) = \int_{0}^{1} [(2I-I^2)-I^3]$$
$$= \int_{0}^{1} [(2x-x^2)-x^3]\,dx = x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_{0}^{1} = \frac{5}{12}.$$

El área total acotada por las curvas es

$$\text{área }(\mathfrak{R}_1) + \text{área }(\mathfrak{R}_2) = \tfrac{37}{12}.$$

A menudo sucederá que deseemos determinar el área de una región $\mathfrak{R}$ acotadas por curvas cuyas ecuaciones se expresan más convenientemente por $x = f(y)$ y $x = g(y)$ y las rectas $y = a$ y $y = b$ (figura 5).

$$\mathfrak{R} = \{(x, y)\,|\,a \leqslant y \leqslant b, f(y) \leqslant x \leqslant g(y)\}.$$

La gráfica de $x = f(y)$ es $\{(f(y), y)\}$, y se llamará *gráfica de f desde el eje Y*; $f(y)$ es la distancia al eje Y de un punto de la gráfica. Si $f(y) \leqslant g(y)$ para toda $y \in [a, b]$, tenemos, como antes, que

$$\text{área }(\mathfrak{R}) = \int_a^b [g(y)-f(y)]\,dy = \int_a^b (g-f).$$

Aquí integramos las longitudes de cortes seccionales horizontales. Se ilustra esto en la segunda solución del próximo ejemplo.

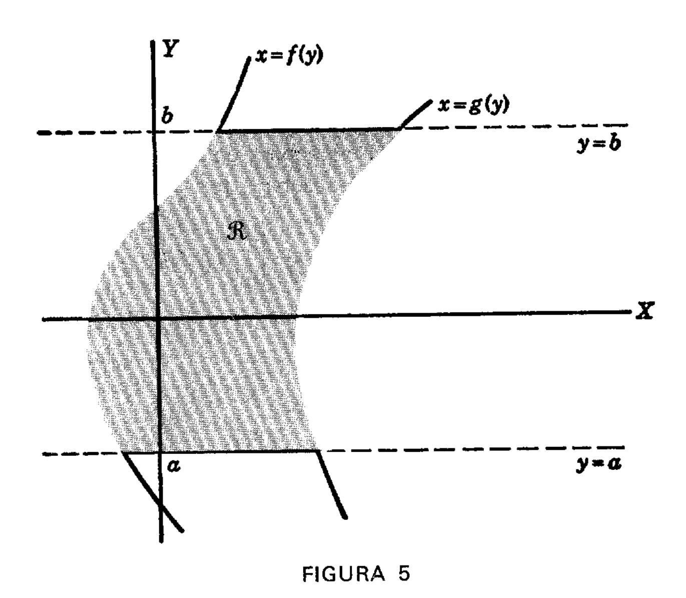


FIGURA 5

2.4 Ejemplo. Determínese el área de la región limitada por la parábola $y^2-4x=0$ y la recta $y-2x=-4$.

SOLUCIÓN. (Figura 6.) Localizamos primero los puntos de intersección de las dos curvas. Resolviendo la ecuación de la recta para $2x$ y luego sustituyendo en la ecuación de la parábola, tenemos

$$2x = y+4$$
$$y^2-4x = y^2-2(y+4) = 0$$
$$y^2-2y-8 = (y-4)(y+2) = 0.$$

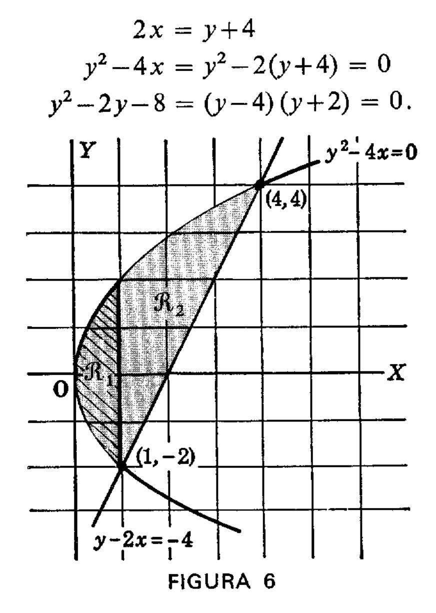


FIGURA 6

De donde $y = 4$, o $y = -2$, y los puntos de intersección son $(4, 4)$ y $(1, -2)$. Partamos la región $\mathcal{R}$ en las dos regiones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ demostradas en la figura 6. $\mathcal{R}_1$ se encuentra entre $x = 0$ y $x = 1$ y está acotada por arriba por $y = 2\sqrt{x}$ y por debajo por $y = -2\sqrt{x}$. $\mathcal{R}_2$ se encuentra entre $x = 1$ y $x = 4$ y está acotada por arriba por $y = 2\sqrt{x}$ y por debajo por $y = 2x-4$. De donde

$$\text{área } (\mathcal{R}_1) = \int_0^1 [2\sqrt{x}-(-2\sqrt{x})]\,dx = \int_0^1 4\sqrt{x}\,dx = \tfrac{8}{3}x^{3/2}\Big]_0^1 = \tfrac{8}{3}.$$

$$\text{área } (\mathcal{R}_2) = \int_1^4 [2\sqrt{x}-(2x-4)]\,dx$$

$$= 2\int_1^4 \sqrt{x}\,dx - 2\int_1^4 x\,dx + \int_1^4 4\,dx$$

$$= \tfrac{4}{3}(8-1)-(4^2-1)+12 = \tfrac{28}{3} - 3.$$

Por tanto

$$\text{área } (\mathcal{R}) = \text{área } (\mathcal{R}_1) + \text{área } (\mathcal{R}_2) = \tfrac{8}{3}+\tfrac{28}{3}-3 = 9.$$

Solución 2. (Figura 6.) Intercambiamos aquí los papeles de los ejes X y Y. Vista desde el eje Y, la región $\mathcal{R}$ se encuentra entre las rectas $y = -2$ y $y = 4$ y está acotada por debajo por $x = \frac{1}{4}y^2$ y por arriba por la recta $x = \frac{1}{2}(y+4)$. Así pues, la región vista desde el eje Y está acotada por abajo por la gráfica de $\frac{1}{4}I^2$ y por arriba por la gráfica de $\frac{1}{2}(I+4)$. De donde

$$\text{área } (\mathcal{R}) = \int_{-2}^{4} [\tfrac{1}{2}(y+4)-\tfrac{1}{4}y^2]\,dy = \int_{-2}^{4} [\tfrac{1}{2}(I+4)-\tfrac{1}{4}I^2]$$

$$= \tfrac{1}{4}(I+4)^2-\tfrac{1}{12}I^3\Big]_{-2}^{4} = (\tfrac{64}{4} - \tfrac{64}{12}) - (1 + \tfrac{8}{12}) = 9.$$

Problemas

1. Supongamos que

1) f y g son continuas sobre $[a, b]$;

2) $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, y $f(x) \neq g(x)$ sobre $\langle a, b\rangle$.

Demuéstrese que, si para algún $c \in \langle a, b\rangle$, $f(c) < g(c)$, entonces $f(x) < g(x)$ para todo $x \in \langle a, b\rangle$.

Sugerencia. Considérese la función $h = g-f$, y úsese el teorema del valor intermedio.

Determínese el área de cada una de las regiones limitadas por las curvas abajo dadas. Delinéense cada una de las regiones.

2. La parábola $x^2-y = 4$ y el eje X.

3. La parábola $y^2-2y+x = 0$ y el eje Y.

4. La parábola $y^2 = x$, la recta tangente a la parábola en $(1, 1)$, y el eje Y.

5. $x^2 = y+1$ y $x^2 = 1-y$.

6. $x = y^2-4$ y $x = 2y-1$.

7. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$, y $x = \pi/4$.

8. $x = -1$, $x = 2$, $y = x^2+1$, y $y = -x^2+9$.

9. $y = x^2$ y $y = x$.

10. $y = 4/x^2$ y $y = x^2-5$.

11. $y = x^3$ y $y = x^{1/3}$.

12. $y = \operatorname{sen} x$ y $y = x$.

13. $y = x^2$ y $3y = 4x$.

14. $y = 2x^2-4x+7$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

15. $y^2 = 16x$ y $y^2 = x^3$.

16. $y^2 = 4x+8$ y la recta que une (2, 4) y (4, 8).

17. $x = y^3-4y$, $x = 4-y^2$, y el eje X.

18. Determínese la recta que pasa por el origen y bisecta el área limitada por $y = 6x-x^2$ y el eje X.

3. COORDENADAS POLARES Y ÁREA

Más adelante, en este capítulo (problema 8*b*, sección 7, pág. 620), demostraremos que

(3.1) *El área de un sector circular de ángulo central* α (radianes) *y radio* r *es* $\frac{1}{2}r^2\alpha$.

Sea $\mathcal{C}$ la curva cuya ecuación en coordenadas polares está dada por $r = F(\theta)$, donde $F(\theta)$ es una función continua no negativa para $\theta\in[\alpha, \beta]$ $(0 \leqslant \beta-\alpha \leqslant 2\pi)$. Sea $\mathcal{R}$ el conjunto de todos los puntos en el plano cuyas coordenadas polares (r, θ) satisfacen $\theta\in\alpha, \beta$ y $r\in[0, F(\theta)]$ (figura 7). Sea $P = \{\theta_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ una partición de $[\alpha, \beta]$ y definamos

$$m_i(F) = \inf \{F(\theta) \mid \theta\in[\theta_{i-1}, \theta_i]\}$$
$$M_i(F) = \sup \{F(\theta) \mid \theta\in[\theta_{i-1}, \theta_i]\}.$$

El sector circular desde θ_{i-1} a θ_i de radio $m_i(F)$ se encuentra entonces contenido en $\mathcal{R}$ y el sector de radio $M_i(F)$ se extiende posiblemente fuera

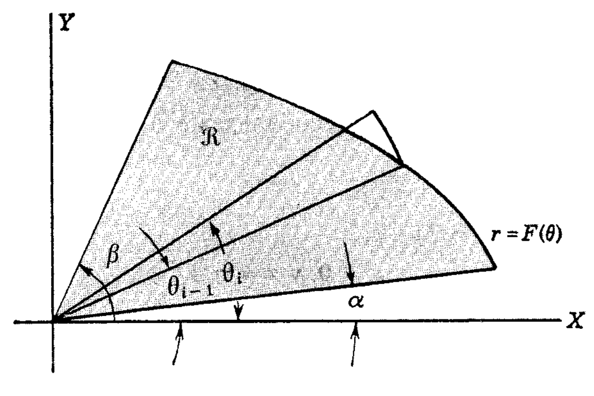


FIGURA 7

de ℜ. Exactamente lo mismo que con los rectángulos se sigue de 2.2-2.4 del capítulo 12 y 3.1 de esta sección que

$$\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2\,(F)\,(\theta_i-\theta_{i-1}) \leqslant \text{área}\,(\mathfrak{R}) \leqslant \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2\,(F)\,(\theta_i-\theta_{i-1}).$$

Ahora bien, como $F(\theta) \geqslant 0$ para $\theta \in [\alpha, \beta]$ (problema 6, pág. 435),

$$m_i^2(F) = \text{ínf}\,\{F^2(\theta)\,|\,\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\} = m_i(F^2),$$
$$M_i^2(F) = \sup\,\{F^2(\theta)\,|\,\theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i]\} = M_i(F^2),$$

y

$$\tfrac{1}{2}L(F^2, P) \leqslant \text{área}\,(\mathfrak{R}) \leqslant \tfrac{1}{2}U(F^2, P).$$

De donde, como F^2 es continua y, por lo tanto, integrable,

3.2 $$\text{área}\,(\mathfrak{R}) = \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} F^2.$$

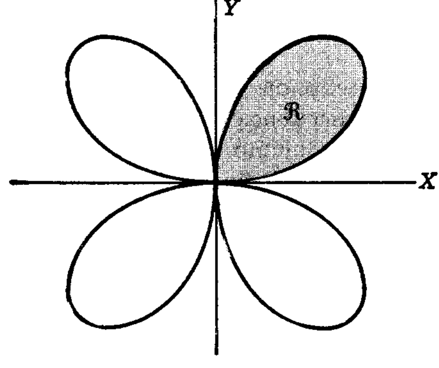


FIGURA 8

3.3 Ejemplo. Encuéntrese el área de uno de los lazos de la gráfica polar de $r = |4 \operatorname{sen} 2\theta|$.

SOLUCIÓN. (Figura 8.) Un lazo de la curva corresponde a $\theta \in [0, \pi/2]$. De donde

$$\begin{aligned} \text{área}\,(\mathcal{R}) &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 16 \operatorname{sen}^2 2\theta\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} d\theta - 4\int_0^{\pi/2} \cos 4\theta\, d\theta = 4\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi. \end{aligned}$$

Problemas

Determínese el área de la región acotada por

1. La circunferencia $r = a$.

2. La circunferencia $r = 2a \cos \theta$.

3. $r = |2a \cos \theta|$.

4. La cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$.

5. La curva de la rosa $r = a \operatorname{sen} 2\theta$.

6. La lemniscata $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

7. La limazón $r = b + a \cos \theta\ (b > a > 0)$.

8. La curva de la rosa $r = a \operatorname{sen} 3\theta$.

9. La limazón $r = b + a \cos \theta\ (a > b > 0)$ contiene lazos, uno dentro del otro. Determínese el área de cada lazo.

10. $\mathcal{R}$ es la región limitada por la gráfica polar de $r = F(\theta)$, $r = G(\theta)$ $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, donde $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant F(\theta) \leqslant G(\theta)$ para $\theta \in [\alpha, \beta]$. Demuéstrese que

$$\text{área}\,(\mathcal{R}) = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta (G^2 - F^2).$$

Determínese el área de la intersección de las regiones limitadas por las curvas.

11. $r = 2a \cos \theta$ y $r = 2a \operatorname{sen} \theta$.

12. $r = a$ y $r = a(1 + \operatorname{sen} \theta)$.

13. $r = a \operatorname{sen} \theta$ y $r = a(1 + \cos \theta)$.

14. Determínese el área barrida por el radio vector de la espiral $r = a\theta$

desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. ¿A cuánto asciende el área adicional que se barre en la siguiente revolución completa?

15. Derívese una fórmula para el área del segmento circular. (El segmento circular es la región acotada por un arco de circunferencia y la cuerda que une los extremos del arco.)

4. TRABAJO

En física, la definición de trabajo comienza con el enunciado: "Cuando una fuerza mueve un objeto en una distancia d y el componente de la fuerza en la dirección del movimiento es una constante F_0 durante todo el movimiento, la cantidad de trabajo hecha es $W = F_0 d$." La cantidad W es una medida de la cantidad de energía requerida para llevar al cabo un proceso. El paso siguiente en la definición del trabajo es extender esta definición a fuerzas que no son necesariamente constantes durante el movimiento.

Supongamos ahora que un objeto se mueve a lo largo de una recta. Sea x la distancia dirigida de un punto sobre la recta a algún punto fijo. En el punto correspondiente a la distancia x sea $F(x)$ el componente de la fuerza en la dirección de las x crecientes. Sea $W_a^b(F)$ la cantidad de trabajo hecho por F al mover un objeto desde $x = a$ hasta $x = b$. La definición de trabajo para una fuerza constante nos dice que

4.1 $\qquad W_a^b(F_0) = F_0(b-a)$, donde F_0 es una constante.

Parece entonces razonable exigir de la definición de trabajo que tenga las siguientes propiedades:

4.2 $\qquad F(x) \leqslant G(x)$ para todo $x \in [a, b]$ implica $W_a^b(F) \leqslant W_a^b(G)$;

las fuerzas mayores efectúan un trabajo mayor.

4.3 $$W_a^c(F) + W_c^b(F) = W_a^b(F);$$

el trabajo hecho al moverse desde $x = a$ a $x = c$ y luego, desde $x = c$ a $x = b$ es el mismo que el trabajo hecho al moverse desde $x = a$ a $x = b$.

Estos requerimientos 4.1-4.3 son completamente análogos a los exigidos para el área en la sección 4 del capítulo 12, y los argumentos de allí pueden ser aquí repetidos. Las propiedades 4.1 y 4.2 implican que

$$m_i(F)(x_i - x_{i-1}) \leqslant W_{x_{i-1}}^{x_i}(F) \leqslant M_i(F)(x_i - x_{i-1})$$

para toda partición P de $[a, b]$ y todo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P. Sumando sobre todos los subintervalos de P y usando 4.3, obtenemos

$$L(F, P) \leqslant W_a^b(F) \leqslant U(F, P),$$

y por tanto

$$\underline{\int_a^b} F \leqslant W_a^b(F) \leqslant \overline{\int_a^b} F.$$

De donde, si los físicos aceptan 4.1-4.3 como exigencias razonables para una medida W del trabajo, entonces, para funciones integrables, F tienen sólo una elección para su definición; a saber,

4.4 $$W_a^b(F) = \int_a^b F = \int_a^b F(x)\,dx.$$

En el capítulo anterior definimos, cuando $a > b$,

$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

En términos de trabajo esto significa que $W_a^b(F) = -W_b^a(F) = W_b^a(-F)$ Esto equivale físicamente a afirmar que la única diferencia entre moverse de $x = a$ a $x = b$ y moverse de $x = b$ a $x = a$ es que el componente de la fuerza en la dirección del movimiento cambia de signo. Esto es también, según sabemos, una consecuencia de 4.3 si 4.3 ha de verificarse para a, b, y c cualesquiera.

Es útil discutir la definición de trabajo desde un punto de vista ligeramente diferente y menos preciso. La discusión es menos precisa porque las hipótesis que se hacen no se enuncian con toda claridad. La discusión es, sin embargo, interesante y es una muestra del tipo de razonamiento heurístico que se usa al discutir muchos conceptos físicos. La notación usada es la misma que antes. Consideremos la cantidad de trabajo $W_{x_{i-1}}^{x_i}(F)$ hecha por la fuerza al mover la partícula desde $x = x_{i-1}$ hasta $x = x_i$. Si la norma de la partición se hace pequeña, entonces, si suponemos que F es continua, la fuerza cambia muy poco en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y es casi constante sobre el subintervalo.

Sea $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$; $\Delta_i x$ es la distancia que se mueve el objeto sobre el i-ésimo subintervalo de la partición P. Como la fuerza es casi una constante, podemos aproximar la fuerza sobre el subintervalo por cualquier valor $F(\bar{x}_i)$, $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, de la fuerza sobre el subintervalo y podemos aproximar el trabajo hecho por la fuerza al mover el objeto por el subintervalo por

$$\Delta_i W = F(\bar{x}_i)\Delta_i x.$$

Obtenemos una aproximación al trabajo total hecho por

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i W = \sum_{i=1}^{n} F(\bar{x}_i)\Delta_i x.$$

A medida que la norma de la partición se va haciendo más pequeña,

estamos, desde luego, sumando más términos, pero esperamos obtener una mejor aproximación de $W_a^b(F)$. Si estas sumas aproximativas se acercan a un número definido a medida que la norma de la partición tiende a cero, entonces definimos este límite como el trabajo hecho por la fuerza; es decir,

$$W_a^b(F) = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\bar{x}_i)\Delta_i x .$$

Si F es continua sobre $[a, b]$, entonces, según el teorema 5.3 del capítulo 12 (pág. 546) este límite existe y

$$W_a^b(F) = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\bar{x}_i)\Delta_i x = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b F .$$

4.5 Ejemplo. Se dice que un muelle es *elástico* si la fuerza restauradora es proporcional a la distancia que el muelle se ha extendido desde su posición de equilibrio (Ley de Hooke). Denotemos por x la distancia a la posición de equilibrio (figura 9). En este punto la fuerza que actúa para extender el muelle es $F(x) = kx$. ¿Cuál es el trabajo hecho para extender el muelle desde su posición de equilibrio una distancia d?

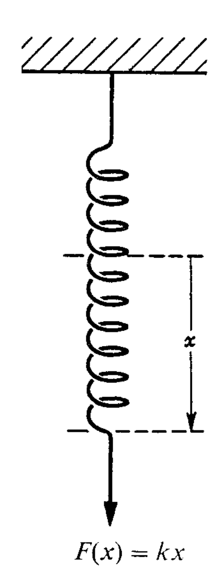


FIGURA 9

SOLUCIÓN

$$W_0^d(F) = \int_0^d kx\,dx = \tfrac{1}{2}kd^2 .$$

4.6 Ejemplo. El trabajo requerido para cargar un condensador es, en electricidad, el problema análogo al mecánico del ejemplo 4.5. El voltaje $V(q)$ requerido para colocar una carga q sobre las placas de un condensador es proporcional a la carga

$$V(q) = \frac{1}{C} q .$$

$V(q)$ es la diferencia de potencial entre las placas y es el equivalente eléctrico de la fuerza $F(x)$. La constante C se llama "capacitancia" del condensador. Determínese el trabajo hecho al colocar una carga Q sobre el condensador.

SOLUCIÓN. El trabajo hecho al cargar el condensador desde $q = q_0$ hasta $q = q_1$ es

$$W_{q_0}^{q_1}(V) = \int_{q_0}^{q_1} V = \int_{q_0}^{q_1} V(q)\,dq .$$

De donde, para colocar una carga Q sobre un condensador descargado,

$$W_0^Q(V) = \int_0^Q V(q)\,dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

Se dice entonces que la energía almacenada en el condensador con carga Q sobre sus placas es

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2(Q) = \frac{1}{2}QV(Q).$$

Problemas

1. Se observa que una fuerza de 10 libras extiende un muelle elástico 0.87 pulgadas. ¿Cuánto trabajo se requiere para extender el muelle un pie?

2. Una cadena flexible uniforme tiene un peso total de 100 libras. El trabajo hecho al levantar un extremo de la cadena 50 pies del suelo es de 300 pies-libras. ¿Qué largo tiene la cadena?

3. La fuerza gravitacional sobre una masa m_1 a una distancia r de una masa m_2 es una atracción que actúa a lo largo de la recta que las une. La magnitud de la fuerza es

$$F = k\cdot\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde k es la constante de gravitación. Si para $r = 6.4\times 10^6$ metros $F = 15$ kilogramos, ¿cuánto trabajo en kilogramos-metros se requiere para mover m_1

a) de $r = 6.4\times 10^6$ metros (el radio de la tierra) a $r = 7.4\times 10^6$?
b) 100 metros cuando inicialmente $r = 6.4\times 10^6$ metros?
c) de $r = 6.4\times 10^6$ metros a $r = 3.9\times 10^8$ metros?
d) en cuál de los anteriores puede considerarse constante el campo gravitacional?

4. La magnitud de la fuerza de repulsión entre cargas Q_1 y Q_2 es

$$F = k\,\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

donde r es la distancia entre ambas. ¿Cuál es el trabajo requerido para mover las cargas desde 10 cm hasta 10^{-6} cm aparte?

5. A lo largo del eje de un dipolo eléctrico de intensidad p la fuerza sobre una carga q es en la dirección del eje y su magnitud es

$$F = k\,\frac{qp}{x^3}$$

donde x es la distancia de q al dipolo. ¿Qué trabajo se requiere para mover la carga q a lo largo del eje desde $x = a$ a $x = b$?

6. Si la temperatura de un gas no cambia, entonces su presión y volumen están correlacionados por $PV =$ constante. Un cilindro de 120 pulgadas cúbicas con un pistón con cabeza de 12 pulgadas cuadradas contiene un gas a 15 libras/pulgada cuadrada de presión (aproximadamente la presión atmosférica). Demuéstrese que el trabajo hecho al comprimir el gas a temperatura constante hasta 12 pulgadas cúbicas es $W = 1\,800 \int_1^{10} \frac{dx}{x} - 1\,620$ pulgadas-libras. Supóngase que la presión sobre la parte posterior de la caza del cilindro es aproximadamente la presión atmosférica.

5. ECUACIONES DIFERENCIALES

La ecuación diferencial más sencilla es

5.1 $$y' = f.$$

Se da la función f y deseamos determinar todas las funciones y con derivada f. La ecuación diferencial 5.1 se escribe a menudo en las siguientes formas:

$$Dy = f$$

$$y'(x) = f(x)$$

$$D_x y(x) = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$dy = f(x)\,dx.$$

Una función F se dice que es una *solución* de la ecuación diferencial 5.1 si $F' = f$. Una función F se dice que es una *solución sobre un intervalo* $\mathfrak{J}$ de la ecuación diferencial 5.1 si $F' = f$ sobre $\mathfrak{J}$.

5.2 Ejemplo. Encuéntrese una solución de la ecuación diferencial

$$y' = 3I + 5$$

que satisfaga $y(0) = 8$.

SOLUCIÓN. Sabemos que

$$D(\tfrac{3}{2}I^2 + 5I) = 3I + 5.$$

Por tanto, para cualquier constante c,

$$F = \frac{3}{2}I^2+5I+c$$

es una solución de la ecuación diferencial. Escojamos c, entonces, de modo que se satisfaga la condición inicial $F(0) = 8$.

$$F(0) = c = 8.$$

De donde

$$F = \frac{3}{2}I^2+5I+8$$

es una solución que satisface $y(0) = 8$.

Este sencillo ejemplo hace surgir dos cuestiones: 1) ¿Hay soluciones de la ecuación diferencial distintas que las de la forma $\frac{3}{2}I^2+5I+c^2$? 2) ¿Es la solución particular $\frac{3}{2}I^2+5I+8$ la única solución que satisface la condición inicial $y(0) = 8$? Si la contestación a la primera pregunta es no, entonces vemos que la contestación a la segunda ha de ser sí. El siguiente teorema da una contestación general a la primera pregunta. Este teorema es una reformulación del corolario 4.2 del capítulo 10, página 458.

5.3 Teorema. *Si F es una solución de*

$$y' = f$$

sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces $F+c$ es una solución sobre $\mathfrak{J}$ para cada constante c y toda solución sobre $\mathfrak{J}$ es de esta forma.

PRUEBA. Es claro que $F' = f$ sobre $\mathfrak{J}$ implica $D(F+c) = f$ sobre $\mathfrak{J}$. Sea G cualquier otra solución sobre $\mathfrak{J}$. Entonces $G' = F'$ sobre $\mathfrak{J}$ y por tanto $G = F+c$ sobre $\mathfrak{J}$. Y esto completa la prueba.

Así pues, para esta sencilla ecuación diferencial, si sabemos una solución sabemos todas la soluciones sobre $\mathfrak{J}$. El mismo teorema contiene la hipótesis de que una solución existe. ¿Tienen todas las ecuaciones de tal tipo soluciones? Si f es continua sobre $\mathfrak{J}$, el primer teorema fundamental del cálculo implica la existencia de una solución y el segundo teorema fundamental del cálculo implica una propiedad de unicidad. La propiedad de unicidad es también una consecuencia del teorema 5.3.

5.4 Teorema. *Si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, $x_0 \in \mathfrak{J}$, y si y_0 es un número cualquiera, entonces hay una solución y sólo una solución sobre $\mathfrak{J}$ de la ecuación diferencial*

$$y' = f$$

que satisface $y(x_0) = y_0$. La solución es

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f.$$

PRUEBA. Supongamos que $y' = f$ y $y(x_0) = y_0$. Entonces, de acuerdo con el segundo teorema fundamental

$$\int_{x_0}^{x} y' = y(x)-y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f \qquad (x \in \mathfrak{J})$$

y

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f = y_0 + \int_{x_0}^{x} f.$$

Recíprocamente, si

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f,$$

entonces $y(x_0) = y_0$ y, por el primer teorema fundamental $y' = f$ sobre $\mathfrak{J}$.

5.5 Ejemplo. Una partícula comienza a moverse en el instante $t = 0$, se mueve a lo largo de una recta, y en el instante t tiene una velocidad $v(t)$. ¿A qué distancia está la partícula de su posición inicial en el instante t_0?

SOLUCIÓN. Suponemos que la velocidad es continua y que v está definida sobre $[0, \infty\rangle$. Sea $r(t)$ la distancia dirigida de la partícula en el instante t a su punto inicial. Entonces $r(0) = 0$ y $r' = v$. Por tanto, según el segundo teorema fundamental

$$\int_{0}^{t_0} r' = r(t_0)-r(0) = \int_{0}^{t_0} v.$$

De donde

$$r(t_0) = r(0) + \int_{0}^{t_0} v = \int_{0}^{t_0} v \qquad (\text{sobre } [0, \infty\rangle).$$

5.6 Ejemplo. Una barra de longitud l tiene una densidad lineal $\rho(x)$ a una distancia x de un extremo de la barra. Demuéstrese que la masa de la barra es

$$M = \int_{0}^{l} \rho(x)\,dx = \int_{0}^{l} \rho.$$

SOLUCIÓN. Debemos primero comprender qué es lo que se entiende por densidad lineal. Sea $m(x)$ la masa de una longitud x de la barra, donde x se ha medido desde uno de los extremos de la barra. La densidad lineal promedio de una sección de la barra desde x_0 a x_0+h es

$$\frac{m(x_0+h)-m(x_0)}{h}.$$

La densidad lineal en x_0 es el límite de la densidad promedio antes definida cuando h tiende a cero; es decir,

$$\rho(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{m(x_0+h)-m(x_0)}{h} = m'(x_0).$$

De donde

$$m' = \rho.$$

Por tanto

$$\int_0^x m' = m(x)-m(0) = m(x) = \int_0^x \rho,$$

y

$$M = m(l) = \int_0^l \rho.$$

(Las dimensiones de la densidad lineal son masa/longitud. Las unidades son libras/pie, gramos/centímetro, etc., según cuales sean las unidades usadas para la masa y la longitud.)

Problemas

1. Encuéntrese la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales que satisface las siguientes condiciones iniciales:

a) $s'(t) = -at+v_0$, $s(0) = s_0$ *b*) $y'(t) = \text{sen } 3t$, $y(0) = 0$
c) $y'(t) = \text{sen } 3(t-\pi/6)$, $y(\pi/6) = 0$ *d*) $y'(x) = x \cos x$, $y(0) = 1$.

2. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con una velocidad que es inversamente proporcional al cuadrado del tiempo. Si en el tiempo $t = 15$ (segundos) la velocidad de la partícula es 2 000 pies/segundo, ¿qué distancia recorre la partícula en el intervalo de tiempo [5, 30]?

3. Una barra de 4 pies de longitud tiene una densidad lineal que es proporcional a la distancia a uno de los extremos elevada a $\frac{2}{3}$. En el centro de la barra, la densidad es de 0.050 libras por pulgada. ¿Cuál es la masa de la barra?

4. Demuéstrese que: si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, $t_0 \in \mathfrak{J}$, y s_0 y v_0 son números, entonces la ecuación diferencial $s'' = f$ tiene una solución y sólo una solución sobre $\mathfrak{J}$ que satisface las condiciones iniciales $s(t_0) = s_0$ y $s'(t_0) = v_0$. Proporciónese una expresión analítica de la solución.

5. Jorge, Juan y Roberto están viajando cuando descubren que el cuenta millas está roto, pero que el velocímetro funciona correctamente. Juan y Roberto se dan cuenta de que pueden calcular distancias registrando velocidades, pero no pueden convenir en cuál es el mejor procedimiento.

Cada uno de ellos decide hacerlo a su modo, pero convienen en no registrar más de dos velocidades para cada intervalo de diez minutos. Las siguientes tablas aparecen con los datos que Juan y Roberto registraron.

a) Háganse estimaciones razonables tanto basadas en los datos de Juan como en los de Roberto sobre cuál ha sido la distancia recorrida.

b) Critíquense los dos métodos.

c) Partiendo de los datos de Roberto establézcanse cotas de la distancia viajada.

Juan

Tiempo (min.)	Velocidad (m.p.h.)
0	52.3
5	50.1
10	42.7
15	45.7
20	58.0
25	43.6
30	59.4

Roberto

Intervalo de tiempo	Velocidad (m.p.h.)	
	MÁX.	MÍN.
0-10	55	47
10-20	58	35
20-30	62	37

6. Discútase cómo usar el velocímetro en un automóvil para calcular derivadas e integrales definidas.

7. Resuélvanse las siguientes ecuaciones y en cada caso determínese el valor máximo de la solución.

a) $s'' = -32;\ s(0) = 100,\ s'(0) = 200$

b) $D_x^2\, y = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \operatorname{sen} x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

c) $D_t^2\, y = 1-t^2;\ y(0) = 10,\ y'(0) = 0.$

8. Demuéstrese que hay dos soluciones sobre $\langle -\infty, \infty\rangle$ para la ecuación diferencial

$$yy' = x$$

que satisfacen $y(0) = 0$.

Sugerencia. Nótese que: $yy' = \frac{1}{2}D(y^2)$.

9. Encuéntrese la ecuación de aquellas curvas de R^2 cuyas rectas normales pasan todas por el origen. (La recta normal a una curva en un punto P es la recta que pasa por P ortogonal a la tangente a la curva en P.)

10. Encuéntrense las soluciones de

$$yy' = 2x^3$$

que satisfacen $y(0) = 0$.

6. LA INTEGRAL INDEFINIDA

El segundo teorema fundamental del cálculo dice:

Si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y F es una función con la propiedad de que $F' = f$ sobre $\mathfrak{J}$, entonces

6.1 $$\int_a^b f = F\Big]_a^b = F(b) - F(a) \quad \textit{para cualesquier } a, b \in \mathfrak{J}.$$

El problema de evaluar una integral por el segundo teorema fundamental es, por tanto, equivalente al problema de encontrar una función F cuya derivada sobre un intervalo sea f, es decir, al problema de encontrar una solución sobre $\mathfrak{J}$ de la ecuación diferencial

6.2 $$y' = f.$$

Cada fórmula para la derivada de una función es, por tanto, una fórmula (sobre un intervalo donde la derivada sea continua) para evaluar una integral. Por ejemplo, como

$$D\,(\text{sen}) = \cos,$$

tenemos

6.3 $$\int_a^b \cos = \text{sen}\Big]_a^b \quad \text{para cualesquier } a, b \in \langle -\infty, \infty \rangle.$$

Sabemos también que

$$D(I^{-1}) = -I^{-2}.$$

El dominio de definición de I^{-2} es $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$, y esta fórmula se verifica sobre $\langle -\infty, 0 \rangle$ y sobre $\langle 0, \infty \rangle$. Por tanto

6.4 $$\int_a^b I^{-2} = -I^{-1}\Big|_a^b$$

para cualesquier $a, b \in \langle -\infty, 0 \rangle$ o $a, b \in \langle 0, \infty \rangle$.

Si $a \in \langle -\infty, 0 \rangle$ y $b \in \langle 0, \infty \rangle$, 6.4 no se verifica. En este caso, la integral es una integral impropia y no converge.

En las listas de tales fórmulas o en la discusión de métodos de evaluación de integrales por el segundo teorema fundamental, es conveniente simplificar esta notación y en lugar de

6.5 $$\int_a^b f = F\Big]_a^b, \quad a, b \in \mathfrak{J}$$

o

6.6 $$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b, \quad a, b \in \mathfrak{J}$$

escribir simplemente

6.5′ $$\int f = F \qquad \text{sobre } \mathfrak{J}$$

o

6.6′ $$\int f(x)\,dx = F(x) \text{ sobre } \mathfrak{J}.$$

Esto se llama notación de la "integral indefinida". *Si no se formula ninguna restricción a un intervalo, se entiende que la fórmula de integración se verifica sobre todo intervalo contenido en el dominio de definición del integrando f.* Por ejemplo, 6.3 y 6.4 pueden escribirse

6.3′ $$\int \cos = \operatorname{sen}$$

y

6.4′ $$\int I^{-2} = -I^{-1}.$$

Expresado en esta notación, el segundo teorema fundamental enuncia:

Si f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces
$F' = f$ sobre $\mathfrak{J}$ implica $\int f = F$ sobre $\mathfrak{J}$.

Supongamos, recíprocamente, que f es continua sobre $\mathfrak{J}$ y que

$$\int f = F \text{ sobre } \mathfrak{J}.$$

Entonces

$$\int_a^x f = F\Big]_a^x = F(x) - F(a) \text{ para todo } a, x \in \mathfrak{J}.$$

Así pues, F es (sobre $\mathfrak{J}$) la función con la regla de correspondencia

$$F(x) = \int_a^x f + F(a) \text{ para cualquier } a \in \mathfrak{J} \text{ y todo } x \in \mathfrak{J}.$$

Por tanto, por el primer teorema fundamental del cálculo

$$F'(x) = f(x) \text{ para toda } x \in \mathfrak{J}.$$

es decir,

$$F' = f \text{ sobre } \mathfrak{J}.$$

De donde, *si f es continua sobre $\mathfrak{J}$, entonces*

6.7 $$\int f = F \textit{ sobre } \mathfrak{J} \textit{ si y sólo si } F' = f \textit{ sobre } \mathfrak{J}.$$

6.8 Ejemplo. Demuéstrese que

a) $$\int \operatorname{sen}^3 = \tfrac{1}{3}\cos^3 - \cos$$

b) $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}.$$

SOLUCIÓN.

a) $$\begin{aligned} D(\tfrac{1}{3}\cos^3 - \cos) &= -\cos^2 \operatorname{sen} + \operatorname{sen} \\ &= \operatorname{sen}(1-\cos^2) = \operatorname{sen}^3. \end{aligned}$$

De donde por 6.7

$$\int \operatorname{sen}^3 = \tfrac{1}{3}\cos^3 - \cos \text{ sobre } \langle -\infty, \infty \rangle.$$

Como $\langle -\infty, \infty \rangle$ es el dominio de definición de sen^3,

$$\int \operatorname{sen}^3 = \tfrac{1}{3}\cos^3 - \cos.$$

b) $$\begin{aligned} D_x\left[\frac{1}{a^2}x(a^2+x^2)^{-1/2}\right] &= \frac{1}{a^2}[(a^2+x^2)^{-1/2} - x^2(a^2+x^2)^{-3/2}] \\ &= \frac{1}{a^2}(a^2+x^2)^{-3/2}[a^2+x^2-x^2] \\ &= \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Como esto se verifica sobre $\langle -\infty, \infty \rangle$, se sigue de 6.7 que

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}.$$

Podríamos ahora recopilar todas las fórmulas de derivación que hemos obtenido hasta el momento y reescribirlas como fórmulas para la evaluación de integrales. Las tablas de integrales son colecciones de tales fórmulas y hay muchas de tales tablas publicadas. Uno de los propósitos de esta sección y la próxima es enseñar el uso de estas tablas. Una tabla de integrales de tamaño razonable contendrá solamente las fórmulas mas básicas, y se espera que el que las use reducirá —cuando ello sea posible— la integral que desea evaluar a una de las formas más básicas. Enumeramos aquí algunas de las fórmulas más fundamentales entre las que hemos obtenido e ilustramos después cómo podemos usar estas fórmulas para obtener otras más. De las fórmulas $DI^{n+1} = (n+1)I^n$, $D\,\text{sen} = \cos$, $D\cos = -\text{sen}$, $D\tan = \sec^2$, $D\cot = -\csc^2$, obtenemos

6.9 $$\int I^n = \frac{I^{n+1}}{n+1}, \qquad n \neq -1$$

6.10 $$\int \cos = \text{sen}$$

6.11 $$\int \text{sen} = -\cos$$

6.12 $$\int \sec^2 = \tan$$

6.13 $$\int \csc^2 = -\cot.$$

Como ninguna de estas fórmulas se restringe explícitamente a un intervalo ha de entenderse que se verifican sobre todo intervalo contenido en el dominio de definición de la integral.

Supongamos que n es un entero, que f tiene una derivada continua sobre un intervalo $\mathfrak{I}$, y que $f(\mathfrak{I}) \subset D_{I^n}$. (Más adelante podremos demostrar que lo que estamos a punto de probar es cierto para cualquier número real n, $n \neq -1$.) Por el corolario 10.3 del capítulo 8 (pág. 391)

$$D(f^{n+1}) = (n+1)f^n f' \text{ sobre } \mathfrak{I}.$$

Por tanto, si $n \neq -1$,

$$D\left(\frac{1}{n+1}f^{n+1}\right) = f^n f' \quad \text{sobre } \mathfrak{I}.$$

Como hemos supuesto que f tiene una derivada continua sobre $\mathfrak{I}$, f' es

continua sobre $\mathfrak{J}$. Nuestra hipótesis sobre $f(\mathfrak{J})$ implica que $f^n = I^n \circ f$ es continua sobre $\mathfrak{J}$ y, por tanto, que $f^n f'$ es continua sobre $\mathfrak{J}$. Es, entonces, una consecuencia del segundo teorema fundamental (véase 6.7) que:

si f tiene una derivada continua sobre $\mathfrak{J}$ y $f(\mathfrak{J}) \subset D_{I^n}$, entonces

6.14 $$\int f^n f' = \frac{1}{n+1} f^{n+1} \quad \text{sobre } \mathfrak{J}, \quad n \neq -1.$$

Las siguientes dos fórmulas de integración son consecuencias de dos de las propiedades básicas de la integral. Si f y g son integrables sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y si c es una constante, entonces

6.15 $$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{para cualesquier } a, b \in \mathfrak{J}$$

y

6.16 $$\int_a^b cf = c \int_a^b f \qquad \text{para cualesquier } a, b \in \mathfrak{J}.$$

En la notación de la integral indefinida prescindimos de los límites de integración en 6.15 y 6.16 y escribimos

6.15′ $$\int (f+g) = \int f + \int g \quad \text{sobre } \mathfrak{J}$$

y

6.16′ $$\int cf = c \int f \qquad \text{sobre } \mathfrak{J}.$$

Si, por ejemplo, sabemos que $\int f = F$ sobre $\mathfrak{J}$ e $\int g = G$ sobre $\mathfrak{J}$, entonces

$$\int (f+g) = F+G \quad \text{sobre } \mathfrak{J}$$

e

$$\int cf = cF \qquad \text{sobre } \mathfrak{J}.$$

6.17 Ejemplo. Encuéntrese una fórmula para $\int x(1+x^2)^{1/2}\,dx$.

SOLUCIÓN

$$\int x(1+x^2)^{1/2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int (1+x^2)^{1/2} D_x(1+x^2)\,dx.$$

Por 6.14 vemos que sobre $\langle -\infty, \infty\rangle$

$$\int x(1+x^2)^{1/2}\,dx = \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}.$$

Comprobación

$$D_x(\tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2}{3}(1+x^2)^{1/2}\,(2x) = x(1+x^2)^{1/2}.$$

6.18 Ejemplo. Evalúese $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3$.

Solución

$$\int \cos^3 = \int \cos^2 \cos = \int (1-\operatorname{sen}^2)\cos = \int \cos - \int \operatorname{sen}^2 \cos$$

$$= \int \cos - \int \operatorname{sen}^2 D(\operatorname{sen}).$$

Por 6.10

$$\int \cos = \operatorname{sen}$$

y por 6.14

$$\int \operatorname{sen}^2 D(\operatorname{sen}) = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3.$$

Por tanto, por 6.15′

$$\int \cos^3 = \operatorname{sen} - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3$$

e

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 = (\operatorname{sen} - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3)\Big]_0^{\pi/2} = 1 - \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

Problemas

1. $\displaystyle\int \cos at\,dt = \frac{1}{a}\operatorname{sen} at, \quad (a \neq 0)$

2. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2(15x^2-12x+8)}{105}(x+1)^{3/2}$

3. $\displaystyle\int \frac{I}{(aI+b)^3} = \frac{b}{2a^2(aI+b)^2} - \frac{1}{a^2(aI+b)}, \quad (a \neq 0)$

4. $\int (\text{sen} \circ \cos)\,\text{sen} = \cos \circ \cos$

5. $\int x^3\sqrt{a^2+x^2}\,dx = (\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{15}a^2)\sqrt{(a^2+x^2)^3}$

6. $\int \text{sen}^n = -\dfrac{\text{sen}^{n-1}\cos}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \text{sen}^{n-2}, \quad (n \neq 0).$

Evalúense:

7. $\int_0^5 x^2\sqrt{x+1}\,dx$

8. $\int_0^3 \cos\dfrac{\pi}{6}t\,dt$

9. $\int_0^1 \dfrac{I}{(I-2)^3}$

10. $\int_0^3 \dfrac{I}{(I-2)^3}.$

Encuéntrense fórmulas para cada una de las siguientes integrales

11. $\int (2t+1)(t^2+t+1)^3\,dt$

12. $\int \cos\,\text{sen}^3$

13. $\int (2I+1)^5$

14. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

15. $\int (ax+b)^n\,dx, \quad (a \neq 0,\, n \neq -1)$

16. $\int \text{sen}\,a\theta\,d\theta$

17. $\int \dfrac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,dt.$

Evalúense

18. $\int_0^5 (4x-3)^3\,dx$

19. $\int_0^\pi \text{sen}\cos^3$

20. $\int_0^\pi \text{sen}^3$

21. $\int_0^4 t(1-t^2)^5\,dt$

22. $\int_{-1}^{1} t(2t^2+5)^4\,dt$

23. $\int_0^4 \frac{I}{(I^2-4)^2}$

24. $\int_2^4 \frac{I}{(I^2-4)^{1/2}}$

25. $\int_0^{\pi/4} \frac{\text{sen}}{\cos^2}$

26. $\int_0^{\pi/4} \tan\sec^3$

27. $\int_0^{\pi/4} \sec^2$

28. $\int_0^{3\pi/2} \sec^2$.

29. Demuéstrese que

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} \quad \text{sobre } [-1, 1].$$

30. *a*) Demuéstrese que si

$$\int f = F \quad \text{sobre } [a, b\rangle$$

y si F es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int f = F \quad \text{sobre } [a, b].$$

b) Demuéstrese que si

$$\int f = F \quad \text{sobre } \langle a, b\rangle$$

y si F es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int f = F \quad \text{sobre } [a, b].$$

31. ¿Es cierto que

$$\int f = F \text{ sobre un intervalo } \mathfrak{J} \text{ implica } F' = f \text{ sobre } \mathfrak{J}?$$

Justifíquese lo contestado con un ejemplo.

32. Demuéstrese que

a) $\int f = F$ sobre $\mathfrak{J}$ implica

$$\int f = F+c \text{ sobre } \mathfrak{J} \text{ para cualquier constante } c.$$

b) $\int f = F$ sobre $\mathfrak{J}$ y $f = G$ sobre $\mathfrak{J}$ implica

$G = F + c$ sobre $\mathfrak{J}$ para alguna constante c.

7. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

En esta sección consideramos dos métodos de integración: i) integración por partes, e ii) integración por sustitución. La integración por partes se basa en la regla para diferenciar el producto de funciones, y la integración por sustitución en la regla para diferenciar la composición de funciones.

i) Integración por partes

Supongamos que las funciones u y v tienen derivadas continuas sobre un intervalo $\mathfrak{J}$. Por la regla para diferenciar el producto de funciones

$$D(uv) = u'v + uv' \text{ sobre } \mathfrak{J}$$

y

$$uv' = D(uv) - u'v \text{ sobre } \mathfrak{J}.$$

Como uv', $u'v$, y $D(uv)$ son continuas sobre $\mathfrak{J}$,

$$\int_a^b uv' = uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v$$

para cualesquier $a, b \in \mathfrak{J}$. Expresada con la notación de la integral indefinida, esta ecuación toma la forma:

Si u y v tienen derivadas continuas sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces

7.1 $$\int uv' = uv - \int u'v \quad \text{sobre } \mathfrak{J}.$$

En la derivación de fórmulas para la evaluación de las integrales, el integrando se expresa en la forma uv' y la ecuación 7.1 transforma el problema de la integración de uv' en el de la integración de $u'v$. Por una elección apropiada de u y v, el uso de 7.1 a menudo conduce a una derivación sencilla de una fórmula para $\int uv'$, y ésta se llama la "*integración por partes*". Los siguientes ejemplos ilustran el método.

7.2 Ejemplos. Obténgase una fórmula para $\int I \text{ sen}$.

SOLUCIÓN. Hagamos un primer intento con $u = \text{sen}$ y $v' = I$ $(v = \frac{1}{2}I^2)$.

Por 7.1 obtenemos (aquí u y v tienen derivadas continuas sobre $\langle -\infty, \infty \rangle$)

$$\int I \text{ sen} = \int \text{sen } D(\tfrac{1}{2}I^2) = (\text{sen})(\tfrac{1}{2}I^2) - \int (D \text{ sen})(\tfrac{1}{2}I^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}I^2 \text{ sen} - \tfrac{1}{2}\int I^2 \cos.$$

Esta selección de u y de v nos lleva a una integral que no es más sencilla que la integral original. Ensayemos ahora con $u = I$ y $v' = \text{sen}$ ($v = -\cos$).

$$\int I \text{ sen} = \int ID(-\cos) = I(-\cos) - \int (DI)(-\cos)$$

$$= -I\cos + \int \cos = -I\cos + \text{sen}.$$

El ejemplo siguiente ilustra el uso reiterado de la integración por partes.

7.3 Ejemplo. Obténgase una fórmula para $\int I^2 \text{ sen}$.

SOLUCIÓN. Sean $u = I^2$ y $v' = \text{sen}$.

$$\int I^2 \text{ sen} = \int I^2 D(-\cos) = -I^2\cos - \int (DI^2)(-\cos)$$

$$= -I^2\cos + 2\int I\cos.$$

Integrando de nuevo por partes, obtenemos

$$\int I\cos = \int ID \text{ sen} = I \text{ sen} - \int (DI)\text{ sen} = I\text{ sen} - \int \text{sen}$$

$$= I\text{ sen} + \cos.$$

Por tanto

$$\int I^2 \text{ sen} = -I^2\cos + 2(I\text{ sen} + \cos) = (2-I^2)\cos + 2I\text{ sen}.$$

COMPROBACIÓN. $D[(2-I^2)\cos + 2I\text{ sen}]$
$$= -2I\cos - (2-I^2)\text{ sen} + 2\text{ sen} + 2I\cos = I^2\text{ sen}.$$

En el próximo ejemplo la integración por partes y una identidad

trigonométrica nos llevan a una ecuación que puede resolverse para la integral que deseamos evaluar.

7.4 Ejemplo. Evalúese $\int_0^{2\pi} \cos^2$.

SOLUCIÓN. Sea $u = \cos$ y $v = \text{sen}$. Entonces

$$\int \cos^2 = \int \cos D\,\text{sen} = \cos\,\text{sen} - \int (D\cos)\,\text{sen}$$

$$= \cos\,\text{sen} + \int \text{sen}^2 = \cos\,\text{sen} + \int (1 - \cos^2)$$

$$= \cos\,\text{sen} + I - \int \cos^2.$$

Por tanto

$$2\int \cos^2 = I + \cos\,\text{sen}$$

e

$$\int \cos^2 = \tfrac{1}{2}(I + \cos\,\text{sen}).$$

De donde

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 = \tfrac{1}{2}(I + \cos\,\text{sen})\Big]_0^{2\pi} = \pi.$$

ii) Integración por sustitución

Probamos primero el teorema que es básico para el uso de la sustitución para la transformación de integrales definidas. El teorema es una consecuencia de la regla para la diferenciación de la composición de funciones y del primero y segundo teoremas fundamentales.

7.5 Teorema. *Supóngase que*

1) *f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{I}$.*
2) *u tiene una derivada continua sobre un intervalo $\mathcal{E}$.*
3) *$u(\mathcal{E}) = \{u(t) : t \in \mathcal{E}\} \subset \mathfrak{I}$.*
4) *$u(\alpha) = a$ y $u(\beta) = b$ para $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$.*

Entonces

7.6
$$\int_a^b f = \int_x^\beta (f \circ u)u'.$$

PRUEBA. Sean $y(x) = \int_a^x f$ y $z(t) = y(u(t))$. Entonces

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x), \quad x \in \mathfrak{J} \\ z'(t) &= y'(u(t))u'(t) = f(u(t))u'(t), \quad t \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,dt &= \int_\alpha^\beta z'(t)\,dt = z(\beta) - z(\alpha) \\ &= y(u(\beta)) - y(u(\alpha)) \\ &= y(b) - y(a) = y(b) = \int_a^b f. \end{aligned}$$

De donde

$$\int_\alpha^\beta (f \circ u)u' = \int_a^b f.$$

El primer ejemplo ilustra el uso de una sustitución trigonométrica para transformar una integral con radical en una en que el radical ha desaparecido. Tenemos para $u = a$ sen:

$$\sqrt{a^2 - I^2} \circ a \text{ sen} = \sqrt{a^2 - a^2 \text{ sen}^2} = \sqrt{a^2 \cos^2} = |a \cos|.$$

7.7 Ejemplo. Evalúese $\int_0^2 \sqrt{4 - I^2}$.

SOLUCIÓN. Supongamos que la integral que deseamos evaluar es el primer miembro de 7.6: $f = \sqrt{4 - I^2}$. El integrando f es continuo sobre $\mathfrak{J} = [-2, 2]$. Sea $u = 2$ sen. Entonces

$$(f \circ u)u' = \sqrt{4 - 4 \text{ sen}^2}\, D(2 \text{ sen}) = 4\,|\cos| \cos.$$

Como $u = 2$ sen tiene una derivada continua sobre $\langle -\infty, \infty \rangle$ y el rango de 2 sen es $[-2, 2]$, podemos, después de observar que $u(0) = 2 \text{ sen } (0) = 0$ y $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, aplicar el teorema 7.5. Obtenemos entonces

$$\int_0^2 \sqrt{4 - I^2} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4 \text{ sen}^2}\, D(2 \text{ sen}) = 4 \int_0^{\pi/2} |\cos| \cos.$$

Sobre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ el coseno es no negativo. Por tanto $|\cos| = \cos$ sobre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e

$$\int_0^2 \sqrt{4-I^2} = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 = 2\int_0^{\pi/2} (1 + \cos\circ 2I)$$

$$= 2(I + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\circ 2I)\Big]_0^{\pi/2} = \pi.$$

En el ejemplo siguiente identificamos la integral que deseamos evaluar con el segundo miembro de 7.6. En el ejemplo previo la habíamos identificado con el primer miembro de 7.6. Para conservar huella de la sustitución es a menudo conveniente escribir 7.6 en la forma

7.6′ $$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))\,du(t) = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\,dt$$

o

7.6″ $$\int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u(x))\,du(x) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)\,dt,$$

con la idea de que el símbolo "mudo" x identifica la integral original y el símbolo "mudo" t identifica la integral transformada. Verbigracia, en el ejemplo 7.7 la integral que iba a ser evaluada era $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$, y usamos la sustitución $x = u(t) = 2\,\mathrm{sen}\,t$, $dx = u'(t)dt = 2\cos t\,dt$.

7.8 Ejemplo. Evalúese $\int_0^2 x^5\sqrt{8-x^3}\,dx$.

SOLUCIÓN. $\int_0^2 x^5\sqrt{8-x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^2 x^3\sqrt{8-x^3}\,D_x(8-x^3)\,dx.$

Haciendo $t = u(x) = 8-x^3$, obtenemos por 7.6″ que

$$\int_0^2 x^5\sqrt{8-x^3}\,dx = -\tfrac{1}{3}\int_0^2 x^3\sqrt{8-x^3}\,d(8-x^3)$$

$$= -\tfrac{1}{3}\int_8^0 (8-t)\sqrt{t}\,dt = \tfrac{1}{3}\int_0^8 (8t^{1/2} - t^{3/2})\,dt$$

$$= \tfrac{1}{3}(\tfrac{16}{3}t^{3/2} - \tfrac{2}{5}t^{5/2})\Big]_0^8$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{16}{3}8^{3/2} - \frac{2}{5}8^{5/2}\right] = \frac{2^9\sqrt{2}}{45}.$$

La función $u = 8-t^3$ tiene una derivada continua sobre $\langle -\infty, \infty\rangle$. La función f que aquí es la función definida por $f(t) = (8-t)\sqrt{t}$, es continua sobre $[0, \infty]$. Para $x \in [0, 2]$, $u(x) = 8-x^3 \geqslant 0$, y vemos que las condiciones del teorema 7.5 se satisfacen.

En el siguiente ejemplo ilustramos una aplicación del teorema 7.5. En el ejemplo derivamos las leyes de conservación básicas de la mecánica. Aunque la terminología puede al principio parecer extraña, es ésta una aplicación elemental del análisis a la física. Suponemos que las funciones que aparecen satisfacen las condiciones del teorema 7.5. Hay un buen argumento físico —que no damos— en apoyo de esta hipótesis.

7.9 Ejemplo. Sea r la función tiempo-desplazamiento de una partícula de masa m que se mueve sobre una recta: $r(t)$ es la distancia dirigida de la partícula a un punto fijo (el origen) sobre la recta en el instante t. La velocidad de la partícula es $\dot{r} = v$ y la aceleración de la partícula es de $\ddot{r} = \dot{v} - a$. Sea F la función desplazamiento-fuerza: $F(x)$ es la fuerza en la dirección positiva de la recta que actúa sobre la partícula cuando la partícula se encuentra a la distancia x del origen. La segunda ley del movimiento de Newton nos dice que

$$D(mv) = F \circ r.$$

En mecánica no relativista, m es una constante. Por tanto, $D(mv) = m\dot{v} = m\ddot{r} = ma$, y

$$ma = F \circ r;$$

es decir, en cada instante t, $ma(t) = F(r(t))$. La *energía cinética* T de la partícula (en la mecánica no relativista) se define como $\frac{1}{2}mv^2$. La *energía potencial* U de la partícula se define por

$$U(x) = -W_{x_0}^{x}(F) = -\int_{x_0}^{x} F.$$

La energía potencial $U(x)$ es la inversa (aditiva) del trabajo hecho por la fuerza F al desplazar la partícula desde x_0 (un punto arbitrario donde la energía potencial es cero) a x.

a) Pruébese la *ley de conservación de la energía:*

$$T + U \circ r = \text{constante}.$$

b) La función i definida por

$$i(t) = \int_0^t F \circ r$$

se llama el *impulso* de F; $i(t)$ es una medida de la efectividad de la fuerza sobre el intervalo de tiempo $[0, t]$. La función mv se llama el *momento* (lineal) de la partícula.

Demuéstrese que

$$i - mv = \text{constante},$$

y conclúyase de aquí que el cambio en impulso es igual al cambio en momento.

Para un sistema de partículas de masa m_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n} (i_k - m_k v_k) = \text{constante}.$$

Si $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$ (lo que es cierto, por ejemplo, si $\sum_{k=1}^{n} F_k = 0$), entonces

$$\sum_{k=1}^{n} m_k v_k = \text{constante}.$$

Es ésta la *ley de conservación del momento.*

SOLUCIÓN. Por la segunda ley del movimiento de Newton

$$ma = D(mv) = F \circ r$$

y

$$(F \circ r)\dot{r} = ma\dot{r} = m\dot{v}v = \tfrac{1}{2} D(mv^2).$$

Tenemos pues

$$D(mv) = F \circ r$$

y

$$\tfrac{1}{2} D(mv^2) = (F \circ r)\dot{r}.$$

Integrando estas ecuaciones obtenemos

$$\int_{t_0}^{t} D(mv) = mv(t) - mv(t_0) = \int_{t_0}^{t} F \circ r = i(t) - i(t_0)$$

e

$$\int_{t_0}^{t} \tfrac{1}{2} D(mv^2) = \tfrac{1}{2} mv^2(t) - \tfrac{1}{2} mv^2(t_0) = \int_{t_0}^{t} (F \circ r)\dot{r}$$

$$= \int_{r(t_0)}^{r(t)} F = -[U(r(t)) - U(r(t_0))].$$

Estas ecuaciones nos dicen que el cambio en momento es igual al cambio en impulso y que el cambio en energía cinética es igual al inverso del cambio en energía potencial.

Por tanto

$$i(t) - mv(t) = i(t_0) - mv(t_0)$$

$$\tfrac{1}{2} mv^2(t) + U(r(t)) = \tfrac{1}{2} mv^2(t_0) + U(r(t_0));$$

es decir,

$$i - mv = \text{constante}$$
$$T + U \circ r = \text{constante}.$$

Problemas

1. Obténganse fórmulas para

a) $\displaystyle\int I \cos$ *b)* $\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$

c) $\displaystyle\int I \operatorname{sen} \circ 2I$ *d)* $\displaystyle\int I^2 \cos$

e) $\displaystyle\int \sec^4 = \int \frac{1}{\cos^4}.$

2. Evalúense

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \theta \cos \theta \, d\theta$ *b)* $\displaystyle\int_2^4 I(I-1)^{-1/2}$

c) $\displaystyle\int_0^5 \theta \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta$ *d)* $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{a-x}\,dx \quad (a > 0)$

e) $\displaystyle\int_0^3 x^2\sqrt{1+x}\,dx.$

3. Demuéstrese que

a) $\displaystyle\int \cos^n = \frac{1}{n}\cos^{n-1} \operatorname{sen} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} \quad (n \neq 0)$

b) $\displaystyle\int \sec^n = \int \frac{1}{\cos^n} = \frac{\operatorname{sen}}{(n-1)\cos^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} \quad (n \neq 1).$

4. Sea, para n entero positivo, $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n$. Demuéstrese que

a) $\displaystyle a_n = \frac{n-1}{n}\, a_{n-2}$ *b)* $\displaystyle a_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}$

c) $\displaystyle a_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \, \frac{\pi}{2}.$

5. Demuéstrese que

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} I^3 \operatorname{sen} \circ 2I = \frac{1}{16}\int_0^{2\pi} I^3 \operatorname{sen}$

b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x^2}{1+x}\,dx = \int_1^5 \left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt$ (*Sugerencia.* Hágase $t=u(x)=1+x$.)

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan\theta\, d\theta = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{dx}{x}$ (*Sugerencia.* Hágase $x = u(\theta) = \cos\theta$.)

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sec^4 = \int_0^1 (1+I^2)$ (*Sugerencia.* Hágase $u = \tan$.)

e) $\displaystyle\int_0^{10} \frac{2I}{I^2+1} = \int_1^{101} I^{-1}$

f) $\displaystyle\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \operatorname{sen}^2$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2.$

6. Evalúense

a) $\displaystyle\int_0^{3} x(x^2+9)^{1/3}\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{I}{\sqrt{2+I}}$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \cos$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}^3 \cos^2$

e) $\displaystyle\int_0^{4} I(1+I^2)^{-3/2}$

f) $\displaystyle\int_0^{3} \sqrt{9-I^2}$

g) $\displaystyle\int_0^{a} I(a^2-I^2)^{1/2}$

h) $\displaystyle\int_0^{a} I^2(a^2-I^2)^{1/2}.$

7. Considérese la curva $\mathcal{C}$ cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\mathcal{C}: \begin{array}{l} x = u(t) \\ y = v(t), \quad t\in[\alpha, \beta]. \end{array}$$

Supongamos que u tiene una derivada continua sobre $[\alpha, \beta]$ y que f es continua sobre $u([\alpha, \beta]) = \{u(t) \mid t\in[\alpha, \beta]\}$ y es tal que $v = f \circ u$. Si $v(t) \geqslant 0$ para $t\in[\alpha, \beta]$, demuéstrese que el área bajo $\mathcal{C}$ es

$$\int_\alpha^\beta vu' \quad \text{si} \quad u(\alpha) < u(\beta)$$

$$-\int_\alpha^\beta vu' \quad \text{si} \quad u(\alpha) > u(\beta).$$

8. Demuéstrese que

a) El área de un círculo de radio r es πr^2.

b) El área de un sector circular de ángulo central α (radianes) y radio r es $\frac{1}{2}r^2\alpha$.

c) El área de una elipse con semiejes a y b es πab.

9. Supongamos que:

1) u tiene una derivada continua sobre $[\alpha, \beta]$ y sobre $[\beta, \gamma]$ $(\beta \in [\alpha, \gamma])$.

2) f y g son continuas sobre $[a, b]$ y $f(x) < g(x)$ para $x \in \langle a, b \rangle$.

3) $u(\alpha) = u(\gamma) = a$, $u(\beta) = b$,

$$v = g \circ u \quad \text{sobre} \quad [\alpha, \beta]$$
$$v = f \circ u \quad \text{sobre} \quad [\beta, \gamma].$$

La curva $\mathcal{C}$ cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\mathcal{C}: \quad \begin{aligned} x &= u(t) \\ y &= v(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \end{aligned}$$

se llama curva cerrada simple (figura 10).

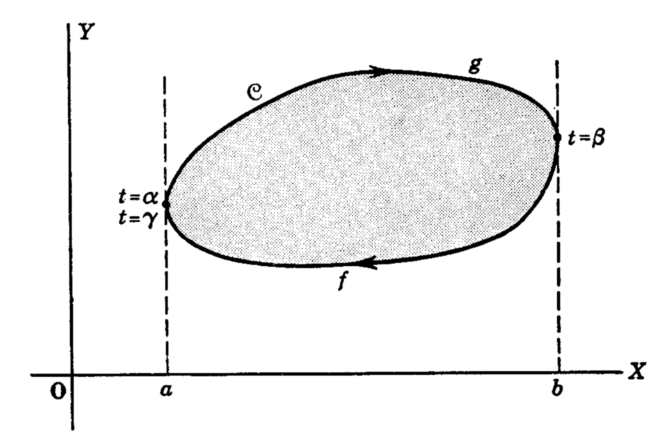


FIGURA 10

a) Demuéstrese que el área acotada por $\mathcal{C}$ (es decir, el área limitada por f y g entre $x = a$ y $x = b$) es

$$\int_{\alpha}^{\gamma} vu'.$$

b) Suponiendo que v tiene una derivada continua sobre $[\alpha, \gamma]$, demuéstrese que

$$\int_{\alpha}^{\gamma} vu' = - \int_{\alpha}^{\gamma} uv'.$$

10. Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una recta. Sea $r(t)$ el desplazamiento de la partícula desde un punto Q en el instante t. Sea $v(t) = \dot{r}(t)$ la velocidad de la partícula en el instante t. La curva definida por

$$x = r(t)$$
$$y = mv(t)$$

se llama *trayectoria de fase* de la partícula. Cada punto (x, y) corresponde a un *estado* del sistema físico: x es la *coordenada de posición* y y es la *coordenada de momento.* El punto $(r(t), mv(t))$ es el estado del sistema en el instante t.

Consideremos el caso particular en que la partícula es atraída al punto Q por una fuerza que es proporcional al desplazamiento. En el instante inicial, la partícula está alejada de Q la distancia x_0 y su velocidad inicial es v_0. Úsese la ley de conservación de la energía para demostrar que la trayectoria de fase de la partícula se encuentra sobre una elipse. (Más adelante podremos demostrar que la trayectoria de fase cubre la elipse.) Proporciónense expresiones para los desplazamientos máximo y mínimo y las velocidades máxima y mínima de la partícula e ilústrense estos resultados mediante un bosquejo de las trayectorias de fase en R^2. ¿Qué hay de especial en el origen de R^2?

8. VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Es posible definir volúmenes para regiones en el espacio euclidiano tridimensional comenzando por definir el volumen de un cubo de lado a como a^3. El método de hacer esto es completamente análogo al usado para el área. En esta sección no somos tan ambiciosos sino que nos limitamos a sólidos cuyo volumen puede calcularse por medio de una integral definida (unidimensional). Suponemos propiedades para la medida de volúmenes análogas a las adoptadas para el área en el capítulo 12, sección 2 (pág. 526). Aquí, nuestros "bloques de construcción" serán cilindros circulares. El volumen de un cilindro es el área de la base por la altura.

Sea f una función continua y no negativa sobre $[a, b]$, $a < b$ (figura 11). Haciendo girar la región acotada por la gráfica de f, las rectas $x = a$ y $x = b$, y el eje X, alrededor del eje X, se genera un sólido al que se llama *sólido de revolución.* V denotará el volumen del sólido de revolución.

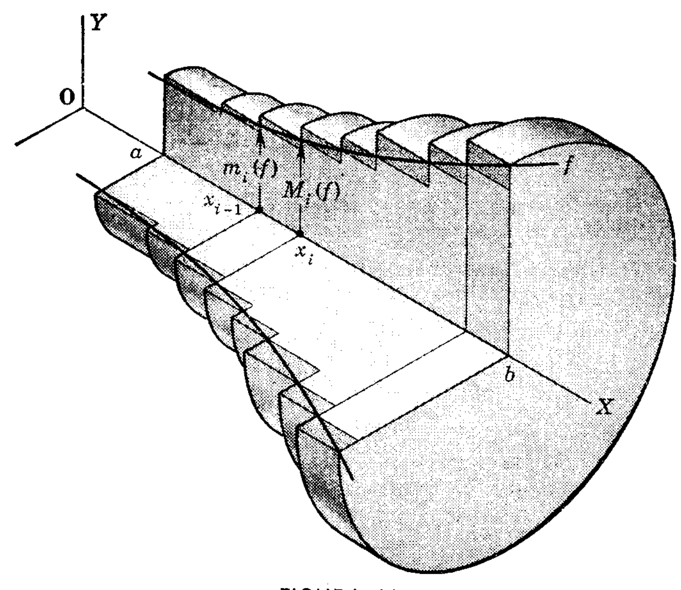


FIGURA 11

Sea $P = \{x_i | i = 0, 1, \ldots, n\}$ una partición de $[a, b]$. Definamos

$$m_i(f) = \text{ínf } \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

y

$$M_i(f) = \sup \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Tenemos, entonces, usando las propiedades de inclusión y aditividad del volumen [análogas a las 2.2 y 2.3 del capítulo 12 (pág. 526) con volumen en lugar de área] y sumando los cilindros inscritos y circunscritos,

$$\sum_{i=1}^{n} \pi m_i^2 (f)(x_i - x_{i-1}) \leqslant V \leqslant \sum_{i=1}^{n} \pi M_i^2 (f)(x_i - x_{i-1}).$$

Como $f(x) \geqslant 0$,

$$m_i^2(f) = \text{ínf } \{f^2(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} = m_i(f^2)$$

y

$$M_i^2(f) = \sup \{f^2(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} = M_i(f^2),$$

de modo que

$$\pi \underline{\int_a^b} f^2 \leqslant V \leqslant \pi \overline{\int_a^b} f^2.$$

La hipótesis de que f sea continua sobre $[a, b]$ implica que f^2 es continua

sobre $[a, b]$. Por tanto, f^2 es integrable sobre $[a, b]$, e

$$\underline{\int_a^b} f^2 = \int_a^b f^2 = \overline{\int_a^b} f^2 .$$

De donde

8.1 $$V = \pi \int_a^b f^2$$

8.2 Ejemplo. Encuéntrese el volumen de un cono circular recto de altura 10 y diámetro de base 20.

SOLUCIÓN. (Figura 12.) El cono queda generado al hacer girar la recta

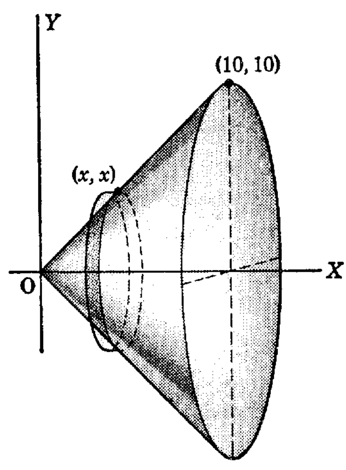


FIGURA 12

$y = x$ alrededor del eje X, $x \in [0, 10]$. Por 8.1

$$V = \pi \int_0^{10} x^2\,dx = \frac{\pi}{3} 10^3.$$

8.3 Ejemplo. Sea $\mathcal{C}$ el arco de la parábola $y = x^2$, $x \in [0, 1]$. Encuéntrese el volumen V del sólido de revolución obtenido al girar el arco de parábola $\mathcal{C}$ alrededor de la recta $x = 1$.

SOLUCIÓN. (Figura 13.) Sea $P = \{y_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ una partición del intervalo $[0, 1]$ sobre el eje Y. Tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(1-\sqrt{y_i})^2 (y_i - y_{i-1}) \leqslant V \leqslant \sum_{i=1}^{n} \pi(1-\sqrt{y_{i-1}})^2 (y_i - y_{i-1}).$$

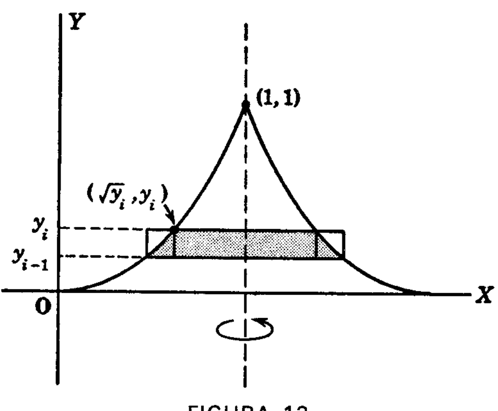


FIGURA 13

De donde

$$\pi \underline{\int_0^1} (1-\sqrt{y})^2\, dy \leqslant V \leqslant \pi \overline{\int_0^1} (1-\sqrt{y})^2\, dy$$

y

$$V = \pi \int_0^1 (1-\sqrt{y})^2\, dy.$$

Pero

$$\int_0^1 (1-\sqrt{y})^2\, dy = \int_0^1 (1-2\sqrt{y}+y)\, dy = y-\tfrac{4}{3}y^{3/2}+\tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1$$

$$= 1-\tfrac{4}{3}+\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{6},$$

luego

$$V = \pi/6.$$

Problemas

1. Determínese el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar la región limitada por $y = x^2$, el eje X, y la recta $x = 1$ alrededor de

a) El eje X. *b*) El eje Y.
c) La recta $x = 2$. *d*) La recta $y = 1$.

2. Determínese el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar la región limitada por las curvas abajo dadas alrededor del eje X.

a) $x^2 = 4py$, $x = 2p$, y $y = 0$
b) $x^2 = 4py$, y $y = p$
c) $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = 0$, y $x = \pi/4$
d) $xy = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $x = 0$, y $y = 0$.

3. Demuéstrese que

a) El volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$.
b) El volumen de un cono circular recto es un tercio del área de la base por la altura.
c) El volumen de una zona esférica con bases de radios a y b y de altura h es $\frac{1}{6}\pi h(3a^2+3b^2+h^2)$.

Sugerencia. Supongamos que la zona (imagínela el lector como una rodaja) ha sido cortada de una esfera de radio r por planos paralelos a distancias c y $c+h$ respectivamente del centro de la esfera. Se encontraría, entonces, como volumen de tal zona $\pi(r^2h-c^2h-ch^2-\frac{1}{3}h^3)$. Exprésese esta contestación en términos de a, b, y h.

4. Un cilindro circular recto con eje vertical está lleno de un líquido que pesa 62 libras por pie cúbico. El radio de la base es de 10 pies y su altura es de 15 pies. Determínese el trabajo efectuado al bombear todo el líquido del tanque a un nivel de 5 pies sobre la parte superior del tanque.

Sugerencia. Subdivídase el cilindro en zonas horizontales y acótese el trabajo W por sumas superiores e inferiores. Obténgase de aquí la fórmula $W = 6\,200\pi \int_0^{15} (20-x)dx$ pie-libras.

9. LAS INTEGRALES COMO LÍMITES DE SUMAS

Hay muchas aplicaciones donde es importante reconocer que los límites de ciertos tipos de sumas son integrales definidas. Sabemos ya (teorema 5.3, capítulo 12, pág. 546) que

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')(x_i-x_{i-1}) = \int_a^b f$$

donde P es una partición de $[a, b]$, $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ y f es continua sobre $[a, b]$. El propósito de esta sección es extender este resultado. Los dos resultados de interés más inmediato para nosotros son (teorema 9.4*b* y 9.4*c*):

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\,g(x_i'')(x_i-x_{i-1}) = \int_a^b fg$$

y

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f^2(x_i')+g^2(x_i'')}\,(x_i-x_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{f^2+g^2}.$$

El primer límite es usado en esta sección para explicar el "método de las capas" para computar los volúmenes de los sólidos de revolución y el

segundo límite lo necesitamos para discutir la longitud de las curvas (sección 10).

En toda esta sección, mediante f y g representaremos funciones reales continuas definidas sobre un intervalo $[a, b]$ $(a < b)$. La función F será una función real con el conjunto de todos los subintervalos cerrados no vacíos de $[a, b]$ como dominio de definición. Las siguientes reglas de correspondencia nos dan ejemplos de tales funciones:

$$([\alpha, \beta] \subset [a, b], \alpha < \beta)$$

1) $$F([\alpha, \beta]) = \text{ínf } \{f(x) | x \in [\alpha, \beta]\}$$

2) $$F([\alpha, \beta]) = \sup \{f(x) | x \in [\alpha, \beta]\}$$

3) $$F([\alpha, \beta]) = \text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

4) $$F([\alpha, \beta]) = 2\pi(1-\alpha-\beta)\beta^2$$

5) $$F([\alpha, \beta]) = f(\alpha)+g(\beta)$$

6) $$F([\alpha, \beta]) = f(\alpha)\, g(\beta).$$

Sea $P = \{x_i | i = 0, 1, \ldots, n\}$ una partición de $[a, b]$. Deseamos considerar sumas $S(F, P)$ del tipo

$$S(F, P) = \sum_{i=1}^{n} F([x_{i-1}, x_i])\,(x_i - x_{i-1}).$$

Por ejemplo, si F está definido por (1), entonces $S(F, P) = L(f, P)$ (una suma inferior de f); si F está definida por (2), entonces $S(F, P) = U(f, P)$.

9.1 Definición

$\lim\limits_{|P| \to 0} S(F, P) = l$ *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $|P| < \delta$ *implica* $|S(F, P) - l| < \varepsilon$.

Reformulemos primero el teorema 5.3 del capítulo 12 (pág. 546) en términos de un límite de una suma de este tipo.

9.2 Teorema. *Si* f *es continua sobre* $[a, b]$ *y si*

$$F([\alpha, \beta]) = f(\beta')$$

para todo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ *y algún* $\beta' \in [\alpha, \beta]$, *entonces*

$$S(F, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\,(x_i - x_{i-1})$$

y

$$\lim_{|P| \to 0} S(F, P) = \int_a^b f.$$

Una útil generalización de este resultado es

9.3 Teorema. *Si f es continua sobre $[a, b]$ y tiene la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ tal que $0 < \beta-\alpha < \delta$ implica*

$$|F([\alpha, \beta])-f(\beta')| < \varepsilon$$

para algún $\beta' \in [\alpha, \beta]$, entonces

$$\lim_{|P|\to 0} S(F, P) = \int_a^b f.$$

PRUEBA. Sea $G([\alpha, \beta]) = f(\beta')$. Según el teorema 9.2 y las hipótesis de este teorema, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ hay un $\delta_1 > 0$ y un $\delta_2 > 0$ tales que $|P| < \delta_1$ implica

$$|S(G, P) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y $0 < \beta-\alpha < \delta_2$ implica

$$|F([\alpha, \beta])-G([\alpha, \beta])| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Por lo tanto $|P| < \delta_2$ implica

$$\begin{aligned}|S(F, P)-S(G, P)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} [F([x_{i-1}, x_i])-G([x_{i-1}, x_i])]\,(x_i-x_{i-1})\right| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |F([x_{i-1}, x_i])-G([x_{i-1}, x_i])|\,(x_i-x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_i-x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

De donde, eligiendo $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$, vemos que $|P| < \delta$ implica

$$\begin{aligned}|S(F, P) - \int_a^b f| &= |S(F, P)-S(G, P)+S(G, P) - \int_a^b f| \\ &\leqslant |S(F, P)-S(G, P)|+|S(G, P) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\lim_{|P|\to 0} S(F, P) = \int_a^b f.$$

Hay un número bastante crecido de casos particulares de este teorema que pueden ser identificados. Tres de los más importantes de ellos se enumeran en el siguiente teorema.

9.4 Teorema. *Sean f y g funciones continuas sobre* $[a, b]$.

a) Si

$$F([\alpha, \beta]) = f(\beta') + g(\beta'')$$

para todo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ $(\alpha < \beta)$ *y algunos* $\beta', \beta'' \in [\alpha, \beta]$, *entonces*

$$\lim_{|P| \to 0} S(F, P) = \int_a^b (f+g).$$

b) Si

$$F([\alpha, \beta]) = f(\beta')\, g(\beta'')$$

para todo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ $(\alpha < \beta)$ *y algunos* $\beta', \beta'' \in [\alpha, \beta]$, *entonces*

$$\lim_{|P| \to 0} S(F, P) = \int_a^b fg.$$

c) Si

$$F([\alpha, \beta]) = \sqrt{f^2(\beta') + g^2(\beta'')}$$

para todo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ $(\alpha < \beta)$ *y algunos* $\beta', \beta'' \in [\alpha, \beta]$, *entonces*

$$\lim_{|P| \to 0} S(F, P) = \int_a^b \sqrt{f^2 + g^2}.$$

PRUEBA

a) La continuidad de g sobre $[a, b]$ implica que g es uniformemente continua sobre $[a, b]$. Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|x'' - x'| < \delta$ implica

$$|g(x'') - g(x')| < \varepsilon$$

para todo $x', x'' \in [a, b]$.

De acuerdo con nuestra hipótesis sobre F vemos, por tanto, que $0 < \beta - \alpha < \delta$ implica

$$\begin{aligned} |F([\alpha, \beta]) - [f+g](\beta')| &= |F([\alpha, \beta]) - [f(\beta') + g(\beta')]| \\ &= |g(\beta'') - g(\beta')| < \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ y algún $\beta', \beta'' \in [\alpha, \beta]$. De donde, por el teorema 9.3,

$$\lim_{|P| \to 0} S(F, P) = \int_a^b (f+g).$$

b) Aquí usamos el hecho de que la continuidad sobre $[a, b]$ implica que f es acotada sobre $[a, b]$ y g es uniformemente continua sobre $[a, b]$. Por tanto, para algún $K > 0$

$$|f(x)| < K \text{ para toda } x \in [a, b],$$

y para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|x''-x'| < \delta$ implica

$$|g(x'')-g(x')| < \frac{\varepsilon}{K}$$

para $x', x'' \in [a, b]$ cualesquiera. Por tanto, $0 < \beta-\alpha < \delta$ implica

$$|F([\alpha, \beta])-[fg](\beta')| \doteq |F([\alpha, \beta])-f(\beta')g(\beta')|$$

$$= |f(\beta')|\,|g(\beta'')-g(\beta')| < K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

para todo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ y algunos $\beta', \beta'' \in [\alpha, \beta]$. Como la continuidad de f y g sobre $[a, b]$ implica que fg es continua sobre $[a, b]$, se sigue del teorema 9.3 que

$$\lim_{|P|\to 0} S(F, P) = \int_a^b fg\,.$$

c) Como g es continua sobre $[a, b]$, g^2 es continua sobre $[a, b]$ y es, por tanto, uniformemente continua sobre $[a, b]$. De donde, para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|x''-x'| < \delta$ implica

$$|g^2(x'')-g^2(x')| < \varepsilon^2 \text{ para } x', x'' \in [a, b] \text{ cualesquiera.}$$

Necesitamos, también la desigualdad

$$\big||y|-|z|\big| \leqslant \sqrt{|y^2-z^2|},$$

para $y, z \in \mathrm{R}$ cualesquiera. Como

$$y^2-2|y|\,|z|+z^2 \leqslant y^2-2z^2+z^2 = y^2-z^2, \quad \text{si} \quad |y| \geqslant |z|$$

y

$$y^2-2|y|\,|z|+z^2 \leqslant y^2-2y^2+z^2 = z^2-y^2, \quad \text{si} \quad |z| > |y|,$$

se sigue que

$$(|y|-|z|)^2 \leqslant |y^2-z^2|.$$

De donde

$$\big||y|-|z|\big| \leqslant \sqrt{|y^2-z^2|}.$$

Usando esta desigualdad, obtenemos cuando $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ y $0 < \beta < \alpha < \delta$ que

$$|F([\alpha, \beta])-\sqrt{f^2(\beta')+g^2(\beta')}| = |\sqrt{f^2(\beta')+g^2(\beta'')} - \sqrt{f^2(\beta')+g^2(\beta')}|$$

$$\leqslant \sqrt{|g^2(\beta'')-g^2(\beta')|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Como $I^{1/2}$ es continua sobre $[0, \infty\rangle$ y f y g son continuas sobre $[a, b]$, $I^{1/2} \circ (f^2+g^2) = \sqrt{f^2+g^2}$ es continua sobre $[a, b]$. Por tanto, por el teorema 9.3

$$\lim_{|P|\to 0} S(F, P) = \int_a^b \sqrt{f^2+g^2}.$$

Esto completa la prueba.

Los resultados del anterior teorema son algunas veces expresados en la forma

9.4a′ $$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i')+g(x_i'')] (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b (f+g),$$

9.4b′ $$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i')\, g(x_i'')\, (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b fg,$$

y

9.4c′ $$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f^2(x_i')+g^2(x_i'')}\, (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \sqrt{f^2+g^2},$$

para $x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$. Se entiende que $P = \{x_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ es una partición de $[a, b]$.

En el siguiente ejemplo usamos el teorema 9.4b para derivar otra fórmula para el volumen de un sólido de revolución. El método aquí usado se llama "método de capas".

9.5 Ejemplo. Sea V el volumen del sólido de revolución obtenido por el giro de la región bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje Y. Si f es continua y no negativa sobre $[a, b]$ y si $b > a \geqslant 0$, demuéstrese que

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

SOLUCIÓN. (Figura 14.) Sea $P = \{x_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ una partición de $[a, b]$. Sean $f(x_i')$ y $f(x_i'')$ los valores mínimo y máximo, respectivamente, de f sobre $[x_{i-1}, x_i]$. La continuidad de f sobre $[x_{i-1}, x_i]$ nos asegura que existen puntos tales como los x_i' y x_i'' en $[x_{i-1}, x_i]$. Sea V_i el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región bajo la gráfica de f entre $x = x_{i-1}$ y $x = x_i$ alrededor del eje Y. Entonces

$$(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2)\, f(x_i') \leqslant V_i \leqslant (\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2)\, f(x_i''),$$

y

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}(x_i + x_{i-1})\, f(x_i')\, (x_i - x_{i-1})$$
$$\leqslant V \leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}(x_i + x_{i-1})\, f(x_i'')\, (x_i - x_{i-1}).$$

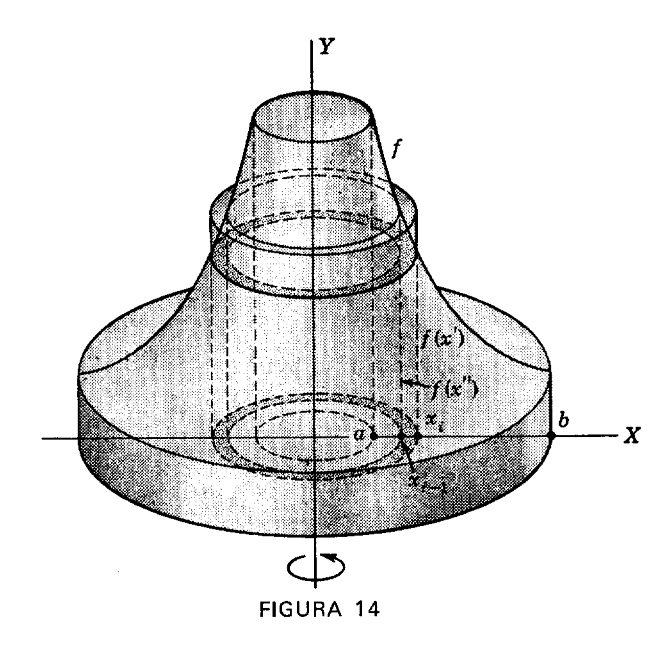


FIGURA 14

Tomando $g = I$ en el teorema 9.4b encontramos, como

$$\tfrac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) \in [x_{i-1}, x_i]$$

que el límite tanto del primer miembro como del último de la anterior desigualdad es $2\pi \int_a^b xf(x)dx$. Por tanto, haciendo que $|P| \to 0$, obtenemos

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx\,.$$

Si en el ejemplo 9.5 el eje de revolución es la recta $x = c$, $c \notin \langle a, b\rangle$, entonces, por una simple extensión del anterior argumento (problema 6),

$$V = 2\pi \int_a^b |c-x|\, f(x)\,dx\,.$$

Como un medio para recordar esto, puede pensarse en $|c-x|$ como si fuera el radio de una delgada capa cilíndrica cuya altura es $f(x)$ y cuyo grueso es dx. El volumen de esta delgada capa o cápsula cilíndrica es aproximadamente $2\pi|c-x|f(x)dx$. El ejemplo siguiente ilustra el método de las capas. Compárese esta solución con la solución del mismo problema en el ejemplo 8.3 (pág. 623).

9.6 Ejemplo. Sea $\mathcal{C}$ el arco de la parábola $y = x^2$, $x \in [0, 1]$. Encuéntrese el volumen V del sólido de revolución obtenido al hacer girar el arco parabólico $\mathcal{C}$ alrededor de la recta $x = 1$.

SOLUCIÓN. (Figura 15.) Por el método de las capas obtenemos

$$V = 2\pi \int_0^1 |1-x|x^2\,dx = 2\pi \int_0^1 (1-x)x^2\,dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

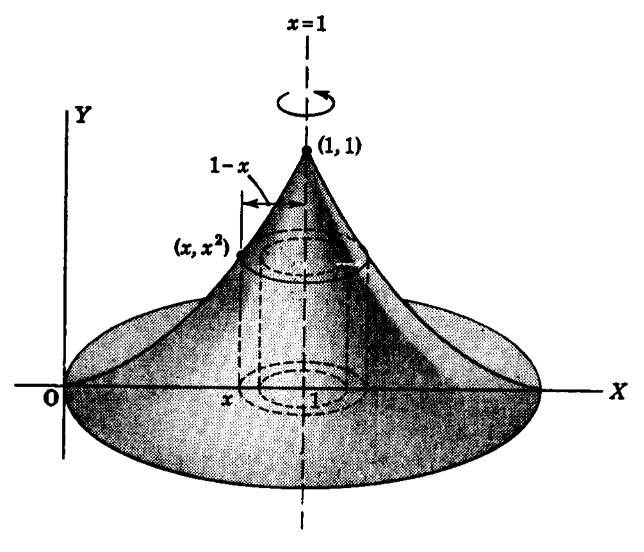


FIGURA 15

El propósito del siguiente ejemplo es completar la discusión de los sólidos cuyo volumen puede expresarse como una integral (unidimensional). Este ejemplo ilustra una vez más el método de acotar la magnitud a medir con sumas superiores e inferiores. Se supone aquí que conocemos i) que el volumen del cilindro[1] es el área de la base por la altura, y que ii) si para cada altura el área de la correspondiente sección transversal de un sólido es menor que o igual a la de otro sólido, entonces el volumen del primer sólido es menor que o igual al del segundo sólido.

9.7 Ejemplo. Consideremos un sólido en el que el área de cada sección transversal perpendicular a una recta dada es conocida. Sea h la altura del sólido medida a lo largo de esta recta y sea $A(z)$ el área de la sección

[1] Solamente necesitamos suponer la validez de esta fórmula para cilindros rectos; es decir, para sólidos generados moviendo una región plana (la base) verticalmente —con cada punto moviéndose a lo largo de una recta perpendicular a la base.

transversal a la altura z. Demuéstrese que si A es integrable sobre $[0, h]$, el volumen V del sólido es

$$V = \int_0^h A(z)\,dx.$$

SOLUCIÓN. (Figura 16.) Sea $P = \{z_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ una partición de $[0, h]$.

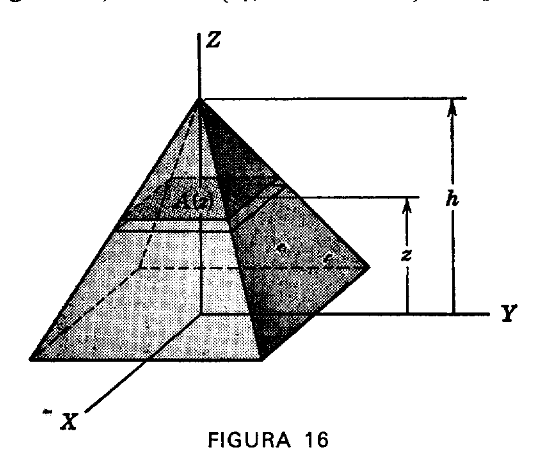


FIGURA 16

Sea V_i el volumen del sólido entre $z = z_{i-1}$ y $z = z_i$. Sea

$$m_i(A) = \text{ínf}\,\{A(z) \mid z \in [z_{i-1}, z_i]\}.$$

Sea $M_i(A)$ el correspondiente supremo. Entonces

$$m_i(A)\,(z_i - z_{i-1}) \leqslant V_i \leqslant M_i(A)\,(z_i - z_{i-1}).$$

Sumando sobre todos los subintervalos de P, obtenemos

$$L(A, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(A)\,(z_i - z_{i-1}) \leqslant V \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(A)\,(z_i - z_{i-1}) = U(A, P),$$

y de aquí

$$\underline{\int_0^h} A \leqslant V \leqslant \overline{\int_0^h} A.$$

Como supusimos que A es integrable sobre $[0, h]$,

$$V = \int_0^h A.$$

Problemas

1. Exprésense cada uno de los siguientes límites como una integral definida ($P = \{x_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ es una partición de $[a, b]$). Determínese el límite de la suma por evaluación de la integral.

a) $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)(x_i-x_{i-1})$; $[a, b] = [0, \pi]$

b) $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi(1-x_i-x_{i-1})\, x_i^2\, (x_i-x_{i-1})$; $[a, b] = [0, 1]$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right](b-a)$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[a + \frac{i-1}{n}(b-a)\right]\left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right](b-a)$

e) $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i-x_{i-1})^2$.

2. Exprésese cada uno de los siguientes límites como una integral definida. En las partes *a*), *b*), y *c*) evalúese la integral por determinación del límite de la suma.

a) $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - x_{i-1}^2)$

b) $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 - x_{i-1}^3)$

c) $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{sen} x_i - \operatorname{sen} x_{i-1})$.

Sugerencia. Úsese el teorema del valor medio para derivadas.

d) $\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(\cos x_i - \cos x_{i-1})^2}$; $[a, b] = [0, \pi]$.

3. Subdividamos $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud. Sea f una función continua sobre $[a, b]$ y sea y_i el valor de f en el punto medio del subintervalo i-ésimo. La cantidad

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i$$

es la media aritmética de estos n valores de la función. Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

4. Demuéstrese que

$$\lim_{|P|\to 0} S(F, P) = l \quad \text{y} \quad m \leqslant S(F, P) \leqslant n$$

para todas las particiones P de $[a, b]$ implica $m \leqslant 1 \leqslant n$.

5. Demuéstrese que

a) $\lim_{|P|\to 0} S(F, P) = l$ y $\lim_{|P|\to 0} S(G, P) = m$ implica

$$\lim_{|P|\to 0} [S(F, P)+S(G, P)] = l+m\,.$$

b) El teorema 9.4a es una consecuencia de parte de este problema y el teorema 9.2.

6. Extiéndase el ejemplo 9.5 al caso en que el eje de revolución es la recta $x = c$, $c \notin \langle a, b\rangle$, y demuéstrese que

$$V = 2\pi \int_a^b |c-x|\, f(x)\, dx\,.$$

7. Derívese la fórmula para el volumen de la esfera por el método de las capas.

8. ¿Cuál es el volumen del sólido obtenido haciendo girar alrededor de la recta $x = 2$ la región del primer cuadrante acotada por $4y = x^2$, $x = 0$, $y = 1$?

9. ¿Cuál es el volumen del sólido obtenido haciendo girar alrededor de la recta $y = 1$ la región limitada por $y = 1$, $x = 3$, $y = x^{3/2}$?

10. La región limitada por $y = 4x^2$ y $y = 2x$ se hace girar alrededor de las rectas abajo dadas. Encuéntrese en cada caso el volumen del sólido generado

a) eje X *b*) eje Y *c*) $x = 2$
d) $y = 2$ *e*) $x = -4$ *f*) $y = -4$.

11. Un sólido tiene una base circular de 12 pulgadas de radio con un cierto diámetro PQ. ¿Cuál es el volumen del sólido si toda sección ortogonal a PQ es

a) un cuadrado? *b*) un triángulo equilátero?
c) un triángulo rectángulo isósceles con su hipotenusa en el plano de la base?
d) un semicírculo?

12. Se corta una cuña de un madero circular de 90 centímetros de radio por un corte perpendicular al eje del madero y por otro corte que hace con

el primero un ángulo de 60°. Los dos cortes se encuentran en el centro del madero. ¿Cuál es el volumen de la cuña?

13. Un agujero cilíndrico de radio a se taladra, pasando por el centro, en una esfera de radio $2a$. ¿Cuál es el volumen del material quitado?

14. Un toro es el sólido de forma de anillo que se obtiene al hacer girar un círculo alrededor de una recta del plano del círculo que no intersecta al círculo. Demuéstrese que el volumen de un toro es $2\pi^2 Rr^2$, donde r es el radio del círculo y R es la distancia de la recta al centro del círculo.

15. Demuéstrese que el volumen de una pirámide con una base rectangular es un tercio del área de la base por la altura.

10. LA LONGITUD DE CURVAS

Sea $\mathcal{C}$ la curva definida por las ecuaciones paramétricas

10.1 $$\mathcal{C}: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t \in [a, b]. \end{cases}$$

Sea

10.2 $$\mathbf{R}(t) = (f(t), g(t)).$$

$\mathbf{R}(t)$ es el punto de la curva correspondiente al parámetro t. Para cada partición $P = \{t_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ de $[a, b]$, sea

10.3 $$L_P = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{R}(t_i) - \mathbf{R}(t_{i-1})| \,;$$

$$|\mathbf{R}(t_i) - \mathbf{R}(t_{i-1})| = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [g(t_i) - g(t_{i-1})]^2}.$$

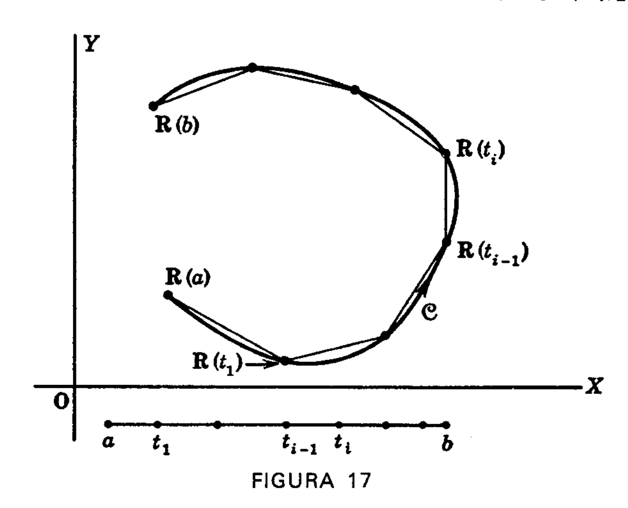


FIGURA 17

El número L_P es la longitud de la poligonal que une los puntos $\mathbf{R}(t_0) = \mathbf{R}(a)$, $\mathbf{R}(t_1), \ldots, \mathbf{R}(t_n) = \mathbf{R}(b)$ de la curva $\mathcal{C}$ (figura 17).

La definición de longitud de la curva $\mathcal{C}$ se basa en dos ideas: 1) una línea recta debe ser la distancia más corta entre dos puntos, 2) tomando particiones P de $[a, b]$ suficientemente finas, debemos poder hacer que L_P, la longitud de la correspondiente aproximación poligonal a la curva $\mathcal{C}$, se aproxime cuanto deseemos a la longitud de $\mathcal{C}$. Así pues, si L es la longitud de $\mathcal{C}$, ha de tenerse que $L_P \leqslant L$ para todas las particiones P de $[a, b]$. Además, como podemos aproximarnos a L tanto como deseemos por L_P, L debe ser el supremo del conjunto $\{L_P | P \in \mathcal{T}\}$. ($\mathcal{T}$ es el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.)

10.4 Definición. *Decimos que la curva* $\mathcal{C}$ *definida por* (10.1) *es* ***rectificable****, si* $\{L_P | P \in \mathcal{T}\}$ *está superiormente acotado. Si* $\mathcal{C}$ *es rectificable, la* ***longitud*** L *de* $\mathcal{C}$ *se define como el supremo de* $\{L_P | P \in \mathcal{T}\}$; *es decir,*

$$L = \sup \{L_P | P \in \mathcal{T}\}.$$

Si f y g tienen derivadas continuas sobre $[a, b]$, la curva $\mathcal{C}$ se dice que es una curva *lisa.* El teorema principal sobre la longitud de las curvas es que las curvas lisas son rectificables y que la longitud de la curva es una cierta integral definida. Como preparación para este teorema observamos primero que

10.5 Lema. *Si* P_1 *es un refinamiento de* P, *entonces* $L_P \leqslant L_{P_1}$.

PRUEBA. Este lema es una simple consecuencia de la desigualdad del triángulo (figura 18). Sea r_k el primer punto de P_1 que no está en P.

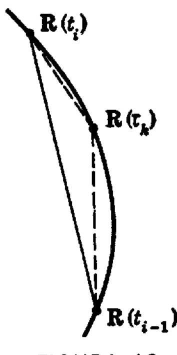


FIGURA 18

Entonces, para algún i, $t_{i-1} < r_k < t_i$ y

$$|\mathbf{R}(t_i) - \mathbf{R}(t_{i-1})| = |\mathbf{R}(t_i) - \mathbf{R}(\tau_k) + \mathbf{R}(\tau_k) - \mathbf{R}(t_{i-1})|$$
$$\leqslant |\mathbf{R}(t_i) - \mathbf{R}(\tau_k)| + |\mathbf{R}(\tau_k) - \mathbf{R}(t_{i-1})|.$$

Por un número finito de tales pasos podemos añadir todos los puntos de P_1 a P y obtener $L_P \leqslant L_{P_1}$.

10.6 Teorema. *Si f y g tienen derivadas continuas sobre* $[a, b]$, *entonces la curva* $\mathcal{C}$ *definida por* (10.1) *es rectificable y*

$$L = \int_a^b \sqrt{(f')^2+(g')^2}\,.$$

Prueba. Por el teorema del valor medio para derivadas,

$$f(t_i)-f(t_{i-1}) = f'(t_i')\,(t_i-t_{i-1})$$

y

$$g(t_i)-g(t_{i-1}) = g'(t_i'')\,(t_i-t_{i-1})$$

para algunos t_i', $t_i'' \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$. Por tanto

$$L_P = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{R}(t_i)-\mathbf{R}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2+[g(t_i)-g(t_{i-1})]^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i')]^2+[g'(t_i'')]^2}\,(t_i-t_{i-1})\,.$$

Como f' y g' son continuas sobre $[a, b]$, están acotadas sobre $[a, b]$. Sea $|f'(t)| \leqslant K$ y $|g'(t)| \leqslant M$ para todo $t \in [a, b]$. De donde

$$L_P \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{K^2+M^2}\,(t_i-t_{i-1}) = (b-a)\sqrt{K^2+M^2}$$

para toda partición P de $[a, b]$. Por tanto, $\{L_P \mid P \in \mathcal{P}\}$ es acotada superiormente y $\mathcal{C}$ es rectificable.

Nos queda por probar que

$$L = \int_a^b \sqrt{(f')^2+(g')^2}\,.$$

Por el teorema 9.4*c* sabemos que

$$\lim_{|P|\to 0} L_P = \int_a^b \sqrt{(f')^2+(g')^2}\,.$$

Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta$ implica

$$\left|L_P - \int_a^b \sqrt{(f')^2+(g')^2}\right| < \varepsilon\,.$$

Además, como L es el supremo de $\{L_P | P \in \mathcal{P}\}$, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P_1 de $[a, b]$ tal que

$$0 \leqslant L - L_{P_1} < \varepsilon.$$

Elijamos P con $|P| < \delta$, y sea $P_2 = P \cup P_1$. Como P_2 es un refinamiento de P, $|P_2| \leqslant |P| < \delta$. De donde

$$|L_{P_2} - \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}| < \varepsilon,$$

y por el lema 10.5, como P_2 es también un refinamiento de P_1,

$$0 \leqslant L - L_{P_2} \leqslant L - L_{P_1} < \varepsilon.$$

Por tanto

$$|L - \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}| \leqslant |L - L_{P_2}| + |L_{P_2} - \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}| < 2\varepsilon.$$

Esta desigualdad se verifica para todo $\varepsilon > 0$, de donde se sigue que

$$L = \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2}.$$

Esto completa la prueba.

La fórmula para la longitud de

$$\mathcal{C}: \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t \in [a, b] \end{array}$$

se escribe a menudo en la siguiente forma:

10.7 $$L = \int_a^b \sqrt{(D_t x)^2 + (D_t y)^2}\, dt.$$

Si definimos

$$\mathbf{R}'(t) = (f'(t), g'(t)),$$

La fórmula se hace

10.8 $$L = \int_a^b |\mathbf{R}'(t)|\, dt.$$

Cuando avancemos un poco más en análisis veremos que el vector $\mathbf{R}'(t)$ es un *vector tangente* a la curva en el punto $\mathbf{R}(t)$.

Antes de ilustrar unas pocas aplicaciones del anterior teorema examinemos dos casos especiales. El primero de éstos es cuando $\mathcal{C}$ es la gráfica rectangular sobre $[a, b]$ de una función f. La curva $\mathcal{C}$ es, entonces, la gráfica de la ecuación

$$\mathcal{C}: \quad y = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Las ecuaciones paramétricas para $\mathcal{C}$ son

$$\mathcal{C}: \begin{array}{l} x = t \\ y = f(t), \quad t \in [a, b]. \end{array}$$

Si f tiene una derivada continua sobre $[a, b]$, entonces, por el teorema 10.6, la longitud L de $\mathcal{C}$ desde $x = a$ hasta $x = b$ es

10.9 $$L = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2},$$

lo que podemos también expresar en la forma

10.10 $$L = \int_a^b \sqrt{1+(D_x y)^2}\, dx.$$

El otro caso especial es cuando $\mathcal{C}$ es la gráfica polar de una función F sobre $[a, b]$. La curva $\mathcal{C}$ es la gráfica polar de la ecuación

$$\mathcal{C}: \quad r = F(\theta), \quad \theta \in [a, b].$$

Las ecuaciones paramétricas para $\mathcal{C}$ son

$$\mathcal{C}: \begin{array}{l} x = F(\theta) \cos \theta \\ y = F(\theta) \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in [a, b]. \end{array}$$

Tenemos aquí

$$D_\theta x = F'(\theta) \cos \theta - F(\theta) \operatorname{sen} \theta$$

$$D_\theta y = F'(\theta) \operatorname{sen} \theta + F(\theta) \cos \theta$$

y

$$(D_\theta x)^2 + (D_\theta y)^2 = [F'(\theta)]^2 + [F(\theta)]^2.$$

Por tanto, si F tiene derivada continua sobre $[a, b]$, tenemos, por el teorema 10.6, que

10.11 $$L = \int_a^b \sqrt{F^2 + F'^2},$$

lo que podemos expresar en la forma

10.12 $$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + (D_\theta r)^2}\, d\theta.$$

La ventaja de las notaciones usadas en (10.7), (10.10) y (10.12) es que hay el acuerdo general de que la notación misma indica cómo la curva está siendo representada analíticamente. Las ecuaciones (10.10) y (10.12) son, desde luego, casos particulares de (10.7).

10.13 Ejemplo. La circunferencia $\mathcal{C}$ de radio $a\,(a > 0)$ y centro en el origen tiene las siguientes representaciones analíticas:

1) $$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\operatorname{sen}\theta, \quad \theta\in[0, 2\pi] \end{cases}$$

2) $$r = a$$

3) $$x^2+y^2 = a^2.$$

Determínese, partiendo de cada una de estas representaciones analíticas de la circunferencia $\mathcal{C}$, la longitud de $\mathcal{C}$.

Solución 1.

$$D_\theta x = -a\operatorname{sen}\theta$$

$$D_\theta y = a\cos\theta$$

$$(D_\theta x)^2+(D_\theta y)^2 = a^2.$$

Por tanto

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2} = 2\pi a.$$

Solución 2. $D_\theta r = 0$. Por tanto

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2+(D_\theta r)^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2} = 2\pi a.$$

Solución 3. Por la tercera representación analítica, sabemos que la semicircunferencia superior tiene la ecuación

$$y = \sqrt{a^2-x^2}$$

$$D_x y = -x/\sqrt{a^2-x^2}$$

$$1+(D_x y)^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2}.$$

La derivada no es continua en los puntos extremos $x = -a$ y $x = a$. Puede demostrarse, sin embargo, que la integral impropia

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{1+(D_x y)^2 dx} = \int_{-a}^{a} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

converge y es la longitud de la semicircunferencia.

Nota. Por cualquiera de las representaciones analíticas anteriores 1) o 2) puede verse que la longitud $s(u)$ del arco de circunferencia que va de $\theta = 0$ a $\theta = u$, es

10.14 $$s(u) = \int_0^u a = au.$$

Como no hemos dado una definición de las funciones seno y coseno que sea independiente de la longitud de los arcos de circunferencia, esto no es una prueba de (10.14.) Indudablemente, esto sería un razonamiento circular. La integral en la solución 3 proporciona un medio de calcular el número π y, por tanto, de computar la longitud de los arcos de circunferencia. Esta integral puede usarse para definir las funciones circulares inversas arcsen y arccos, y ésta es una forma de llegar a una definición de las funciones seno y coseno. [Cuando avancemos más en análisis podremos completar la discusión de las funciones circulares demostrando la existencia de un par de funciones x y y que satisfacen las ecuaciones diferenciales

10.15 $$x' = y \quad \text{y} \quad y' = -x$$

y las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $y(0) = 1$.]

10.16 Ejemplo. Sea

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$$

el radio vector que indica la posición de una partícula en el instante t. El vector

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t))$$

se llama *velocidad* de la partícula en el instante t. La longitud $|\mathbf{v}(t)|$ de la velocidad $\mathbf{v}(t)$ se llama *velocidad lineal* $v(t)$ de la partícula en el instante t; $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$. Demuéstrese que la velocidad lineal es la razón entre la distancia que la partícula ha recorrido y el tiempo.

SOLUCIÓN. La trayectoria de la partícula viene dada por

$$x = f(t)$$
$$y = g(t).$$

Denotemos por $s(t)$ la distancia que la partícula ha recorrido en el intervalo de tiempo $[0, t]$. Entonces, en la hipótesis de que f' y g' son continuas,

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(f')^2 + (g')^2}$$

Por el primer teorema fundamental del cálculo

10.17 $$D_t s(t) = s'(t) = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} = |\mathbf{v}(t)| = v(t).$$

Nótese también que hemos demostrado que

10.18 $$s(t) = \int_0^t v.$$

La distancia viajada puede obtenerse integrando la velocidad lineal.[1]

10.19 Ejemplo. Determínese la longitud de la curva

$$\mathcal{C}: \quad y^3 = x^2$$

desde $(-1, 1)$ a $(2\sqrt{2}, 2)$.

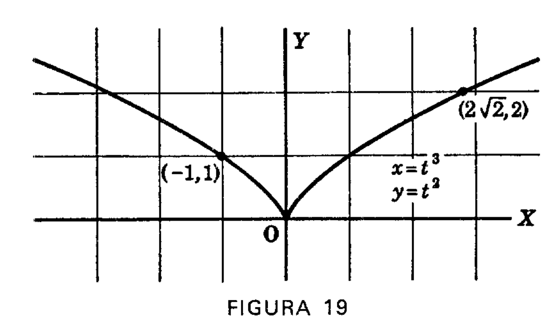


FIGURA 19

SOLUCIÓN. (Figura 19.) La ecuación

$$y = x^{2/3}$$

es también una ecuación de $\mathcal{C}$, y $\mathcal{C}$ es la gráfica de la función $I^{2/3}$.

$$D_x y = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$

y

$$L = \int_{-1}^{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \tfrac{4}{9}x^{-2/3}}\, dx.$$

Esta es una integral impropia, y sugiere que deberíamos intentar encontrar una representación analítica mejor de $\mathcal{C}$. Haciendo $x = t^3$, vemos que $y = t^2$; es decir, todo punto de $\mathcal{C}$ está sobre la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = t^3$$
$$y = t^2, \quad t \in \langle -\infty, \infty \rangle.$$

[1] En algunas traducciones recientes aparece el término "rapidez" por "velocidad lineal". Hemos empleado esta última expresión por creer que su uso es más general y más tradicional. [N. del T.]

Recíprocamente, todo punto $(x, y) = (t^3, t^2)$ dado por estas ecuaciones paramétricas satisface $y^3 = x^2$ y está sobre $\mathcal{C}$. Por tanto, éstas son ecuaciones paramétricas de $\mathcal{C}$. El valor $t = -1$ corresponde al punto $(-1, 1)$ y $t = \sqrt{2}$ corresponde a $(2\sqrt{2}, 2)$. Luego

$$L = \int_{-1}^{\sqrt{2}} \sqrt{(3t^2)^2+(2t)^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{9t^4+4t^2}\, dt + \int_{1}^{\sqrt{2}} \sqrt{9t^4+4t^2}\, dt.$$

Como el integrando es una función par, obtenemos

$$L = 2\int_0^1 \sqrt{9t^4+4t^2}\, dt + \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{9t^4+4t^2}\, dt.$$

Para $t \geqslant 0$

$$\sqrt{9t^4+4t^2} = t\sqrt{9t^2+4} = \tfrac{1}{18}\sqrt{9t^2+4}\, D_t(9t^2+4)$$
$$= \tfrac{1}{27} D_t(9t^2+4)^{3/2}.$$

De donde

$$L = \tfrac{2}{27}(9t^2+4)^{3/2}\Big]_0^1 + \tfrac{1}{27}(9t^2+4)^{3/2}\Big]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= \tfrac{2}{27}\cdot 13^{3/2} - \tfrac{2}{27}\cdot 4^{3/2} + \tfrac{1}{27}\cdot 22^{3/2} - \tfrac{1}{27}\cdot 13^{3/2}$$
$$= \tfrac{1}{27}(13^{3/2}+22^{3/2}-16).$$

Nota. El uso hecho en el anterior ejemplo de la simetría de la curva con respecto al eje Y evita la necesidad de hacer notar que

$$\sqrt{9t^4+4t^2} = -t\sqrt{9t^2+4} = -\tfrac{1}{27} D_t(9t^2+4)^{3/2} \text{ cuando } t \leqslant 0.$$

Problemas

1. Hágase el bosquejo y determínese la longitud de cada una de las siguientes curvas:

a) $x = 5t-2$, $y = 2t+8$ desde $t = 1$ hasta $t = 5$.

b) $x = \sqrt{t}$, $y = \dfrac{t^2}{8} + \dfrac{1}{4t}$ desde $t = 1$ hasta $t = 3$.

c) $y = 2x^{3/2}$ desde $x = 0$ hasta $x = 11$.

d) $y^3-8x^2 = 0$ desde $(-1, 2)$ hasta $(27, 18)$.

e) $r = 1 + \cos\theta$.

f) $r = 2\theta^2$ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$.

g) $r = a \operatorname{sen}^3 \dfrac{\theta}{3}$.

h) Un arco de la cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.

2. Exprésese la longitud de cada una de las siguientes curvas como una integral definida:

a) Un arco de la gráfica de la función seno.
b) Una elipse de eje mayor 8 y eje menor 4.
c) Un rizo de $r = \operatorname{sen} 2\theta$.

d) $y = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ desde $x = \frac{1}{2}$ hasta $x = 2$.

e) La longitud de la sección cónica

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}$$

desde el vértice hasta el punto correspondiente a $\theta = \pi/2$.

3. *a*) Demuéstrese que la longitud de la elipse

$$x = a \operatorname{sen} u$$
$$y = b \cos u, \quad 0 < b \leqslant a$$

es

$$4a \int_0^{\pi/2} (1 - e^2 \operatorname{sen}^2)^{1/2},$$

donde $e = \left(1 - \dfrac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$ es la excentricidad de la elipse. Ésta es una integral elíptica de segunda clase.

b) Usando tablas de la integral elíptica determínese la longitud de la elipse con eje mayor $2a$ y $e = 0$, 0.05, 0.10, 0.30, 0.75, 0.99.

4. Sea $\mathcal{C}$ la curva cuyas ecuaciones paramétricas en coordenadas polares son

$$r = \eta(t)$$
$$\theta = \varphi(t), \quad t \in [a, b].$$

Suponiendo que η y φ tengan derivadas continuas sobre $[a, b]$, demuéstrese que la longitud L de $\mathcal{C}$ es

$$L = \int_a^b \sqrt{\eta'^2 + \eta^2 \varphi'^2} = \int_a^b \sqrt{[D_t r]^2 + r^2 [D_t \theta]^2}\, dt.$$

5. Hágase el bosquejo y determínese la longitud de cada una de las siguientes curvas.

a) $r = t^2$, $\theta = 2t$ desde $t = -\pi/4$ hasta $t = \pi/2$.

b) $r = t^3$, $\theta = \pi t^2$ desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

c) $r = \text{sen } t$, $\theta = \text{sen } t$.

6. Una partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = \frac{-a}{200}x^2 + x$. El componente horizontal de su velocidad es una constante. Al tiempo $t = 0$ la partícula está en el origen y su velocidad inicial es $10(1, 1)$ pies por segundo.

a) Determínese la velocidad y la aceleración de la partícula. Si $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$, la aceleración de la partícula es $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{v}'(t) = (f''(t), g''(t))$.

b) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en su máxima altura ($a > 0$)?

c) ¿Cuándo alcanza la partícula el eje X?

d) Demuéstrese que, recíprocamente, si la aceleración de la partícula es $(0, -a)$, si la posición inicial de la partícula es el origen y si la velocidad inicial de la partícula es $10(1, 1)$, entonces, la partícula se mueve a lo largo de la parábola

$$y = -\frac{a}{200}x^2 + x.$$

7. Sea $\eta(t)$ la distancia de la partícula al origen en el instante t, y sea $\varphi(t)$ el ángulo de inclinación del radio vector $\mathbf{r}(t)$ que sitúa la partícula en el instante t; es decir, $r = \eta(t)$, $\theta = \varphi(t)$, y

$$\mathbf{r}(t) = \eta(t)(\cos \varphi(t), \text{sen } \varphi(t)).$$

Supongamos que la partícula no pasa por el origen ($\eta(t) > 0$ para todo t en R). Demuéstrese que:

a) La velocidad de la partícula en el tiempo t es

$$\mathbf{v}(t) = \eta'(t)(\cos \varphi(t), \text{sen } \varphi(t)) + \eta(t)\varphi'(t)(\cos \varphi(t), \text{sen } \varphi(t))^{\perp}.$$

b) La velocidad lineal de la partícula en el tiempo t es

$$v(t) = \sqrt{[\eta'(t)]^2 + \eta^2(t)[\varphi'(t)]^2}.$$

c) La componente de la velocidad en el tiempo t en la dirección $r(t)$ es $\eta'(t) = D_t r$. (Esta componente de la velocidad se llama *componente radial*.)

d) La componente de la velocidad en la dirección $[\mathbf{r}(t)]^{\perp}$ es $\eta'(t)\varphi'(t) = rD_t\theta$. [Esta componente de la velocidad se llama la *componente*

transversa; $|\varphi(t)|$ se llama *velocidad angular* de la partícula *alrededor del origen* (radianes/segundo); para un movimiento confinado a un plano $\varphi(t) = D_t\theta$ se llama *velocidad angular alrededor del origen*.]

e) Si la partícula se mueve sobre una circunferencia con centro en el origen, la velocidad es tangente a la circunferencia y la velocidad lineal de la partícula en el instante t es igual al radio de la circunferencia por la velocidad angular alrededor del origen en el instante t.

f) Si $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$, la aceleración de la partícula en el tiempo t es $\mathbf{a}(t) = v'(t) = (f''(t), g''(t))$. Si la partícula se mueve sobre una circunferencia de radio r_0 con velocidad angular uniforme (constante) ω alrededor del centro de la circunferencia, entonces, con una elección apropiada del sistema de coordenadas ω es no negativa y

$$\mathbf{r}(t) = r_0(\cos \omega t, \operatorname{sen} \omega t)$$

$$\mathbf{v}(t) = \omega[\mathbf{r}(t)]^{\perp} = \frac{v_0}{r_0}[\mathbf{r}(t)]^{\perp}$$

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t) = -\frac{v_0^2}{r_0^2}\mathbf{r}(t)$$

$$|\mathbf{a}(t)| = \omega^2 r_0 = \frac{v_0^2}{r_0},$$

donde v_0 es la velocidad lineal de la partícula.

8. El vector de posición de una partícula en el instante t es

$$\mathbf{r}(t) = r_0(\cos t^2, \operatorname{sen} t^2).$$

Determínense

a) La velocidad $\mathbf{v}(t)$ de la partícula.

b) La velocidad lineal $v(t)$ de la partícula.

c) La distancia $s(t)$ que la partícula recorre en el intervalo de tiempo $[0, t]$. (Exprésese como una integral definida.)

d) La velocidad angular $D_t\theta$ de la partícula.

e) El componente radial $D_t r$ de la velocidad.

f) El componente transverso $rD_t\theta$ de la velocidad.

g) La aceleración $a(t)$.

h) El componente normal de la aceleración, donde la normal a la circunferencia está dirigida hacia el centro de la circunferencia.

i) El componente tangencial de la aceleración donde la dirección positiva de la tangente es la de la velocidad.

j) $s''(t) = v'(t)$, la razón de cambio de la velocidad lineal.

Demuéstrese que

k) La componente tangencial de la aceleración es $v'(t)$.

l) La componente normal de la aceleración es $v^2(t)/r_0$.

11. RESUMEN

En este capítulo hemos visto cómo se generalizan conceptos físicos y geométricos y cómo las leyes físicas generales pueden expresarse en términos de la integral y de la derivada. Las aplicaciones se han ilustrado con ejemplos y problemas. Desde luego, las aplicaciones son tan numerosas que sólo podemos discutir unas pocas. Hemos visto también las aplicaciones de la integral al estudio de las ecuaciones diferenciales (por ejemplo, el teorema 5.4).

Hemos introducido la notación de la integral indefinida y hemos estudiado dos importantes métodos de integración. El propósito de estos métodos es el de enseñar a usar las tablas en forma inteligente en la evaluación de las integrales y en el estudio de las funciones definidas por integración. El teorema de sustitución (teorema 7.5) es de importancia práctica y teórica en la transformación de las integrales definidas. En el capítulo 15 se estudiarán más sistemáticamente las técnicas de integración.

Problemas de repaso

1. Determínese el área bajo un arco de la gráfica de sen $\circ(\omega I+\delta)$.

2. Determínese el área de la región limitada por las curvas

$$y = \sqrt{a^2-x^2} \quad \text{y} \quad y = a-\sqrt{a^2-x^2}.$$

3. Demuéstrese que el área de cualquier segmento de una parábola limitado por una cuerda perpendicular al eje de la parábola es igual a dos tercios del área del rectángulo formado por la cuerda, la tangente al vértice, y las dos rectas paralelas al eje que pasan por los extremos de la cuerda.

4. Determínese el área de la región situada en el interior del círculo $r = 3a\cos\theta$ y fuera de la cardioide $r = a(1+\cos\theta)$.

5. Determínese el área limitada por cada una de las siguientes curvas:

a) $r = 4-4\cos\theta$ *b*) $r = 3+\operatorname{sen} 3\theta$

c) $r = \cos 3\theta$ *d*) $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$.

6. Determínese el área de la región situada sobre el arco parabólico

$$x = \operatorname{sen}\theta$$
$$y = \cos 2\theta, \quad \theta\in \mathrm{R}$$

y debajo de la recta $y = 1$.

7. Determínese el área de la región limitada por la hipocicloide

$$x = a\cos^3 t,$$
$$y = a\operatorname{sen}^3 t, \quad t\in[0, 2\pi].$$

8. ¿Cuál es el área de la región limitada por la curva cuya ecuación es $y^2 = x^2(16-x)$?

9. ¿Cuál es el área de la región limitada por el rizo de la curva cuya ecuación es $4y^2 = x^4(4-x)$?

10. ¿Cuál es el trabajo hecho al elevar un bulto que pesa 679.5 kilogramos hasta una distancia de 22.88 metros sobre el suelo si el cable pesa 0.2766 kilogramos por metro y la máquina que hala del cable está a 30.50 metros del suelo?

11. El principio de Arquímedes (287-212 A.C.) nos dice que un cuerpo inmerso en un fluido es impulsado hacia arriba por una fuerza igual al peso del fluido que desplaza. ¿Cuál es el trabajo necesario para sumergir una bola esférica de 500 libras de peso y 10 pies de diámetro en el agua si el peso de ésta es de 62 libras por pie cúbico?

12. La cantidad Q de calor generado por una corriente constante i_0 en una resistencia R en el intervalo de tiempo $[a, b]$ es

$$Q = Ri_0^2(b-a).$$

Discútase la generalización de esta fórmula cuando la corriente es una función del tiempo.

13. Derívese una fórmula para el volumen del sólido obtenido haciendo girar una elipse *a*) alrededor de su eje mayor, *b*) alrededor de su eje menor.

14. La región limitada por $y = \cos x$ y $y = \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$ se hace girar alrededor del eje Y. ¿Cuál es el volumen de este sólido de revolución?

15. ¿Cuál es el volumen del sólido de revolución formado al hacer girar la porción del círculo $x^2+y^2 \leqslant 25$ entre $x = 1$ y $x = 3$ alrededor del eje X?

16. Un sólido tiene una base elíptica con un eje mayor 45.72 centímetros y un eje menor de 20.32 centímetros. ¿Cuál es el volumen del sólido si toda sección transversal perpendicular al eje mayor es *a*) un cuadrado; *b*) un triángulo equilátero?

17. La base de un sólido es un círculo de radio r. Toda sección perpendicular a la base y a un cierto diámetro de la base es un triángulo equilátero. ¿Cuál es el volumen del sólido?

18. Los ejes de dos cilindros, ambos de radio r, se cortan en ángulos rectos. ¿Cuál es el volumen común a los dos cilindros?

19. Un madero cilíndrico es de radio a. Producimos una cuña haciendo un corte perpendicular al eje del madero y un segundo corte que forma

un ángulo α con el primero y que lo intersecta en el centro del leño. ¿Cuál es el volumen de la cuña?

20. Una partícula comienza a moverse en el instante cero y se mueve con una aceleración que es proporcional al tiempo. Después de 9 segundos la aceleración es de 3.048 metros/seg^2. Después de 25 segundos la partícula está a 3 050 metros del punto de partida. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la partícula?

21. ¿Cuál es la solución sobre $\langle -\infty, \infty \rangle$ de

$$y' = |x|^3$$

que satisface $y(0) = 0$?

22. Demuéstrese que

a) $$\int_0^5 \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int_5^{50} \frac{dt}{t}$$

b) $$\int_0^{\pi/2} \cos^n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n$$

c) $$\int_0^{2\pi/\omega} \cos^n \circ(\omega I - \delta) = \frac{1}{\omega}\int_{-\delta}^{2\pi-\delta} \cos^n = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} \cos^n.$$

23. Se impulsa un cohete hasta 200 millas sobre la superficie de la tierra. A esta altura el propelente se termina y el cohete tiene una velocidad de v_0 millas por hora en una dirección radial respecto al centro de la tierra. Discútase —sin tener en cuenta la resistencia del aire— la trayectoria de fase del cohete. (Véase el problema 10, sección 7, pág. 621.) Háganse bosquejos de las trayectorias de fase que ilustren la discusión. El radio de la tierra es aproximadamente de 6 378.39 kilómetros y la aceleración de la gravedad en la superficie de la tierra es aproximadamente de 9 7536 metros/seg^2. Calcúlese cuál es la velocidad mínima en millas por segundo a la que el cohete no vuelve a la tierra.

Sugerencia. $F(x) = -\dfrac{kmM}{r^2}$, donde r es la distancia del cohete al centro de la tierra, m es la masa del cohete, M es la masa de la tierra, y k es una constante de proporcionalidad que depende de cuáles sean las unidades usadas. La cantidad kM puede determinarse por la segunda ley del movimiento de Newton y la información que se tiene. Sea el punto en el infinito el punto de potencial gravitacional cero; es decir, sea

$$U(x) = -W_\infty^x(F) = -kmM\int_x^\infty \frac{dr}{r^2}.$$

Las ecuaciones de las trayectorias de fase son de la forma $y^2 - \frac{b}{x} = c$.

24. Una barra delgada recta tiene una longitud l y una densidad lineal ρ (no necesariamente constante). Un cuerpo esférico homogéneo de masa M se coloca en línea recta con la barra con su centro a una distancia d de uno de los extremos de la barra. Exprésese la fuerza gravitacional entre la barra y la esfera como una integral definida. Dése una justificación razonable de la contestación. (En este problema la esfera puede considerarse como una partícula de masa M localizada en el centro de la esfera. Puede el lector suponer que esto es cierto por hipótesis, pero si es capaz de ello, justifique esta hipótesis.) ¿Cuál es la fuerza gravitacional sobre la barra si ρ es constante?

25. Una partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = -\frac{a}{2v_1^2}x^2 + \frac{v_2}{v_1}x$. La componente horizontal de su velocidad es una constante. En el instante $t = 0$ la partícula está en el origen y la componente horizontal de su velocidad es v_1.

a) ¿Cuál es la velocidad inicial de la partícula?
b) ¿Cuál es la aceleración de la partícula?
c) ¿Cuándo alcanza la partícula su máxima altura? ($a > 0$)
d) ¿Cuándo alcanza la partícula el eje X?
e) Demuéstrese que, recíprocamente, si la aceleración de la partícula es $(0, -a)$, si la posición inicial de la partícula es el origen y si la velocidad inicial de la partícula es (v_1, v_2), entonces la partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = \frac{-a}{2v_1^2}x^2 + \frac{v_2}{v_1}x$.

26. Una partícula se mueve a lo largo de la espiral $r = \frac{2}{\pi}\theta$ con una velocidad angular que es proporcional al tiempo. En el instante $t = 0$ la partícula está en el origen. En el instante $t = 2$ la partícula está en el punto $r = 2/\pi$, $\theta = 1$. Determínese en el instante $t = 10\sqrt{\pi}$.

a) La posición de la partícula.
b) La velocidad de la partícula.
c) La aceleración de la partícula.

Capítulo

$\int e^x dx$ 14

Funciones elementales

1. INTRODUCCIÓN. CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES

En este capítulo nuestro principal propósito es introducir varias nuevas funciones e investigar sus propiedades.

Comenzamos con una clasificación de las funciones reales de variable real. Algunos de los tipos de funciones que abajo mencionamos ya se han definido anteriormente, pero se recuerdan de nuevo.

A) Una *función polinomial* es una función de la forma

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k I^k$$

donde las a_k son funciones constantes. Por ejemplo

$$3I^4+2I^3-3I+5$$

es una función polinomial. Una función polinomial se obtiene verificando un número finito de operaciones de adición y multiplicación sobre la identidad y funciones constantes.

B) Una *función racional* es el cociente de dos funciones polinomiales. Por ejemplo,

$$\frac{2I^2+1}{I+2}$$

es una función racional. Una función racional se obtiene verificando un número finito de operaciones de adición, multiplicación y división sobre la identidad y funciones constantes. Las funciones racionales incluyen las funciones polinomiales como casos especiales.

C) Una *función algebraica simple* es una función que se obtiene verificando un número finito de operaciones de adición, multiplicación, división y extracción de raíces sobre la identidad y funciones constantes. Por ejemplo,

$$\frac{2I^{1/2}+3}{\sqrt{I^2+2}}$$

es una función algebraica simple. Las funciones algebraicas simples incluyen las funciones racionales como casos especiales.

D) Aunque nuestro interés principal respecto a las funciones algebraicas se circunscribe a las funciones algebraicas simples, señalaremos, para ser completos en nuestra clasificación, que una ecuación de la forma

$$y^n+R_1(x)y^{n-1}+R_2(x)y^{n-2}+\ldots+R_{n-1}(x)y+R_n(x) = 0,$$

donde $R_1, \ldots, R_n$ son funciones racionales, se dice que define, como sus soluciones, *funciones algebraicas*. Estas funciones algebraicas más generales incluyen las funciones algebraicas simples como casos especiales.

E) Una función que no es algebraica, se dice que es *trascendente*. No siempre es fácil probar que una función dada es trascendente. En este capítulo nos ocuparemos de aquellas funciones trascendentes a las que a menudo se hace referencia como funciones trascendentes "elementales". Incluyen las trigonométricas, las trigonométricas inversas, las logarítmicas, las funciones exponenciales y ciertas combinaciones de funciones exponenciales. Las funciones elementales trascendentes que no hayamos definido previamente serán definidas en este capítulo.

2. FUNCIONES INVERSAS

Varias de las funciones que se definen en este capítulo se definen como inversas de funciones ya conocidas. Recuérdese que una función es un

conjunto de pares ordenados tal que no existen pares distintos con un mismo primer elemento. Si una función es univalente, es decir, si tiene la propiedad adicional de que no hay pares distintos con el mismo segundo elemento, entonces la función tiene una función inversa. La función inversa se obtiene intercambiando los primeros y segundos elementos en los pares ordenados de la función original. Así pues, el dominio de la función original se convierte en el rango de la función inversa y el rango de la función original se convierte en el dominio de la función inversa. En esta sección investigaremos los problemas de la continuidad y la diferenciabilidad de las funciones inversas.

2.1 Teorema. *Si f es una función creciente (decreciente), entonces f es univalente y tiene una inversa f^*. La función f^* es también creciente (decreciente).*

PRUEBA. Desarrollamos la prueba para f creciente. La prueba para f decreciente se sigue del resultado para f creciente reemplazando f por $-f$.

Para probar que f es univalente debemos demostrar que si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$. Hacemos esto demostrando que si $x_1, x_2 \in \mathfrak{D}_f$, y $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si $x_1 \neq x_2$ entonces $x_1 < x_2$ o $x_2 < x_1$. De donde, como f es una función creciente, $f(x_1) < f(x_2)$ o $f(x_2) < f(x_1)$. Es decir, $x_1 \neq x_2$ implica $f(x_1) \neq f(x_2)$ y, por lo tanto, f es univalente.

Como f es univalente, tiene una inversa f^*. Pasamos a demostrar que f^* es una función creciente. Tómense $y_1, y_2 \in \mathfrak{D}_f = \mathfrak{R}_{f^*}$ tales que $y_1 < y_2$. Si $f^*(y_1) \geqslant f^*(y_2)$, entonces $y_1 = f(f^*(y_1)) \geqslant f(f^*(y_2)) = y_2$. Por tanto, $y_1 \leqslant y_2$ implica $f^*(y_1) < f^*(y_2)$, es decir, f^* es una función creciente. Lo que completa la prueba.

En la prueba de los teoremas relativos a la continuidad y diferenciabilidad de la función inversa, hacemos uso del resultado del teorema 4.6 del capítulo 9 (pág. 435): *si una función f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces $f(\mathfrak{J}) = \{f(x) \mid x \in \mathfrak{J}\}$ es un intervalo.* De este teorema obtenemos el siguiente resultado para funciones crecientes (o decrecientes).

2.2 Teorema. *Si una función f es continua y creciente (decreciente) sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ (o $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$) y $f(\langle a,b \rangle) = \langle f(a), f(b) \rangle$ (o $f(\langle a,b \rangle) = \langle f(b), f(a) \rangle$).*

PRUEBA. De nuevo efectuamos la prueba para f creciente. Si f es decreciente, consideramos $-f$.

Como f es continua sobre $[a, b]$, $f([a, b])$ es un intervalo. Además como f es creciente,

$$f(a) = \inf_{[a,b]} f \quad \text{y} \quad f(b) = \sup_{[a,b]} f,$$

de modo que

$$f([a, b]) \subset [f(a), f(b)].$$

Sin embargo, $f(a) \in f([a, b])$ y $f(b) \in f([a, b])$, y como $f([a, b])$ es un intervalo, todos los puntos entre $f(a)$ y $f(b)$ pertenecen a $f([a, b])$, es decir,

$$[f(a), f(b)] \subset f([a, b]).$$

Por tanto,

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

Como f toma el valor $f(a)$ solamente en a y el valor $f(b)$ solamente en b, concluimos también que

$$f(\langle a, b\rangle) = \langle f(a), f(b)\rangle.$$

2.3 Teorema. *Sea f una función definida sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y creciente (decreciente) y continua sobre $\mathfrak{J}$. Entonces f^*, la inversa de f, es continua sobre el intervalo $f(\mathfrak{J})$.*

PRUEBA. El teorema es trivial si $\mathfrak{J}$ no consiste en más de un punto. Podemos, pues, suponer que $\mathfrak{J}$ consta de más de un punto. Efectuamos la prueba para f creciente. De nuevo, la prueba para f decreciente se obtiene considerando $-f$.

Sea y_0 un punto interior de $f(\mathfrak{J})$ y sea $x_0 = f^*(y_0)$. Entonces x_0 es un punto interior de $\mathfrak{J}$. Deseamos demostrar que para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f^*(y) - f^*(y_0)| < \varepsilon$$

siempre que $y \in f(\mathfrak{J})$ y

$$|y - y_0| < \delta,$$

es decir

$$f^*(\langle y_0 - \delta, y_0 + \delta\rangle) \subset \langle f^*(y_0) - \varepsilon, f^*(y_0) + \varepsilon\rangle.$$

Dado $\varepsilon_1 > 0$ sea ε tal que $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ y $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset \mathfrak{J}$. Como f es una función creciente, $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$ (figura 1). Sean

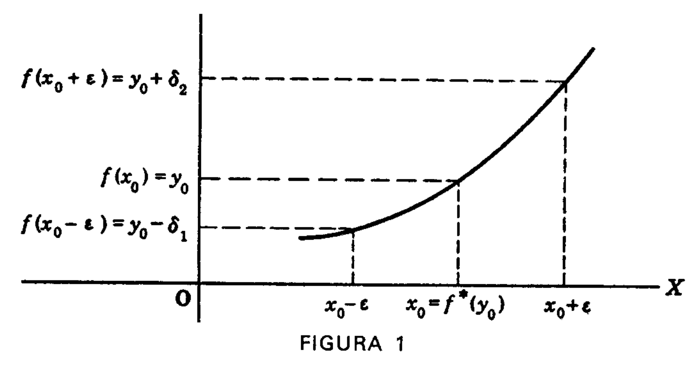


FIGURA 1

δ_1 y δ_2 definidos por $f(x_0-\varepsilon) = y_0-\delta_1$ y $f(x_0+\varepsilon) = y_0+\delta_2$. Si, ahora, $\delta = \text{mín}\,\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces

$$\langle y_0-\delta, y_0+\delta\rangle \subset \langle y_0-\delta_1, y_0+\delta_2\rangle = f(\langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle),$$

de donde

$$f^*(\langle y_0-\delta, y_0+\delta\rangle) \subset \langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle = \langle f^*(y_0)-\varepsilon, f^*(y_0)+\varepsilon\rangle.$$

Si el extremo izquierdo a pertenece a $\mathfrak{J}$, entonces $f(a)$ pertenece a $f(\mathfrak{J})$. Deseamos demostrar que f^* es continua a la derecha (al lado positivo) en $f(a)$. Es decir, deseamos demostrar que dado cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$f^*(y)-f^*(f(a)) = f^*(y)-a < \varepsilon$$

siempre que $y \in \mathfrak{D}_{f^*}$ y

$$0 \leqslant y - f(a) < \delta\,;$$

es decir,

$$f^*([f(a), f(a)+\delta\rangle) \subset [f^*(f(a)), f^*(f(a))+\varepsilon\rangle = [a, a+\varepsilon\rangle.$$

En este caso, dado $\varepsilon_1 > 0$, sea ε tal que $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon > 0$ y $[a, a+\varepsilon] \subset \mathfrak{J}$ Definamos $\delta = f(a+\varepsilon)-f(a)$. Entonces

$$[f(a), f(a)+\delta\rangle = f([a, a+\varepsilon\rangle)$$

y de aquí

$$f^*([f(a), f(a)+\delta\rangle) = [a, a+\varepsilon\rangle.$$

Un argumento análogo es válido para la continuidad a la izquierda de f^* en $f(b)$ si el extremo derecho $b \in \mathfrak{J}$.

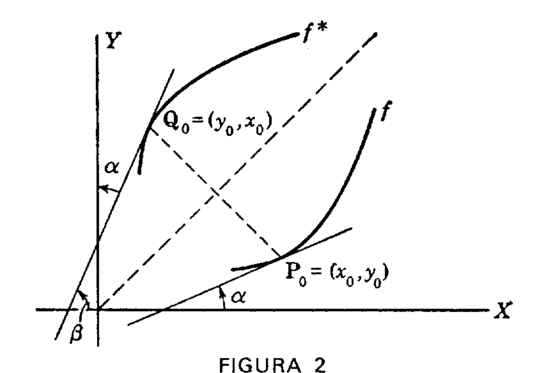


FIGURA 2

Puede darse una interpretación geométrica a la derivada de la función inversa (figura 2). La gráfica de la función inversa f^* puede obtenerse de la gráfica de la función f por reflexión respecto de la recta $\{(x, x)\}$ ya que

esta reflexión intercambia los elementos primero y segundo en los pares ordenados. Supongamos que $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$ es un punto sobre la gráfica de f en el que f es diferenciable, y sea α el ángulo de inclinación de la tangente a f en $\mathbf{P}_0$. Entonces $f'(x_0) = \tan\alpha$. $\mathbf{Q}_0 = (y_0, x_0)$ es la imagen de $\mathbf{P}_0$ bajo la reflexión respecto de la recta $\{(x, x)\}$ y es por ello un punto de la gráfica de f^*. La tangente a la gráfica de f^* en $\mathbf{Q}_0$ hace el ángulo α con el eje Y. Sea β el ángulo de inclinación de la tangente a f^* en $\mathbf{Q}_0$. Entonces $[Df^*](y_0) = \tan\beta$. Pero $\alpha+\beta = \pi/2$ si $\alpha\in\langle 0, \pi/2\rangle$ y $\alpha+\beta = 3\pi/2$ si $\alpha\in\langle\pi/2, 3\pi/2\rangle$, de modo que

$$[Df^*](y_0) = \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{[Df](x_0)} = \frac{1}{[(Df)\circ f^*](y_0)}.$$

La gráfica de la función inversa puede obtenerse por reflexión respecto de la recta $\{(x, x)\}$, y la fórmula anterior nos dice que la tangente en un punto de la gráfica de la función inversa puede obtenerse también por reflexión respecto de la recta $\{(x, x)\}$. Esta fórmula se prueba analíticamente en el teorema 2.4 que a continuación damos.

2.4 Teorema. *Sea f una función diferenciable sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y sea $[Df](x) > 0$ (o $[Df](x) < 0$) para todo $x\in\mathfrak{J}$. Entonces f^*, la inversa de f, es diferenciable sobre el intervalo $f(\mathfrak{J})$ y*

$$Df^* = \frac{1}{(Df)\circ f^*} \quad \textit{sobre } f(\mathfrak{J}).$$

PRUEBA. f es creciente (decreciente) sobre $\mathfrak{J}$; luego, por el teorema 2.1, f^* es también creciente (decreciente). Sean $y_0\in f(\mathfrak{J})$ y $x_0 = f^*(y_0)$. Para cada k tal que $y_0+k\in f(\mathfrak{J})$, definamos

$$h(k) = f^*(y_0+k)-f^*(y_0).$$

Como f^* es una función creciente (decreciente), $k \neq 0$ implica $h(k) \neq 0$. Tenemos ahora: $f^*(y_0+k) = h(k)+f^*(y_0) = h(k)+x_0$ y $y_0+k = f(x_0+h(k))$. De donde

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}\frac{f^*(y_0+k)-f^*(y_0)}{k} &= \lim_{k\to 0}\frac{h(k)}{k}\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{1}{k/h(k)} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to 0} k/h(k)}\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0+h(k))-f(x_0)}{h(k)}}\end{aligned}$$

si el límite del denominador existe y no es cero.

Podemos aplicar el teorema 5.13 del capítulo 8 (pág. 363) sobre el límite de una función compuesta. Para el presente caso, el teorema dice:

$$\text{Si } \lim_{h\to 0} F(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \text{ y } \lim_{k\to 0} h(k) = 0, \text{ entonces}$$

$$\lim_{k\to 0} [F\circ h](k) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0+h(k))-f(x_0)}{h(k)} = f'(x_0)$$

Tenemos $\lim_{k\to 0} h(k) = \lim_{k\to 0} [f^*(y_0+k)-f^*(y_0)] = 0$ ya que f^* es continua en y_0. Por hipótesis, $f'(x_0) \neq 0$ y de aquí

$$[Df^*](y_0) = \frac{1}{\lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(x_0+h(k))-f(x_0)}{h(k)}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{[(Df)\circ f^*](y_0)}.$$

Por tanto

$$Df^* = \frac{1}{(Df)\circ f^*} \quad \text{sobre } f(\mathfrak{I}).$$

2.5 Ejemplo. Sea

$$f(x) = x^2+2x-5$$

con $\mathfrak{D}_f = [-1, \infty\rangle$. Demuéstrese que f^* existe y encuéntrese $Df^*(30)$.

SOLUCIÓN 1. Tenemos $Df = 2I+2$ y como $Df(x) > 0$ para $x \in \langle -1, \infty\rangle$, f es una función creciente sobre $[-1, \infty\rangle$. De donde, por el teorema 2.1, f^* existe y es también una función creciente. Tenemos ahora, $f(5) = 30$ y $f^*(30) = 5$. Como $[(Df)\circ f^*](30) = [(2I+2)\circ f^*](30) = [2I+2](5) = 10+2 = 12 \neq 0$, se tiene por el teorema 2.4

$$Df^*(30) = \frac{1}{[Df\circ f^*](30)} = \frac{1}{Df(5)} = \frac{1}{12}.$$

SOLUCIÓN 2. Como f es una función diferenciable creciente, sabemos por el teorema 2.4 que f^* es diferenciable. Tenemos

$$f\circ f^* = (f^*)^2+2f^*-5 = I \quad (\text{sobre } \mathfrak{D}_f),$$

de modo que

$$D[f\circ f^*] = 2f^*Df^*+2Df^* = 1.$$

Por tanto,

$$Df^* = \frac{1}{2(f^*+1)}$$

y

$$[Df^*](30) = \frac{1}{2(f^*(30)+1)} = \frac{1}{12}.$$

SOLUCIÓN 3. La única solución de

$$f(x) = x^2+2x-5 = y$$

para $x \in [-1, \infty\rangle$ es

$$x = \frac{-2+\sqrt{4-4(-5-y)}}{2} = -1+\sqrt{6+y}.$$

Por tanto, f^* tiene la regla de correspondencia

$$f^*(y) = -1+\sqrt{6+y}, \quad y \in [-6, \infty\rangle$$
$$[Df^*](y) = \tfrac{1}{2}(6+y)^{-1/2},$$

y

$$[Df^*](30) = \tfrac{1}{2}(36)^{-1/2} = \tfrac{1}{12}.$$

2.6 Ejemplo. Sea $f = \text{sen}$ sobre $[-\pi/2, \pi/2]$. Determínese $Df^*(\frac{1}{2}\sqrt{2})$.

SOLUCIÓN. Tenemos $Df = D\,\text{sen} = \cos$ sobre $[-\pi/2, \pi/2]$ y $\cos x > 0$ para $x \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Por tanto f es una función diferenciable creciente con derivada que no se anula sobre $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Luego, por el teorema 2.4 sabemos que f^* es diferenciable sobre $f(\langle -\pi/2, \pi/2\rangle) = \langle -1, 1\rangle$. Tenemos ahora

$$f^* \circ \text{sen} = I \quad \text{sobre} \quad [-\pi/2, \pi/2].$$

Por tanto

$$D(f^* \circ \text{sen}) = [(Df^*) \circ \text{sen}] \cos = 1 \quad \text{sobre} \quad \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$$

y

$$(Df^*) \circ \text{sen} = \frac{1}{\cos} \quad \text{sobre } \langle -\pi/2, \pi/2\rangle.$$

Como $\text{sen}\,\pi/4 = \sqrt{2}/2$, obtenemos

$$[(Df^*) \circ \text{sen}](\pi/4) = [Df^*](\sqrt{2}/2) = \frac{1}{\cos \pi/4} = \sqrt{2}.$$

Problemas

1. Encuéntrese $Df^*(y_0)$ en todos los siguientes casos.

a) $f(x) = x^3+2$; $\mathfrak{D}_f = R$; $y_0 = 10$
b) $f(x) = x^2+2x+3$; $\mathfrak{D}_f = [-1, \infty\rangle$; $y_0 = 6$
c) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $\mathfrak{D}_f = [-\pi/2, \pi/2]$; $y_0 = 0$
d) $f(x) = \tan x$; $\mathfrak{D}_f = \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$; $y_0 = 1$
e) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1}$; $\mathfrak{D}_f = [1, \infty\rangle$; $y_0 = \frac{3}{2}$
f) $f(x) = x^{1/2}$; $\mathfrak{D}_f = [0, \infty\rangle$; $y_0 = 3$
g) $f(x) = x^2$; $\mathfrak{D}_f = [0, \infty\rangle$; $y_0 = 9$
h) $f(x) = \sec x$; $\mathfrak{D}_f = [0, \pi/2\rangle$; $y_0 = 2$.

2. Bosquéjese la gráfica de f^* para cada una de las f abajo dadas:

a) $f(x) = x^3+2$; $\mathfrak{D}_f = R$
b) $f(x) = x^2+2x+3$; $\mathfrak{D}_f = [-1, \infty\rangle$
c) $f(x) = x^2+2x+3$; $\mathfrak{D}_f = \langle -\infty, -1]$
d) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $\mathfrak{D}_f = [-\pi/2, \pi/2]$
e) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $\mathfrak{D}_f = [\pi/2, 3\pi/2]$
f) $f(x) = \tan x$; $\mathfrak{D}_f = \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$
g) $f(x) = \tan x$; $\mathfrak{D}_f = \langle \pi/2, 3\pi/2\rangle$
h) $f(x) = \sec x$; $\mathfrak{D}_f = [-\pi, -\pi/2\rangle \cup [0, \pi/2\rangle$
i) $f(x) = \sec x$; $\mathfrak{D}_f = [0, \pi/2\rangle \cup \langle \pi/2, \pi]$.

3. FUNCIONES ALGEBRAICAS

Con la ayuda de los teoremas 2.3 y 2.4 ahora somos capaces de establecer la continuidad y la diferenciabilidad de las funciones algebraicas simples. Estas funciones se construyen partiendo de la función identidad y las funciones constantes efectuando un número finito de operaciones de adición, multiplicación, división y extracción de raíces. Sabemos que la identidad y las funciones constantes son continuas y diferenciables sobre R. Por otra parte, de acuerdo con los teoremas de las secciones 6 y 9 del capítulo 8, la suma, producto y cociente de funciones continuas y diferenciables es una función continua y diferenciable, excepto en el caso del cociente en los puntos donde el denominador se anula. Así pues, la única cuestión pendiente es la del comportamiento de las funciones continuas y diferenciables con respecto a la extracción de raíces. Es decir, ¿son las funciones $I^{1/n} = \{(x, x^{1/n})\}$, donde n es un entero positivo, continuas y diferenciables?

Si n es un entero positivo impar, podemos expresar n por $n = 2k+1$, donde k es un entero no negativo. Entonces

$$DI^n = DI^{2k+1} = (2k+1)I^{2k}$$

y $[DI^n](x) > 0$ para $x \neq 0$. Esto implica que para un n entero positivo impar, I^n es una función creciente y es, por tanto, univalente. En este caso, tenemos $(I^n)^* = I^{1/n}$ e

$$I^n \circ I^{1/n} = I^{1/n} \circ I^n = I \quad (n \text{ un entero positivo impar}).$$

Como para n entero positivo impar I^n es continua y creciente sobre R, por el teorema 2.3 la función inversa $I^{1/n}$ es también continua y creciente sobre $I^n(\mathrm{R}) = \mathrm{R}$. Además, como I^n es diferenciable sobre R con $[DI^n](x) > 0$ para $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$, por el teorema 2.4 la función inversa $I^{1/n}$ es diferenciable sobre $I^n(\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle) = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$ para n entero positivo impar.

Si n es un entero positivo par, podemos escribir $n = 2k$, donde k es un entero positivo. Entonces

$$DI^n = DI^{2k} = 2kI^{2k-1}$$

de modo que $[DI^n](x) < 0$ para $x \in \langle -\infty, 0\rangle$ y $[DI^n](x) > 0$ para $x \in \langle 0, \infty\rangle$. Esto implica que para un n entero positivo par, I^n es una función decreciente sobre $\langle -\infty, 0]$ y una función creciente sobre $[0, \infty\rangle$. I^n no es univalente, pero la función $I_+{}^n = \{(x, x^n) | x \in [0, \infty\rangle\}$ es univalente. En este caso $(I_+{}^n)^* = I^{1/n}$, de modo que, para n entero positivo par

$$\left.\begin{aligned} I^n \circ I^{1/n} &= I_+{}^n \circ I^{1/n} = I_+ \\ \text{e} \qquad I^{1/n} \circ I_+{}^n &= I_+ \, . \end{aligned}\right\} \quad (n \text{ un entero positivo impar}).$$

Como para n entero positivo par $I_+{}^n$ es continua y creciente sobre $[0, \infty\rangle$, por el teorema 2.3, la función inversa $I^{1/n}$ es también continua y creciente sobre $I_+{}^n([0, \infty\rangle) = [0, \infty\rangle$. Además, como $I_+{}^n$ es diferenciable sobre $[0, \infty\rangle$ con $[DI_+{}^n](x) > 0$ para $x \in \langle 0, \infty\rangle$, por el teorema 2.4 la función inversa $I^{1/n}$ es diferenciable sobre $I_+{}^n(\langle 0, \infty\rangle) = \langle 0, \infty\rangle$ para n entero positivo par.

Podemos ahora encontrar la derivada de $I^{1/n}$. Como

$$I^n \circ I^{1/n} = I \quad (\text{sobre } \mathfrak{D}_{I^{1/n}})$$

y sabemos que $I^{1/n}$ sobre $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$ para n entero positivo impar y sobre $\langle 0, \infty\rangle$ para n entero positivo par, podemos usar la regla de la cadena (teorema 10.2, pág. 389) para obtener

$$D[I^n \circ I^{1/n}] = [nI^{n-1} \circ I^{1/n}]DI^{1/n} = nI^{1-\frac{1}{n}} DI^{1/n} = DI = 1 \, .$$

Por tanto,

3.1 $$DI^{1/n} = \frac{1}{n} I^{\frac{1}{n}-1}$$

sobre $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$ para n entero positivo impar y sobre $\langle 0, \infty\rangle$ para n entero positivo par.

Para un n entero negativo, sea $m = -n$. Entonces $I^{1/n} = \dfrac{1}{I^{1/m}}$ y

$$DI^{1/n} = D\frac{1}{I^{1/m}} = \frac{I^{1/m}D1 - 1DI^{1/m}}{I^{2/m}} = -\frac{\frac{1}{m}I^{\frac{1}{m}-1}}{I^{2/m}} = -\frac{1}{m}I^{-\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{n}I^{\frac{1}{n}-1}$$

Esto extiende la fórmula (3.1) para n entero negativo.

Con la ayuda de (3.1) podemos ahora establecer la fórmula

3.2 $$DI^r = rI^{r-1}$$

para un r número racional cualquiera. Sea $r = m/n$. Definimos entonces

$$I^r = I^{m/n} = I^m \circ I^{1/n}.$$

Usando ahora la regla de la cadena

$$DI^r = D[I^m \circ I^{1/n}] = [mI^{m-1} \circ I^{1/n}]\frac{1}{n}I^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}I^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1}$$

$$= \frac{m}{n}I^{\frac{m}{n}-1} = rI^{r-1}.$$

Hemos extendido así el teorema 9.9 del capítulo 8 (pág. 686) para incluir no solamente los enteros sino también todos los números racionales. Más adelante, en este capítulo, seremos capaces de demostrar que la misma fórmula es realmente aplicable para un número real cualquiera r.

3.3 Ejemplo. Encuéntrese $D_x\sqrt{x^2+1}$.

SOLUCIÓN. Usando (3.1) o (3.2) y la regla de la cadena, tenemos

$$D[I^{1/2}\ (I^2+1)] = \left[\frac{1}{2}I^{-1/2} \circ (I^2+1)\right]2I = \frac{I}{I^{1/2} \circ (I^2+1)}$$

o, lo que es equivalente,

$$D_x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3.4 Ejemplo. Encuéntrese $D_x \operatorname{sen}^{3/2} x$.

SOLUCIÓN. Usando (3.2) y la regla de la cadena, tenemos

$$D[I^{3/2} \circ \operatorname{sen}] = [\tfrac{3}{2} I^{1/2} \circ \operatorname{sen}] \cos \text{o, lo que es equivalente,}$$
$$D_x \operatorname{sen}^{3/2} x = \tfrac{3}{2} \operatorname{sen}^{1/2} x \cos x.$$

Problemas

1. Encuéntrese f' si

a) $f = I^{2/3} + 3I^{1/4}$

b) $f = \frac{1}{2}I^2 + 5I^{2/5}$

c) $f = I^{1/2} + I^{1/3} + 5$

d) $f = (I^{1/3} + I^{2/3})(I^{1/4} + I^{1/5})$

e) $f = I^{3/2} \circ (1 + 2\tan)$

f) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x}$

g) $f(x) = \sec^{3/2} 2x$

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

2. Una pared de siete metros de alto está a cuatro metros de una casa. Encuéntrese la longitud de la escalera más corta que alcanzará la casa desde el suelo fuera de la pared.

3. Una casa y un almacén situados uno de otro a 91.5 metros de distancia, distan, respectivamente, 76.25 metros y 21.35 metros de una carretera recta. Un hombre quiere pasar por su correspondencia todos los días cuando va del almacén a la casa. ¿Dónde debería estar colocado el buzón al lado del camino para que fuera mínima la longitud del camino por recorrer y cuál sería esta longitud mínima?

4. Dos automóviles se están aproximando a una intersección en ángulo recto. El primer automóvil se dirige hacia el sur a 48.270 kilómetros/hora (804.60 metros/minuto) y está a 15.250 metros de la intersección, mientras que el segundo automóvil se desplaza hacia el oeste a 72.405 kilómetros/hora y está a 30.50 metros de la intersección. ¿Cuál es la razón de la disminución de distancia entre los automóviles.

Sugerencia. $s(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ donde $y(t)$ y $x(t)$ son las distancias del primero y segundo automóviles respectivamente a la intersección.

4. LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sabemos que $\dfrac{1}{n+1} I^{n+1}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$y' = I^n \qquad n \neq -1.$$

En el caso $n = -1$, no obtenemos una solución en esta forma. Podemos

por ello esperar que las soluciones $y = c + \int_1 I^{-1}$ sobre $\langle 0, \infty \rangle$ de la ecuación diferencial $y' = I^{-1}$ conducirán a un nuevo tipo de función.

4.1 Definición. *La función* $\ln = \int_1 I^{-1}$ *definida sobre* $\langle 0, \infty \rangle$ *por la regla de correspondencia*

$$\ln x = \int_1^x I^{-1} = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

se llama función ***logaritmo natural*** *o simplemente función logaritmo.*

De acuerdo con el primer teorema fundamental del cálculo, sabemos que la función logaritmo natural es la solución sobre $\langle 0, \infty \rangle$ de la ecuación diferencial $y' = I^{-1}$ que satisface $y(1) = 0$. Para $x > 1$, la función ogaritmo natural puede interpretarse geométricamente como el área bajo a hipérbola $yt = 1$ desde $t = 1$ hasta $t = x$ (figura 3).

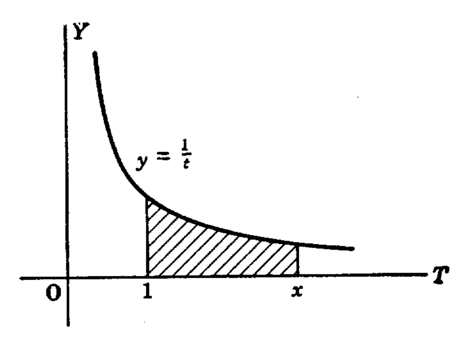


FIGURA 3

Obtenemos ahora algunas propiedades de la función logaritmo.

Según el primer teorema fundamental del cálculo, tenemos

4.2 $$D \ln = I^{-1} \quad \text{sobre} \quad \langle 0, \infty \rangle.$$

Se sigue inmediatamente del teorema 8.10 del capítulo 8 (pág. 379), pues la función logaritmo es diferenciable sobre $\langle 0, \infty \rangle$, que es continua sobre $\langle 0, \infty \rangle$. Por otra parte, (4.2) implica que la función logaritmo es una función creciente ya que I^{-1} es una función positivamente valuada sobre $\langle 0, \infty \rangle$. Conocemos el valor de la función logaritmo en un punto:

$$\ln 1 = \int_1^1 I^{-1} = 0$$

de donde ln está positivamente valuada sobre $\langle 1, \infty\rangle$ y toma valores negativos sobre $\langle 0, 1\rangle$.

Por integración por partes, tenemos

4.3 $$\int \ln = \int (DI)\ln = I\ln - \int I(D\ln) = I\ln - I.$$

Una propiedad importante de la función logaritmo está expresada por la fórmula

4.4 $$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad (a > 0, b > 0).$$

Para probar (4.4) observamos que, por la regla de la cadena,

$$D_x \ln(ax) = \frac{1}{ax}\cdot a = \frac{1}{x} \text{ para } a > 0, x \in \langle 0, \infty\rangle.$$

Por tanto, por el corolario 4.2 del capítulo 10 (pág. 458), como las derivadas de $\ln x$ y $\ln(ax)$ son iguales, las funciones difieren cuando más en una constante y

$$\ln(ax) = \ln x + c.$$

Tomando $x = 1$, vemos que

$$\ln a = \ln 1 + c = c$$

ya que $\ln 1 = 0$. Por tanto

$$\ln(ax) = \ln x + c = \ln x + \ln a.$$

De donde, para cualesquier $a > 0, b > 0$, tomando $x = b$ obtenemos (4.4).

Podemos demostrar, de modo análogo, que

4.5 $$\ln x^r = r\ln x \quad (x > 0, r \text{ racional}).$$

Como

$$D[\ln \circ I^r] = [(D\ln)\circ I^r]DI^r = [I^{-1}\circ I^r]rI^{r-1}$$
$$= I^{-r}rI^{r-1} = rI^{-1} \quad (\text{sobre } \langle 0, \infty\rangle)$$

y

$$D[r\ln] = rI^{-1} \quad (\text{sobre } \langle 0, \infty\rangle).$$

por el corolario 4.2 (pág. 458) obtenemos

$$\ln I^r = r\ln + c \quad (\text{sobre } \langle 0, \infty\rangle).$$

Evaluando en 1 obtenemos

$$0 = 0 + c.$$

De donde $\ln I^r = r\ln$ sobre $\langle 0, \infty\rangle$ o $\ln x^r = r\ln x$ para $x > 0$ y r un número racional cualquiera.

Ahora demostraremos que el rango de la función logaritmo es $\langle -\infty, \infty\rangle$. Para $a > 1$ sabemos que $\ln a > 0$. Por tanto, por (4.5), para cualquier n entero positivo,

$$\ln a^n = n \ln a > 0$$

y

$$\ln a^{-n} = -n \ln a < 0.$$

Ahora bien, la función logaritmo es una función continua sobre $\langle 0, \infty\rangle$. De donde, por el teorema del valor intermedio (pág. 430), la función logaritmo toma todos los valores entre $-n \ln a$ y $n \ln a$. Por el problema 4 (pág. 416), como $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \ln a = \ln a > 0$, y $\lim_{n\to\infty} \ln a^{-1} < 0$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \ln a^n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \ln a^{-n} = -\infty.$$

La función logaritmo es una función creciente y los anteriores límites implican

4.6 $$\lim_{\infty} \ln = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{0+} \ln = -\infty.$$

De donde concluimos que el rango de la función logaritmo es $\langle -\infty, \infty\rangle$.

La función logaritmo está definida sobre $\langle 0, \infty\rangle$ de modo que, para $x \neq 0$, la función dada por $\ln |x|$ está bien definida. Ahora bien, cuando $x > 0$, tenemos

$$D_x \ln |x| = D_x \ln x = \frac{1}{x},$$

mientras que, para $x < 0$,

$$D_x \ln |x| = D_x \ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Por tanto

4.7 $$D[\ln \circ |I|] = I^{-1} \quad (\text{sobre } \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle)$$

o, lo que es equivalente,

$$D_x \ln |x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

y

4.8 $$\int I^{-1} = \ln \circ |I| \quad (\text{sobre } \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle)$$

o, lo que es equivalente,

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln |x|, \quad x \neq 0.$$

De (4.7) y la regla de la cadena, obtenemos el resultado

4.9 $$D[\ln \circ |f|] = [I^{-1} \circ f]Df = \frac{Df}{f}$$

y, por (4.9), obtenemos

4.10 $$\int \frac{Df}{f} = \ln \circ |f|.$$

Como el rango de la función logaritmo es $\langle -\infty, \infty \rangle$, existe un número x tal que $\ln x = 1$. Este número se denota por e. Es decir,

4.11 $$\ln e := \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1.$$

Geométricamente, e es el número tal que el área bajo la hipérbola $y = 1/t$ desde $t = 1$ hasta $t = e$ es 1. En los problemas 1d y 1e (pág. 540) se demostró que $\int_1^2 \frac{dx}{x} < 1$ e $\int_1^3 \frac{dx}{x} > 1$; es decir, se demostró que $2 < e < 3$. Con cinco cifras decimales exactas, $e = 2.71828$. El número e, como π y $\sqrt{2}$, es un número irracional. Sin embargo, la prueba de que e es irracional es más difícil que la prueba de que $\sqrt{2}$ es irracional.

La gráfica de la función logaritmo aparece en la figura 4.

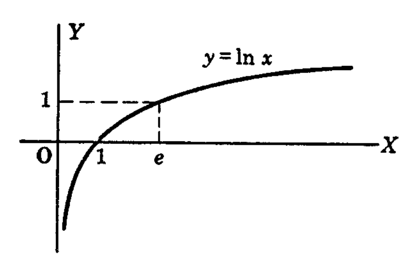


FIGURA 4

4.12 Ejemplo. Encuéntrese $D[I \ln - I]$.

SOLUCIÓN

$$D[I \ln - I] = \ln + I I^{-1} - 1 = \ln.$$

Esta es una verificación de la fórmula (4.3).

4.13 Ejemplo. Encuéntrese $D_x \ln (1+x^2)^{1/2}$.

SOLUCIÓN.

$$D[\ln \circ \sqrt{1+I^2}] = D\left[\frac{1}{2} \ln \circ (1+I^2)\right] = \frac{1}{2} \frac{1}{1+I^2} D(1+I^2)$$

$$= \frac{2I}{2(1+I^2)} = \frac{I}{1+I^2}$$

o, equivalentemente,

$$D_x \ln (1+x^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}.$$

4.14 Ejemplo. Encuéntrese $\int \dfrac{I^3+2I^2+1}{I-1}$.

SOLUCIÓN.

$$\int \frac{I^3+2I^2+1}{I-1} = \int \left(I^2+3I+3 + \frac{4}{I-1}\right)$$

$$= \frac{I^3}{3} + \frac{3I^2}{2} + 3I + 4 \ln \circ |I-1|.$$

Problemas

1. Combínense las siguientes expresiones en un solo término.

a) $\ln \frac{12}{5} + \ln 100 - \ln 120$

b) $10 \ln 2 + 2 \ln \frac{5}{2} - 2 \ln 16$

c) $3 \ln x - \frac{2}{3} \ln y - \frac{5}{2} \ln x + \frac{3}{4} \ln y$

d) $\ln (2\sqrt[3]{x}) - \ln (4/\sqrt[3]{x^2}) - \ln \frac{1}{2}$.

2. Transfórmese la expresión del primer miembro en la del segundo miembro en cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $\ln \left| \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x+y)(x^2-y^2)} \right| = \dfrac{1}{2} \ln (x^2+y^2) - 2 \ln |x+y| - \ln |x-y|$

b) $\ln \left| \dfrac{\sqrt{x^2+2 \operatorname{sen} x}}{(3-x^3)^{5/3}} \right| = \dfrac{1}{2} \ln (x^2+2) + \ln |\operatorname{sen} x| - \dfrac{5}{3} \ln |3-x^3|$.

3. Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

a) $\ln (1+x) - \ln (1-x) = 1$

b) $\ln(x^2+1) - \ln(x+1) = 0$

c) $\ln\sqrt{x+1} + \ln(1-x) - \ln\sqrt{x^2+1} = 0$

d) $\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = 2$.

4. Demuéstrese que:

a) $\ln|\sec x| = -\ln|\cos x|$

b) $\ln|\csc x| = -\ln|\text{sen}\, x|$

c) $\ln|\csc x - \cot x| = -\ln|\csc x + \cot x|$

d) $2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \ln\frac{1+\cos x}{2}$

e) $\ln|\sec x + \tan x| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\text{sen}\, x}{1-\text{sen}\, x}$

f) $\ln|\csc x - \cot x| = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

5. Diferénciese cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln x^2$

b) $f(x) = \ln^2 x$

c) $f(x) = \ln\ln x$

d) $f(x) = \ln|\text{sen}\, x|$

e) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+a^2}$

f) $f(x) = \ln(x^2+4)^{5/3}$.

6. Encuéntrense fórmulas para cada una de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{3I^4+I^3-2I^2-5}{I^2+1}$

b) $\displaystyle\int \frac{I+1}{I-1}$

c) $\displaystyle\int \tan$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{1+\text{sen}\, 2x}\, dx$

e) $\displaystyle\int I^{-1}\ln$

f) $\displaystyle\int \frac{\sec^2}{\tan}$.

5. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Como la función logarítmica es una función creciente, tiene función inversa.

5.1 Definición. *La función inversa de la función logaritmo natural se llama* ***función exponencial*** *y se denota por* "exp". *Es decir*, $\exp = \ln^*$ *y* $\exp(x)$ *es el número con la propiedad de que* $\ln(\exp(x)) = x$.

El dominio de exp es el rango de ln, $\langle -\infty, \infty \rangle$, y el rango de exp es el dominio de ln, $\langle 0, \infty \rangle$. La gráfica de la función exponencial puede obtenerse reflejando la gráfica de la función logaritmo natural respecto a la recta $\{(x, x)\}$. La gráfica de la función exponencial se muestra en la figura 5.

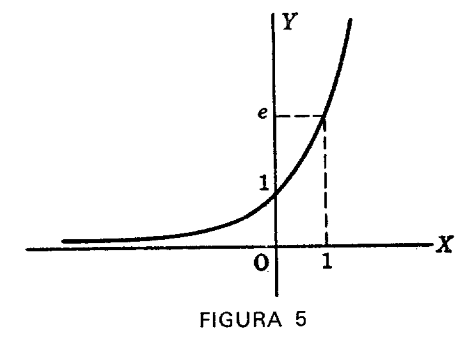


FIGURA 5

Como la función logaritmo es una función continua creciente, por los teoremas 2.1 y 2.3 (pág. 655) la función exponencial es también una función continua creciente. Además, según el teorema 2.4, la función exponencial es diferenciable y

5.2 $$D\exp = \frac{1}{(D\ln)\circ\exp} = \frac{1}{I^{-1}\circ\exp} = I\circ\exp = \exp.$$

Así pues, la función exponencial es idéntica a su derivada.

De (5.2) obtenemos la fórmula de integración

5.3 $$\int \exp = \exp.$$

Como la función exponencial es una función creciente con dominio $\langle -\infty, \infty \rangle$ y rango $\langle 0, \infty \rangle$,

5.4 $$\lim_{\infty} \exp = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{-\infty} \exp = 0.$$

Una propiedad importante de la función exponencial es

5.5 $$\exp(a+b) = \exp(a)\cdot\exp(b).$$

Esta fórmula es equivalente a la fórmula (4.4) para la función logarítmica. Tenemos

$$\ln(\exp(a)\exp(b)) = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = a+b$$

y por tanto

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

Análogamente, de (4.5), para r un número racional, tenemos

$$\ln[\exp(x)]^r = r[\ln\circ\exp](x) = rx$$

y de aquí, para r racional,

5.6 $$\exp(rx) = [\exp(x)]^r.$$

Por (4.11) tenemos

$$\exp(1) = e$$

y por (5.6), para cualquier número racional r,

5.7 $$\exp(r) = [\exp(1)]^r = e^r.$$

Para cualquier número racional r, $e^r = I^r(e)$ está definido y es lo mismo que $\exp(r)$. Sin embargo, si x es un número irracional, e^x no tiene ningún significado. Como $e^x = \exp(x)$ si x es racional y el exp está definido para todos los números reales, extendemos la definición de e^x para x irracional haciéndolo igual a $\exp(x)$.

5.8 Definición. *Para cualquier número real x*

$$e^x = \exp(x).$$

Con esta nueva notación para la función exponencial, podemos reescribir las ecuaciones (5.2), (5.3), y (5.5) en la forma:

5.2a $$D_x e^x = e^x,$$

5.3a $$\int e^x\,dx = e^x,$$

5.5a $$e^{x+y} = e^x e^y.$$

Problemas

1. Úsese una tabla apropiada para evaluar $e^{-t/RC}$ dados

a) $t = 1,\ R = 2,\ C = 0.05$

b) $t = 5,\ R = 100,\ C = 0.03$

c) $t = 15\times 10^{-4},\ R = 47,\ C = 27\times 10^{-6}$

d) $t = RC,\ R = 68,\ C = 47\times 10^{-6}$

2. Resuélvase la ecuación $e^{-t/RC} = A$ para t, dados

a) $R = 10,\ C = 10^{-4},\ A = 0.5$

b) $R = 33\times 10^3,\ C = 4.7\times 10^{-4},\ A = 0.45$

c) $R = 8.2\times 10^3,\ C = 2.2\times 10^{-4},\ A = 0.21$

d) $R = 75\times 10^3,\ C = 2\times 10^{-5},\ A = 0.35$

3. Diferénciense cada una de las siguientes funciones:

a) $f = I\ \ln$ *b*) $f = \dfrac{\ln}{I}$

c) $f = \ln \circ |\sec + \tan|$ *d*) $f = \ln \circ |\csc - \cot|$

e) $f = \frac{1}{2}\ln\circ\left(\frac{1+\text{sen}}{1-\text{sen}}\right)$ *f*) $f(x) = x^2 e^{2x}$

g) $f(x) = \ln\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ *h*) $f(x) = e^{\cos 2x^2}$

4. Encuéntrense fórmulas para cada una de las siguientes integrales:

a) $\int \exp\circ(5I)$ *b*) $\int (\exp\circ\text{sen})\cos$

c) $\int (\exp\circ I^{1/2})I^{-1/2}$ *d*) $\int I^2 \exp\circ I^3$

e) $\int \frac{\exp}{1+\exp}$ *f*) $\int I\exp$

g) $\int (e^x+e^{-x})^2\,dx$ *h*) $\int (e^{x/a}-e^{-x/a})\,dx$

i) $\int \frac{e^{4x}}{3+2e^{4x}}\,dx$ *j*) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\,dx$

k) $\int e^{\ln x}\,dx$ *l*) $\int e^{\text{sen}\,x\cos x}\cos 2x\,dx$

5. Encuéntrese la solución sobre $\langle -\infty, 0\rangle$ de la ecuación diferencial $y' = I^{-1}$ que satisface $y(-1) = 0$.

6. Demuéstrese que si f es una función creciente, entonces

a) $\lim_{\infty} f = \infty \Leftrightarrow \lim_{\infty} f^* = \infty$

b) $\lim_{-\infty} f = -\infty \Leftrightarrow \lim_{-\infty} f^* = -\infty$

c) $\lim_{0+} f = -\infty \Leftrightarrow \lim_{-\infty} f^* = 0$

d) $\lim_{0-} f = \infty \Leftrightarrow \lim_{\infty} f^* = 0.$

7. Pruébese por inducción matemática que:

a) $D^n \ln = (-1)^{n+1}(n-1)!\,I^{-n}$

b) $D^n \exp = \exp$

c) $D^{n+1}[I^n \ln] = n!/I$

d) $D^n[I\exp] = (I+n)\exp$.

6. LA FUNCIÓN POTENCIAL GENERAL

Hemos considerado las funciones potenciales I^r para r número racional cualquiera. Si $r = m/n$ donde m y n son enteros sin ningún factor entero común distinto de ± 1 (m y n se dice, en tal caso, que son primos relativos), entonces I^r se define por

$$I^r = I^m \circ I^{1/n}.$$

Para $r > 0$, si n es impar, el dominio de I^r es $\langle -\infty, \infty \rangle$ y si n es par, el dominio de I^r es $[0, \infty\rangle$. Para $r < 0$, 0 no está en el dominio de I^r.

La ecuación (5.6) nos dice que para r racional, $I^r \circ \exp = \exp \circ (rI)$. Por tanto, para r racional tenemos

$$I^r = I^r \circ \exp \circ \ln = \exp \circ (rI) \circ \ln = \exp \circ (r \ln) \text{ sobre } \langle 0, \infty \rangle).$$

Es, pues, natural extender la definición de funciones potenciales, que hasta el momento se han definido sólo para potencias racionales, a las potencias irracionales en la siguiente forma.

6.1 Definición. *Si r es un número irracional, la* ***función potencial*** *I^r se define como* $I^r = \exp \circ (r \ln)$.

El dominio de I^r es $\langle 0, \infty \rangle$ y para $x \in \langle 0, \infty \rangle$,

6.2 $$x^r = \exp (r \ln x).$$

Nótese, en particular, que $e^r = \exp r$.

La ecuación (6.2) puede pues escribirse en la forma

$$x^r = e^{r \ln x}.$$

Obtenemos ahora algunas propiedades de la función potencial I^r. De la definición de I^r, obtenemos

$$\begin{aligned} DI^r &= D[\exp \circ (r \ln)] = [(D \exp) \circ (r \ln)]\, D(r \ln) \\ &= [\exp \circ (r \ln)]\, (rI^{-1}) = I^r rI^{-1} = rI^{r-1}. \end{aligned}$$

Es decir,

6.3 $$DI^r = rI^{r-1} \quad (r \in \mathrm{R}).$$

Vemos ahora que la fórmula (6.3), que fue anteriormente probada para enteros primeros, y luego para racionales, realmente se verifica para todos los números reales. Para un r real cualquiera, tenemos, además,

6.4 $$\int I^r = \begin{cases} \dfrac{I^{r+1}}{r+1} & (r \neq -1) \\ \ln \circ (|I|) & (r = -1). \end{cases}$$

Para números reales cualesquiera r y s, tenemos

6.5 $$I^{r+s} = I^r I^s,$$

ya que, para cualquier $x > 0$,

$$x^r x^s = e^{r \ln x} e^{s \ln x} = e^{r \ln x + s \ln x} = e^{(r+s) \ln x} = x^{r+s}.$$

Tenemos también

6.6 $$(I^r)^s = I^{rs}$$

ya que para cualquier $x > 0$,

$$(x^r)^s = e^{s \ln x^r} = e^{s \ln e^{r \ln x}} = e^{sr \ln x} = x^{sr} = x^{rs}.$$

Además

6.7 $$I^r(x)\, I^r(y) = I^r(xy),$$

ya que

$$I^r(x)\, I^r(y) = e^{r \ln x} e^{r \ln y} = e^{r(\ln x + \ln y)} = e^{r \ln (xy)} = I^r(xy).$$

Las ecuaciones (6.5) y (6.6) se llaman *leyes de los exponentes.*

La ecuación (6.2) nos permite generalizar la fórmula (4.5) para cualquier *número real r*

6.8 $$\ln x^r = \ln (\exp (r \ln x)) = r \ln x.$$

Ahora demostraremos que aunque la función logaritmo es una función creciente con $\lim_{\infty} \ln = \infty$, *la función logaritmo crece menos rápidamente que cualquier función potencial con potencia positiva.* Es decir,

6.9 $$\lim_{\infty} \frac{\ln}{I^a} = 0 \quad \text{para } a > 0.$$

Sea b cualquier número positivo. Entonces para $t > 1$, tenemos

$$t^{-1} < t^{b-1},$$

de donde, para $x > 1$,

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} < \int_1^x t^{b-1}\, dt = \frac{t^b}{b}\Big]_1^x = \frac{x^b - 1}{b} < \frac{x^b}{b}.$$

Escojamos ahora para $a > 0$ un número b tal que $a > b > 0$. Entonces

$$0 < \frac{\ln x}{x^a} < \frac{x^{b-a}}{b},$$

y como $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^{b-a}}{b} = 0$, se sigue de ello el límite (6.9).

Del límite (6.9) se sigue que *la función exponencial aumenta más rápidamente que cualquier función potencial I^a*. La afirmación es obviamente cierta para $a \leqslant 0$ ya que en este caso I^a no es una función creciente. De (6.9), para $b > 0$, tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0.$$

Reemplazando b por $1/a$ esto se hace

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^{1/a}} = 0.$$

De donde, tomando la a-ésima potencia de este resultado, tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^a}{x} = 0.$$

Haciendo ahora $x = e^y$, obtenemos

6.10
$$\lim_{y \to \infty} \frac{y^a}{e^y} = 0.$$

Nota. El número e se define a menudo por el límite:

$$e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}.$$

Para demostrar que este límite es el número e definido por la ecuación 4.11 (pág. 668), observamos que

$$1 = [D \ln](1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln(1+h)$$

$$= \lim_{h \to 0} \ln(1+h)^{1/h} = \ln [\lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}].$$

El límite del logaritmo es igual al logaritmo del límite ya que la función logaritmo es continua. Ahora bien, $\ln e = 1$ y la función logaritmo es univalente. De donde

$$e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{1/h}.$$

7. LOGARITMOS Y EXPONENCIALES DE OTRAS BASES

En las secciones 4 y 5 introdujimos las funciones logaritmo y exponencial con el número e como "base" —la "base natural" para el logaritmo. En esta sección consideramos otras bases.

Como

$$a^x = I^x(a) = e^{x \ln a} = [\exp \circ (I \ln a)](x)$$

para $a > 0$ y cualquier $r \in R$, definimos la exponencial de base a en la siguiente forma.

7.1 Definición. *Para cualquier número real $a > 0$, la* ***exponencial de base a****,* $\exp_a$*, se define por*

$$\exp_a = \exp \circ (I \ln a).$$

El dominio de $\exp_a$ es R y el rango de $\exp_a$ es $\langle 0, \infty \rangle$. Para cada $x \in R$,

$$\exp_a x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a} = a^x.$$

Obtenemos ahora algunas de las propiedades del $\exp_a$. De la definición de $\exp_a$ se deduce

$$\begin{aligned} D \exp_a &= D[\exp \circ (I \ln a)] = [(D \exp) \circ (I \ln a)]\, D(I \ln a) \\ &= [\exp \circ (I \ln a)] \ln a = (\ln a) \exp_a. \end{aligned}$$

Es decir,

7.2 $$D_x a^x = a^x \ln a.$$

De (7.2) se sigue que la función exponencial de base a es continua. Además, si a es mayor que 1, $\ln a > 0$ y $a^x \ln a > 0$, mientras que si $0 < a < 1$, $\ln a < 0$ y $a^x \ln a < 0$. Por tanto, de (7.2) se sigue que si $a > 1$, la exponencial de base a es una función creciente, mientras que si $0 < a < 1$, es una función decreciente (figura 6).

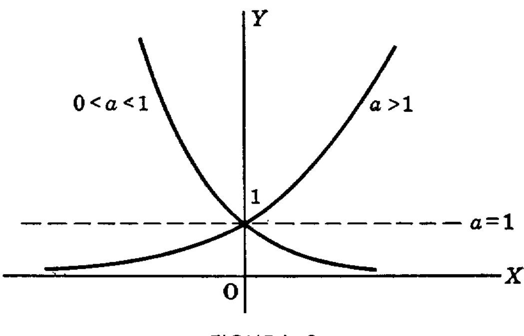


FIGURA 6

De (7.2) obtenemos la fórmula

7.3 $$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}.$$

Para cualesquier números reales x y y y para $a > 0$,

7.4 $$a^{x+y} = a^x a^y.$$

La ecuación (7.4) es una generalización de (5.5a) y puede obtenerse de (6.5) como sigue:

$$a^{x+y} = I^{x+y}(a) = I^x(a)\,I^y(a) = a^x a^y.$$

Tenemos también

7.5 $$(a^x)^y = a^{xy}$$

ya que por (6.6)

$$(a^x)^y = [I^x(a)]^y = I^{xy}(a) = a^{xy}.$$

Para $a > 0$, $b > 0$, y x real cualquiera,

7.6 $$a^x b^x = (ab)^x$$

ya que, por (6.7),

$$a^x b^x = I^x(a)\,I^x(b) = I^x(ab) = (ab)^x.$$

7.7 Definición. *Para $a > 0$ y $a \neq 1$, la función inversa de la exponencial de base a se llama* ***logaritmo de base a****, denotado por* $\log_a$. *Es decir,* $\log_a = \exp_a{}^*$.

Nótese que como $\exp_1 = \{(x, 1^x)\} = \{(x, 1)\} = 1$ no es univalente y no tiene, por tanto, función inversa, no hay logaritmo de base 1.

Obtenemos ahora algunas de las propiedades de los logaritmos de base a. La primera relación que obtenemos relaciona el logaritmo de base a con el logaritmo natural. Si

$$y = \log_a x$$

entonces

$$x = a^y = e^{y \ln a}.$$

Por tanto

$$\ln x = y \ln a$$

y

7.8 $$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Como un caso particular de (7.8), tenemos

7.9 $$\log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

La base 10 es la que generalmente se usa en los cálculos. Salvo aviso expreso en contra, seguiremos la práctica de escribir log x por $\log_{10} x$. Como con cinco cifras significativas exactas ln 10 = 2.3026, tenemos las fórmulas

7.10 $$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{\ln x}{2.3026} = 0.4343 \ln x$$

y

7.11 $$\ln x = \ln 10 \log x = 2.3026 \log x$$

para convertir los logaritmos naturales en logaritmos de base 10 y viceversa.

Usando (7.8), (7.9), y (4.3), obtenemos fácilmente las fórmulas de diferenciación e integración

7.12 $$D \log_a = D \frac{\ln}{\ln a} = \frac{1}{I \ln a} = \frac{\log_a e}{I}$$

y

7.13 $$\int \log_a = \int \frac{\ln}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}(I \ln - I)$$

$$= I \log_a - I \log_a e.$$

Como $\ln a > 0$ para $a > 1$ y $\ln a < 0$ para $0 < a < 1$, se sigue de (7.12) que $\log_a$ es una función continua, creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$.

De (4.4) y (7.8) se sigue que

7.14 $$\log_a (xy) = \frac{\ln (xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y.$$

Para cualquier número real r, usando (7.8) y (6.8) obtenemos

7.15 $$\log_a x^r = \frac{\ln x^r}{\ln a} = \frac{r \ln x}{\ln a} = r \log_a x.$$

Las fórmulas para la derivada y la integral de $\exp_a$ y $\log_a$ contienen todas el factor $\ln a$. Cuando se usa la base e, este factor no aparece $-\ln e = 1$. Vemos de esto que la base natural de los logaritmos y exponen-

ciales en el cálculo es la base e. Para cálculos numéricos con logaritmos, la base 10 es más conveniente ya que nuestro sistema numérico emplea 10 como base. Téngase en cuenta, sin embargo, que si hubiéramos usado alguna otra base para nuestros números, supongamos 2, entonces esa base es la que sería la más conveniente para los cálculos numéricos.

Nunca necesitamos usar las fórmulas (7.2), (7.3), (7.12), y (7.13) para diferenciar e integrar $\exp_a$ y $\log_a$. En lugar de ello, $\exp_a$ y $\log_a$ pueden expresarse en términos de exp y ln por las relaciones

$$a^x = e^{x \ln a}$$

y

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

volviendo con ello innecesarias las fórmulas para $\exp_a$ y $\log_a$.

7.16 Ejemplo. Encuéntrese $D_x 10^x$.

SOLUCIÓN.

$$D_x 10^x = D_x e^{x \ln 10} = (\ln 10) e^{x \ln 10} = (\ln 10) 10^x.$$

7.17 Ejemplo. Encuéntrese $\int 10^x dx$.

SOLUCIÓN.

$$\int 10^x dx = \int e^{x \ln 10} dx = \frac{e^{x \ln 10}}{\ln 10} = \frac{10^x}{\ln 10}.$$

7.18 Ejemplo. Encuéntrese $D_x \log_{10} x$.

SOLUCIÓN.

$$D_x \log_{10} x = D_x \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{1}{x \ln 10}.$$

7.19 Ejemplo. Encuéntrese $\int \log_{10} x dx$.

SOLUCIÓN. Usando la fórmula (4.3) para $\int \ln$, tenemos

$$\int \log_{10} x\, dx = \int \frac{\ln x}{\ln 10} dx = \frac{1}{\ln 10} \int \ln x\, dx = \frac{1}{\ln 10}(x \ln x - x).$$

Problemas

1. Exprésese cada una de las siguientes relaciones en que aparece $\exp_a$ en términos de $\log_a$.

a) $2^3 = 8$ *b*) $7^2 = 49$

c) $10^2 = 100$

d) $22^3 = 10\,648$

e) $\sqrt{81} = 9$

f) $3^{-3} = \frac{1}{27}$

g) $10^{-1} = 0.1$

h) $27^{2/3} = 9.$

2. Exprésese cada una de las siguientes relaciones en que aparece $\log_a$ en términos de $\exp_a$

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_3 81 = 4$

c) $\log_{10} 100 = 2$

d) $\log_5 125 = 3$

e) $\log_{10} 2 = 0.30103$

f) $\log_{100} 10 = \frac{1}{2}$

g) $\log_8 32 = \frac{5}{3}$

h) $\log_2 53 = 5.728$

3. Demuéstrese que

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a}.$$

4. Usando una tabla de la función $\log_{10}$ y la relación del problema 3, calcúlense:

a) $\log_2 11$

b) $\log_2 22$

c) $\log_3 4$

d) $\log_3 12$

e) $\log_3 10$

f) $\log_3 40$

5. Encuéntrese la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $\log_a \circ |I^3|$

b) $\log_{10} \circ (I^2+2I+2)$

c) $\log_a \circ |\cos|$

d) $\exp_a \circ (-I)$

e) $\exp_a \circ \operatorname{sen}$

f) $\operatorname{sen} \circ \exp_a$

g) $x^2 3^x$

h) $2^x e^x$

i) $\log_3 (1 - \operatorname{sen} x)$

j) $\log_{10} \left(\dfrac{10^x + 10^{-x}}{2}\right)$

k) 2^{x^3}

l) $\log_{10} |\tan x|$

6. Demuéstrese que

a) $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 \quad \text{para } a > 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < a < 1 \\ \infty & \text{para } a > 1 \end{cases}$

c) $a^x = a^y$ donde $a > 0$, $a \neq 1$, implica $x = y$.

7. Encuéntrense fórmulas de integración para cada una de las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \exp_3 \circ (2I)$

b) $\displaystyle\int \exp_{10} \circ (\tfrac{3}{2}I)$

c) $\displaystyle\int \exp_2 \exp$

d) $\displaystyle\int I \exp_3 \circ I^2$

e) $\int \cos \exp_5 \circ \text{sen}$

f) $\int \sec^2 \exp_4 \circ \tan$

g) $\int 2^{3x}\,dx$

h) $\int \sqrt[3]{10^{2x}}\,dx$

i) $\int 3^x e^x\,dx$

j) $\int 7^{\cos x} \,\text{sen}\, x\,dx$

k) $\int 2^{-x}\,dx$

l) $\int x^2 3^x\,dx$.

8. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Recuérdese que en el capítulo 8 obtuvimos fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas.

8.1 $D\,\text{sen} = \cos$

8.2 $D\cos = -\text{sen}$

8.3 $D\tan = \sec^2$

8.4 $D\cot = -\csc^2$

8.5 $D\sec = \sec\tan$

8.6 $D\csc = -\csc\cot$.

Las fórmulas de integración para las seis funciones trigonométricas son:

8.7 $\int \text{sen} = -\cos$

8.8 $\int \cos = \text{sen}$

8.9 $\int \tan = -\int \frac{-\text{sen}}{\cos} = -\ln \circ |\cos| = \ln \circ |\sec|$

8.10 $\int \cot = \int \frac{\cos}{\text{sen}} = \ln \circ |\text{sen}| = -\ln \circ |\csc|$

8.11 $\int \sec = \int \sec \frac{\sec + \tan}{\sec + \tan} = \int \frac{\sec\tan + \sec^2}{\sec + \tan} = \ln \circ |\sec + \tan|$

8.12 $$\int \csc = \int \frac{-\csc\cot + \csc^2}{\csc - \cot} = \ln\circ|\csc - \cot|.$$

De (8.3)-(8.6), obtenemos las fórmulas de integración:

8.13 $$\int \sec^2 = \tan$$

8.14 $$\int \csc^2 = -\cot$$

8.15 $$\int \sec\tan = \sec$$

8.16 $$\int \csc\cot = -\csc.$$

Muchas otras fórmulas en que aparecen funciones trigonométricas pueden manipularse haciendo uso de las distintas identidades trigonométricas. Por ejemplo,

8.17 $$\int \operatorname{sen}^2 = \int \frac{1-\cos\circ(2I)}{2} = \frac{1}{2}[I - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\circ(2I)]$$

$$= \tfrac{1}{2}[I - \operatorname{sen}\cos]$$

y

8.18 $$\int \cos^2 = \int \frac{1+\cos\circ(2I)}{2} = \frac{1}{2}[I + \operatorname{sen}\cos].$$

También se tiene

8.19 $$\int \tan^2 = \int (\sec^2 - 1) = \tan - I$$

y

8.20 $$\int \cot^2 = \int (\csc^2 - 1) = -\cot - I.$$

Entre los problemas encontraremos otras relaciones.

Problemas

1. Encuéntrese cada una de las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{sen} 2x\,dx$

b) $\int x \cos x^2\,dx$

c) $\int \tan bx\,dx$

d) $\int \sec 3x \tan 3x\,dx$

e) $\int \cot 2x\,dx$

f) $\int x^2 \sec^2 x^3\,dx$

g) $\int \csc 3x\,dx$

h) $\int \frac{\cos}{1+\operatorname{sen}}$

i) $\int \tan \sec^2$

j) $\int \sec^2 (4x+2)\,dx$

k) $\int \frac{2\cos}{\operatorname{sen}^2}$

l) $\int \sec 3x\,dx$

m) $\int \cot \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}\,dx$

n) $\int \operatorname{sen} \cos$

o) $\int \cos^2 \operatorname{sen}$

p) $\int \tan \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2}\,dx$

q) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

r) $\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} + \cos)^2$

s) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 3x\,dx$

t) $\int (\tan + \cot)^2$

u) $\int \csc^2 4x\,dx$

v) $\int \tan^2 2t\,dt$

w) $\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \sec$

x) $\int \cos^4 \operatorname{sen}$

y) $\int \cot^2 3\theta\,d\theta$

z) $\int \frac{\operatorname{sen}}{\cos^4}$.

2. La identidad

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

puede usarse para transformar el integrando de una integral de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx \qquad m, n \geqslant 0$$

en un polinomio en $\operatorname{sen} x$ por $\cos x = D_x \operatorname{sen} x$ en el caso de que n sea impar o en un polinomio en $\cos x$ por $-\operatorname{sen} x = D_x \cos x$ cuando m sea impar. Cuando ambos, m y n, sean impares, cualquiera puede ser usada.

a) Verifíquese que

$$\int \operatorname{sen}^5 x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \operatorname{sen} x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= -\cos x + \tfrac{2}{3}\cos^3 x - \tfrac{1}{5}\cos^5 x .$$

b) Verifíquese que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x \, dx$$

$$= \int (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x) \cos x \, dx = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x.$$

3. Úsese el método del problema 2 para encontrar

a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx$ *b*) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^7 t \cos^3 t \, dt$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos^3 2\theta \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta$ *d*) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 2x \cos x \tan^2 x \, dx$

e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x \sec^2 x \, dx$ *f*) $\displaystyle\int \tan^2 x \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x \, dx$.

4. La identidad

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

puede usarse para convertir el integrando de una integral de la forma

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx \qquad m, n \geqslant 0$$

en un polinomio en $\sec x$ por $\tan x \sec x = D_x \sec x$ si m es impar o en un polinomio en $\tan x$ por $\sec^2 x = D_x \tan x$ si n es par. Cuando se tiene que m es impar y n es par, cualquiera puede ser usada. Úsese este método para encontrar

a) $\int \sec^6 x\,dx$ *b*) $\int \sec^3 x \tan^3 x\,dx$

c) $\int \sec^4 2x \tan^4 2x\,dx$ *d*) $\int \tan^3 x \sec^4 x\,dx$

e) $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\,dx$ *f*) $\int \sqrt{\tan x}\,\sec^6 x\,dx$

5. Úsese un método análogo al del problema 4 para encontrar

a) $\int \csc^3 x \cot^3 x\,dx$ *b*) $\int \csc^6 2x\,dx$

c) $\int \cot 3x \csc^3 3x\,dx$ *d*) $\int \cot^5 x \csc^4 x\,dx.$

6. El método del problema 2 no es aplicable a integrales del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$$

cuando tanto m como n son pares. En este caso las identidades

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

y

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

pueden usarse para reducir el integrando a una forma que pueda manejarse con facilidad. Verifíquese que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\int\left[1 + \cos 2x - \frac{1 + \cos 4x}{2} - (1 - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\right]dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x\right].$$

7. Úsese el método del problema 6 para encontrar

a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$ *b*) $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$

c) $\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\, dx$ *d*) $\int (1 + \operatorname{sen} 2x)^2\, dx$.

8. Úsense las identidades

$$\operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)]$$
$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$
$$\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

para encontrar

a) $\int \operatorname{sen} 6x \cos 4x\, dx$ *b*) $\int \operatorname{sen} 8x \operatorname{sen} 3x\, dx$

c) $\int \cos 4x \cos 5x\, dx$ *d*) $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\, dx$.

9. Úsese el método del problema 8 para mostrar que si m y n son enteros positivos, entonces

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

10. Escribiendo

$$\tan^n x = \tan^{n-2} x \tan^2 x = \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)$$

puede obtenerse la fórmula de reducción

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\,dx$$

a) Derívese la anterior fórmula de reducción.

b) Encuéntrese $\int \tan^4 x\,dx$.

c) Encuéntrese $\int \tan^5 x\,dx$.

11. *a*) Derivar una fórmula de reducción como la del problema 10 para

$$\int \cot^n x\,dx\,.$$

b) Encuéntrese $\int \cot^3 x\,dx$.

c) Encuéntrese $\int \cot^4 x\,dx$.

12. Encuéntrense cada una de las siguientes integrales

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$

b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos}{1+\text{sen}}$

c) $\int (\sec x + \csc x)^2 dx$

d) $\int \cot^2 \text{sen}$

e) $\int \sqrt{\text{sen}}\cos^3$

f) $\int \frac{\text{sen}\,2x}{\text{sen}\,x}\,dx$

g) $\int \frac{dx}{\sec 2x}$

h) $\int \text{sen}\,5x\cos 2x\,dx$

i) $\int \tan^3$

j) $\int \text{sen}^2 x\cos^4 x\,dx$

k) $\int (\tan - \cot)^3$

l) $\int (\sqrt{\text{sen}\,2x} - \cos 2x)^2\,dx$

m) $\int \sec^6$

n) $\int \frac{\sec^4}{\tan^5}$.

9. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas son funciones periódicas. Las funciones tangente y cotangente tienen periodo π y las restantes funciones trigonométricas tienen periodo 2π. Una función periódica no es univalente. Por ejemplo sen $(2n\pi+x)$ = sen x para todo entero n, luego hay infinitos pares ordenados en la función seno con el mismo segundo elemento. Como las funciones trigonométricas no son univalentes, no tienen funciones inversas. Sin embargo, si restringimos adecuadamente el dominio de definición de cada una de las funciones trigonométricas obtenemos nuevas funciones restringidas que sí son univalentes. Las inversas de estas funciones restringidas serán llamadas funciones trigonométricas inversas.

Por conveniencia, introducimos la notación f_ε para la función restringida

$$f_\varepsilon = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathfrak{D}_f \cap \mathcal{E}\}.$$

Es decir, f_ε es la función con dominio $\mathfrak{D}_f \cap \mathcal{E}$ y la misma regla de correspondencia que f.

9.1 Definición. a) sen_ε *donde* $\mathcal{E} = [-\pi/2, \pi/2]$ *es una función univalente cuya inversa llamada* ***seno inverso*** *o* ***arco seno***, $\text{sen}_\varepsilon^* = \text{arcsen}$, *tiene dominio* $\mathfrak{D}_{\text{arcsen}} = [-1, 1]$ *y rango* $\mathfrak{R}_{\text{arcsen}} = [-\pi/2, \pi/2]$.

b) $\cos_\varepsilon$ *donde* $\mathcal{E} = [0, \pi]$ *es una función univalente cuya inversa, llamada* ***coseno inverso*** *o* ***arco coseno***, $\cos_\varepsilon^* = \text{arccos}$, *tiene como dominio* $\mathfrak{D}_{\text{arccos}} = [-1, 1]$ *y rango* $\mathfrak{R}_{\text{arccos}} = [0, \pi]$.

c) $\tan_\varepsilon$ *donde* $\mathcal{E} = \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ *es una función univalente cuya inversa, llamada* ***tangente inversa*** *o* ***arco tangente***, $\tan_\varepsilon^* = \arctan$, *tiene dominio* $\mathfrak{D}_{\arctan} = \langle -\infty, \infty\rangle$ *y rango* $\mathfrak{R}_{\arctan} = \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$.

Las funciones arco cotangente, arco secante, y arco cosecante se usan rara vez. Sólo por afán de hacer una exposición completa las incluimos.

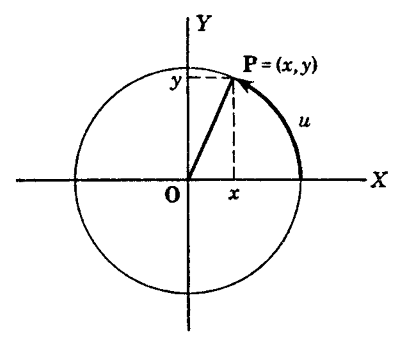
$\cot_\varepsilon$ donde $\mathcal{E} = \langle 0, \pi\rangle$ es una función univalente cuya inversa, a la que llamaremos *cotangente inversa* o *arco cotangente*, $\cot_\varepsilon^* = \text{arccot}$, tiene dominio $\mathfrak{D}_{\text{arccot}} = \langle -\infty, \infty\rangle$ y rango $\mathfrak{R}_{\text{arccot}} = \langle 0, \pi\rangle$.

$\sec_\varepsilon$ donde $\mathcal{E} = [-\pi, -\pi/2\rangle \cup [0, \pi/2\rangle$ es una función univalente cuya inversa, llamada *secante inversa* o *arco secante*, $\sec_\varepsilon^* = \text{arcsec}$, tiene dominio $\mathfrak{D}_{\text{arcsec}} = \langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$ y rango $\mathfrak{R}_{\text{arcsec}} = [-\pi, -\pi/2\rangle \cup [0, \pi/2\rangle$.

$\csc_\varepsilon$ donde $\mathcal{E} = \langle -\pi, -\pi/2] \cup \langle 0, \pi/2]$ es una función univalente cuya inversa, llamada *cosecante inversa* o *arco cosecante*, $\csc_\varepsilon^* = \text{arccsc}$, tiene dominio $\mathfrak{D}_{\text{arccsc}} = \langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$ y rango $\mathfrak{R}_{\text{arccsc}} = \langle -\pi, -\pi/2] \cup \langle 0, \pi/2]$.

Tenemos la siguiente interpretación geométrica del arco seno y del arco coseno.

Dado un número $y \in [-1, 1]$, hay un punto únicamente determinado $\mathbf{P} = (x, y)$ sobre la circunferencia unitaria en los cuadrantes 4º o 1º con y



$u = \text{arcsen}\, y \quad u = \text{arccos}\, x$

FIGURA 7

como su ordenada (figura 7). Entonces, arcsen y es la distancia del punto **P** medida a lo largo de la circunferencia al punto (1, 0). Si $y = \text{sen}\, u$, entonces $u = \text{arc sen}\, y$ es esta distancia, donde la distancia se mide yendo a no más de un cuarto de revolución de (1, 0). El número u es la longitud del arco desde $\mathbf{i} = (1, 0)$ hasta $\mathbf{P} = (x, y)$. Es decir, u es una medida en radianes del ángulo desde **i** a **P**.

Dado un número $x \in [-1, 1]$ hay un punto únicamente determinado $\mathbf{P} = (x, y)$ sobre la circunferencia unitaria en el 1º o 2º cuadrante con x como su abscisa (figura 7). Entonces, arccos x es la distancia del punto **P** al punto (1, 0) medida a lo largo de la circunferencia. Si $x = \cos u$, entonces $u = \text{arccos}\, x$ ésta es distancia cuando se ha medido no yendo a más de media revolución de (1, 0) en la dirección positiva.

Nota. Los dominios de definición de las funciones trigonométricas podrían restringirse de formas distintas a las aquí escogidas para obtener funciones univalentes y las funciones inversas luego definidas. Sin embargo, las elecciones aquí hechas para el seno, coseno, tangente y cotangente son las más comúnmente usadas. Nuestra elección para las funciones secante y cosecante fue dictada por la conveniencia de obtener funciones inversas con fórmulas de derivación sencillas. Sin embargo, esta elección tiene la desventaja de que las fórmulas

$$\text{arcsec} = \text{arccos} \circ I^{-1}$$

y

$$\text{arccsc} = \text{arcsen} \circ I^{-1}$$

se verifican solamente sobre $[1, \infty\rangle$. Si resulta más ventajoso que estas últimas fórmulas se verifiquen sobre todo el dominio de arco secante y arco cosecante, entonces la secante debe restringirse a $[0, \pi/2\rangle \cup \langle \pi/2, \pi]$ y la cosecante a $[-\pi/2, 0\rangle \cup \langle 0, \pi/2]$. Si hacemos esto en la fórmula de la derivada aparecen valores absolutos.

Nota. La notación sen^{-1} es a menudo usada para denotar la función arcsen. Un inconveniente de esta notación es que como sen^r se usa para denotar potencias de la función seno, no es claro cuando $r = -1$ si lo que se quiere representar es la función arcsen o $\dfrac{1}{\text{sen}} = \csc$. El procedimiento usual en este caso es adoptar la convención de que la potencia -1 debe escribirse siempre $\dfrac{1}{\text{sen}} = \csc$.

Las gráficas de las funciones trigonométricas inversas aparecen en las siguientes figuras 8 a 13.

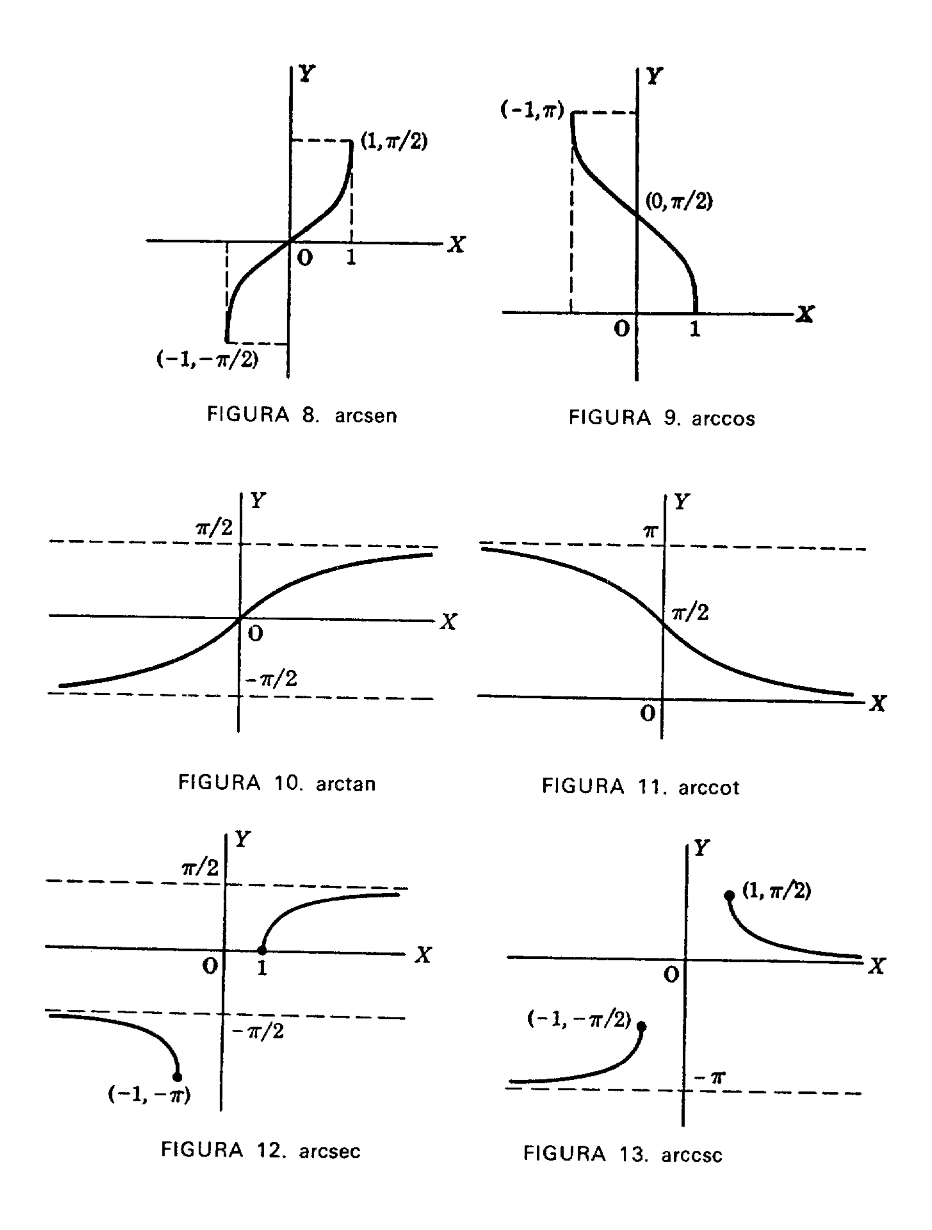


FIGURA 8. arcsen

FIGURA 9. arccos

FIGURA 10. arctan

FIGURA 11. arccot

FIGURA 12. arcsec

FIGURA 13. arccsc

9.2 Ejemplo. Encuéntrese arcsen $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SOLUCIÓN. Si $x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. De donde $x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi/4$.

9.3 Ejemplo. Encuéntrese arctan 5.00.

SOLUCIÓN. Si $x = \arctan 5.00$, entonces $\tan x = 5.00$ y $x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. En una tabla (en radianes) de funciones trigonométricas, encontramos que

$$\tan 1.37 = 4.913 \quad \text{y} \quad \tan 1.38 = 5.177.$$

De donde tenemos la aproximación $\arctan 5.00 = 1.37$.

9.4 Ejemplo. Demuéstrese que $\cos \circ \operatorname{arcsen} = \sqrt{1 - I^2}$ sobre $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN. (Figura 14.) Si $u = \operatorname{arcsen} y$, entonces $\operatorname{sen} u = y$ donde

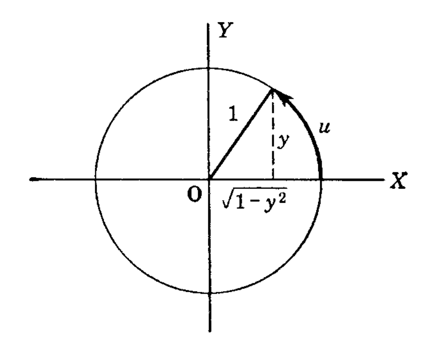


FIGURA 14

$y \in [-1, 1]$ y $u \in [-\pi/2, \pi/2]$. De la identidad $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u = 1$, tenemos $\cos u = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u}$ donde la solución no negativa se escoge porque $u \in [-\pi/2, \pi/2]$ implica que $\cos u \geqslant 0$. De donde $\cos u = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} = \sqrt{1 - y^2}$ y $\cos \circ \operatorname{arcsen} = \sqrt{1 - I^2}$ sobre $[-1, 1]$.

9.5 Ejemplo. Demuéstrese que si $a > 0$, entonces

$$\arccos \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} & \text{para } x \in [0, a] \\ -\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} & \text{para } x \in [-a, 0]. \end{cases}$$

SOLUCIÓN. Sea

$$y = \arccos \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Como $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \geqslant 0$, $y \in [0, \pi/2]$ y

$$\cos y = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}$$

mientras que

$$\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - \frac{a^2 - x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2}} = \frac{|x|}{a}.$$

Si $x \in [0, a]$, $|x| = -x$ y

$$\operatorname{sen} y = \frac{x}{a} \quad \text{o} \quad y = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$$

Si $x \in [-a, 0]$, $|x| = -x$ y

$$\operatorname{sen} y = \frac{-x}{a}, \quad \frac{x}{a} = -\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(-y)$$

o

$$-y = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}, \quad y = -\operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$$

Usando el teorema 2.4 (pág. 658), podemos mostrar que

9.6 $\qquad D \operatorname{arcsen} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - I^2}} \qquad$ sobre $\langle -1, 1 \rangle$

9.7 $\qquad D \arccos = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - I^2}} \qquad$ sobre $\langle -1, 1 \rangle$

9.8 $\qquad D \arctan = \dfrac{1}{1 + I^2} \qquad$ sobre $\langle -\infty, \infty \rangle$

9.9 $\qquad D \operatorname{arccot} = \dfrac{-1}{1 + I^2} \qquad$ sobre $\langle -\infty, \infty \rangle$

9.10 $D \operatorname{arcsec} = \dfrac{1}{I\sqrt{I^2-1}}$ sobre $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$

9.11 $D \operatorname{arccsc} = \dfrac{-1}{I\sqrt{I^2-1}}$ sobre $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$.

PRUEBA DE 9.6. Como la función seno es diferenciable con derivada distinta de cero sobre $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, por el teorema 2.4 la función arco seno es diferenciable sobre $\langle -1, 1\rangle$ y

$$D \operatorname{arcsen} = \frac{1}{(D \operatorname{sen}) \circ \operatorname{arcsen}} = \frac{1}{\cos \circ \operatorname{arcsen}} \quad \text{sobre } \langle -1, 1\rangle.$$

Por el ejemplo 9.4, cos arcsen $= \sqrt{1-I^2}$ sobre $\langle -1, 1\rangle$ y la ecuación 9.6 se sigue.

PRUEBA DE 9.8. Como la tangente es diferenciable con derivada distinta de cero sobre $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, por el teorema 2.4 arctan es diferenciable sobre R y

$$D \arctan = \frac{1}{(D \tan) \circ \arctan} = \frac{1}{\sec^2 \circ \arctan}$$

$$= \frac{1}{(1 + \tan^2) \circ \arctan} = \frac{1}{1+I^2}.$$

PRUEBA DE 9.10. Como la secante es diferenciable y tiene derivada no nula sobre $\langle -\pi, -\pi/2\rangle \cup \langle 0, \pi/2\rangle$, por el teorema 2.4 arcsec es diferenciable sobre $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$ y

$$D \operatorname{arcsec} = \frac{1}{(D \sec) \circ \operatorname{arcsec}} = \frac{1}{(\sec \tan) \circ \operatorname{arcsec}}$$

$$= \frac{1}{(\sec \circ \operatorname{arcsec})(\tan \circ \operatorname{arcsec})}.$$

Si $y = \operatorname{arcsec} x$, entonces $x = \sec y$ con $y \in [-\pi, -\pi/2\rangle \cup [0, \pi/2\rangle$. De donde $\tan y \geqslant 0$ y $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$ de modo que $\tan \circ (\operatorname{arcsec} x) = \sqrt{x^2-1}$ o $\tan \circ \operatorname{arcsec} = \sqrt{I^2-1}$ sobre $\langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$. Por tanto

$$D \operatorname{arcsec} = \frac{1}{I\sqrt{I^2-1}} \quad \text{sobre } \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle.$$

Las pruebas de las fórmulas restantes son completamente análogas y se dejan para el estudiante (problema 5).

Basándose en las fórmulas 9.6 a 9.11 pueden obtenerse fácilmente las fórmulas de integración:

9.12 $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} = -\arccos\frac{x}{a}, \quad a>0$$

9.13 $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} = -\frac{1}{a}\operatorname{arccot}\frac{x}{a}$$

9.14 $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} = -\frac{1}{a}\operatorname{arccsc}\frac{x}{a}, \quad a>0.$$

9.15 Ejemplo. Encuéntrese la derivada de f si

$$f(x) = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}.$$

Solución. $$D_x \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} = \frac{1/a}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{|a|}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\begin{cases} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} & \text{si } a>0 \\[2ex] = \dfrac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}} & \text{si } a<0. \end{cases}$$

9.16 Ejemplo. Encuéntrese $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{25-e^{2x}}}$.

Solución. Usando el método de integración por sustitución con $t = u(x) = e^x$, $u'(x) = e^x$, la integral indefinida

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{25-e^{2x}}} = \int \frac{u'(x)\,dx}{\sqrt{5^2-u^2(x)}}$$

queda reemplazada por

$$\int \frac{dt}{\sqrt{5^2-t^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{t}{5}.$$

Por tanto, reemplazando t por e^x en la anterior fórmula, tenemos

$$\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{25-e^{2x}}} = \operatorname{arcsen}\frac{e^x}{5}.$$

9.17 Ejemplo. Evalúese $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16}$.

SOLUCIÓN. Usando el método de integración por sustitución y haciendo $t = u(x) = x^2$, tenemos $u'(x) = 2x$, $u(0) = 0$, y $u(2) = 4$. Entonces

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^4+16} = \int_0^2 \frac{\frac{1}{2}u'(x)\,dx}{u^2(x)+16} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{dt}{t^2+4^2}$$

$$= \frac{1}{8}\arctan\frac{t}{4}\Big]_0^4 = \frac{1}{8}[\arctan 1 - \arctan 0] = \pi/32.$$

Problemas

1. Encuéntrense

a) $\operatorname{arcsen}(-\sqrt{2}/2)$ *b*) $\arctan 1$
c) $\arccos(-\frac{1}{2})$ *d*) $\operatorname{arcsen}(\sqrt{3}/2)$
e) $\arctan 0$ *f*) $\arccos(-1)$
g) $\operatorname{arcsec}\sqrt{2}$ *h*) $\operatorname{arccot}(-1)$
i) $\operatorname{arcsen}(3/4)$ *j*) $\arctan\frac{5}{12}$
k) $\arccos 0.90$ *l*) $\operatorname{arcsen}(-0.7833)$
m) $\arctan 0.25$ *n*) $\arccos(-0.30)$.

2. Demuéstrese que

a) $\operatorname{sen}\circ\arccos = \sqrt{1-I^2}$ sobre $[-1, 1]$
b) $\sec\circ\arctan = \sqrt{1+I^2}$ sobre R
c) $\cot\circ\operatorname{arccsc} = \sqrt{I^2-1}$ sobre $\langle-\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$
d) $\csc\circ\operatorname{arccot} = \sqrt{1+I^2}$ sobre R.

3. Demuéstrese que

a) $x = \operatorname{sen} y$ implica $y = (-1)^k \operatorname{arcsen} x + k\pi$ para algún entero k.
b) $x = \tan y$ implica $y = \arctan x + k\pi$ para algún entero k.
c) $x = \cos y$ implica $y = (-1)^k \arccos x + 2\pi\left[\frac{k+1}{2}\right]$ para algún entero k donde [ ] denota la función máximo entero contenido.

4. Demuéstrese que si $a > 0$ y $x \in [-a, a]$, entonces

$$\operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{x}{a}.$$

Sugerencia. Úsese la identidad $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y$ o (9.6) y (9.7).

5. Pruébense (9.7), (9,9), y (9.11).

6. Verifíquense (9.12), (9.13), y (9.14) diferenciando el segundo miembro en cada caso.

7. Encuéntrese $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2}$

b) $f(x) = \arctan \frac{x^2}{4}$

c) $f(x) = \operatorname{arcsen} (\cos x)$

d) $f(x) = \arccos 1/x$

e) $f(x) = \operatorname{arcsec} x^2$

f) $f(x) = \operatorname{arccot} \frac{x-1}{x}$.

8. Verifíquense cada una de las siguientes fórmulas. (Obsérvese que leídas de derecha a izquierda son fórmulas de integración.)

a) $$D_x \left\{ \frac{2}{\sqrt{b}} \arctan \sqrt{\frac{ax-b}{b}} \right\} = \frac{1}{x\sqrt{ax-b}}$$

b) $$D_x \left\{ \frac{2\sqrt{ax+b}}{c} - \frac{2}{c}\sqrt{\frac{ad-bc}{c}} \arctan \sqrt{\frac{c(ax+b)}{ad-bc}} \right\} = \frac{\sqrt{ax+b}}{cx+d} \left(\frac{ad-bc}{c} > 0 \right)$$

c) $$D_x \left\{ \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) \right\} = \sqrt{a^2-x^2} \quad (a > 0)$$

d) $$D_x \left\{ \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right\} = \frac{1}{ax^2+bx+c} \quad (b^2 < 4ac)$$

e) $$D_x \arccos\left(\frac{p-x}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{2px-x^2}}$$

f) $D_x\left\{\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\dfrac{1}{2a^3}\operatorname{arcsec} x/a\right\}=\dfrac{1}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$

g) $D_x\left\{-\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{2x^2}+\dfrac{1}{2a}\operatorname{arcsec} x/a\right\}=\dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^3}$ $(a>0)$

h) $D_x\{x \operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}\} = \operatorname{arcsen} x$

i) $D_x\{x \arccos x-\sqrt{1-x^2}\} = \arccos x$

j) $D_x\{x \arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\} = \arctan x.$

9. Encuéntrese

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{9+x^2}$

c) $\displaystyle\int_3^{3\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

d) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

e) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x\,dx}{9+x^2}$

f) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^4}}$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-9}}$

h) $\displaystyle\int_{-5/2}^{0} \frac{dx}{25+4x^2}$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16-9I^2}}$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-2I^2}}$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{I\sqrt{9I^2-225}}$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{I^2-4I+13}$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5+4I-I^2}}$

n) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{4-e^{2x}}}$

o) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{4x^2+25}\,dx$

p) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-4x+13}\,dx.$

10. Un árbol de 7.63 metros de altura se encuentra en la cima de una colina de 9.15 metros de altura. Si el ojo de un observador se encuentra a 1.53 metros del suelo, ¿a qué distancia debe encontrarse de un punto

directamente bajo el árbol para que sea máximo el ángulo formado por las visuales a la base y a la copa del árbol?

11. Un aeroplano está volando a 482.70 kilómetros/hora en línea recta y vuelo de altura constante. El punto más próximo de su trayectoria de vuelo a una antena de radar está a 16.09 kilómetros de ella. ¿A qué velocidad debe cambiar el ángulo de la antena para seguir la posición del aeroplano 6 minutos después que éste pasó por el punto más próximo a ella?

10. DIFERENCIACIÓN LOGARÍTMICA

En el cálculo de la derivada de productos, cocientes y potencias de funciones con frecuencia es de gran ayuda tomar el logaritmo del valor absoluto de la función y diferenciar luego. Este método, conocido como *diferenciación logarítmica*, se ilustra en los siguientes ejemplos.

10.1 Ejemplo. Encuéntrese $f'(x)$ si

$$f(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)\sqrt{x^2+2}}{(3-x^3)^{5/3}}.$$

SOLUCIÓN. Tenemos

$$\begin{aligned}\ln|f(x)| &= \ln\left\{\frac{|\operatorname{sen} x|\sqrt{x^2+2}}{|3-x^3|^{5/3}}\right\}\\ &= \ln|\operatorname{sen} x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+2) - \tfrac{5}{3}\ln|3-x^3|.\end{aligned}$$

Diferenciando obtenemos

$$D_x \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{2x}{2(x^2+2)} - \frac{5(-3x^2)}{3(3-x^3)}$$

o

$$\begin{aligned}f'(x) &= f(x)\left\{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{x}{x^2+2} + \frac{5x^2}{3-x^3}\right\}\\ &= \frac{(\operatorname{sen} x)\sqrt{x^2+2}}{(3-x^3)^{5/3}}\left\{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{x}{x^2+2} + \frac{5x^2}{3-x^3}\right\}.\end{aligned}$$

10.2 Ejemplo. Encuéntrese $f'(x)$ si

$$f(x) = u(x)^{v(x)}$$

donde u y v son funciones diferenciables y u es una función positivamente valuada. Daremos dos métodos equivalentes de solución.

SOLUCIÓN 1. De acuerdo con la definición 7.1,

$$f(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

Por tanto, por 5.2a (pág. 672) y la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{v(x)\ln u(x)}\left\{v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right\} \\ &= u(x)^{v(x)}\left\{v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right\} \\ &= u(x)^{v(x)}\, v'(x)\ln u(x)+v(x)\, u(x)^{v(x)-1}\, u'(x). \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2. Tomando el logaritmo de $f(x)$, tenemos

$$\ln f(x) = \ln u(x)^{v(x)} = v(x)\ln u(x),$$

de modo que al diferenciar obtenemos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

o

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\left\{v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right\} \\ &= u(x)^{v(x)}\, v'(x)\ln u(x)+v(x)\, u(x)^{v(x)-1}\, u'(x). \end{aligned}$$

Problemas

1. Usando la diferenciación logarítmica, encuéntrese la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

b) $f(x) = (x-1)^{1/2}(x+1)^{3/2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 e^x}{(x^2-1)^{5/3}\operatorname{sen} x}$

d) $f(x) = \dfrac{(\operatorname{sen} x)\sqrt{1+\cos^2 x}}{\tan^2 x}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$.

2. Encuéntrese $f'(x)$ para cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^x$, $x > 0$

b) $f(x) = (\text{sen } x)^{\cos x}$, $x \in [0, \pi\rangle$

c) $f(x) = (\ln x)^x$, $x \geqslant 1$

d) $f(x) = x^{x^x}$, $x > 0$.

11. FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Ciertas combinaciones de funciones exponenciales se presentan con tanta frecuencia en las aplicaciones que merecen que se les dé un nombre.[1]

11.1 Definición. *Las funciones* ***seno hiperbólico*** *y* ***coseno hiperbólico*** *están definidas por las relaciones*

$$\text{senh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Otras funciones hiperbólicas están definidas en términos de senh y cosh de forma análoga a la en que tan, cot, sec, y csc están definidas en términos de sen y cos.

$$\tanh x = \frac{\text{senh } x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\text{senh } x}$$

$$\text{sech } x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\text{csch } x = \frac{1}{\text{senh } x}.$$

En las figuras 15, 16, y 17, respectivamente, mostramos las gráficas de las funciones seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica. En la mayor parte de las tablas matemáticas pueden encontrarse valores de estas funciones.

[1] Lo de "hiperbólico" en el nombre de las funciones, viene del hecho de que las funciones hiperbólicas guardan relaciones con la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ análogas a las existentes entre las funciones trigonométricas o circulares y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Véase, por ejemplo, "Diferential and Integral Calculus" de R. Courant, Interscience Publishers, New York, Nueva York, vol. 1, pág. 188, 1937.

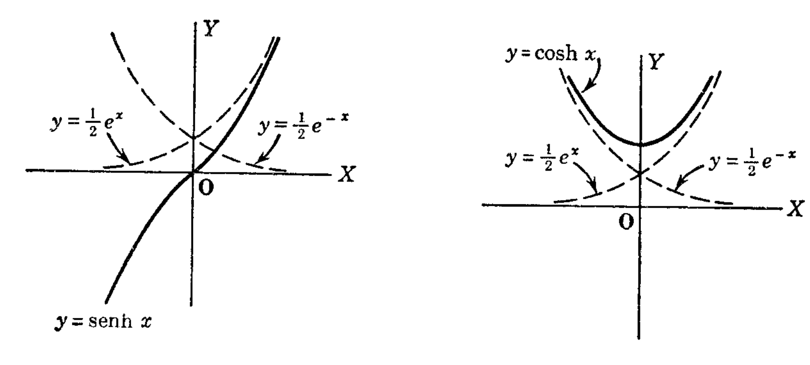


FIGURA 15

FIGURA 16

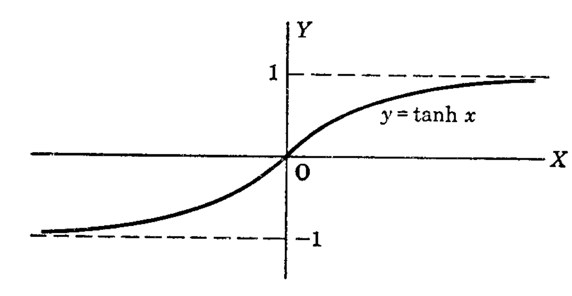


FIGURA 17

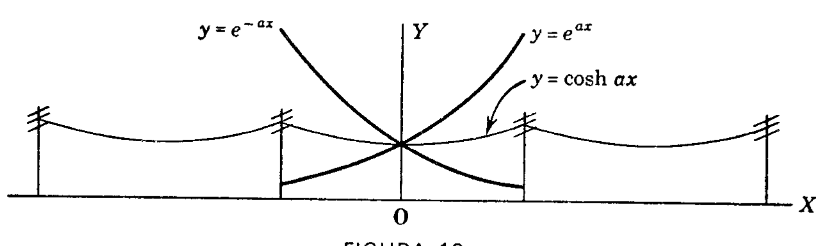


FIGURA 18

Problemas

1. Establézcanse las siguientes identidades:

a) $\cosh^2 x - \text{senh}^2\, x = 1$

b) $\tanh^2 x + \text{sech}^2\, x = 1$

c) $\coth^2 x - \text{csch}^2\, x = 1$

d) $\text{senh}\,(-x) = -\text{senh}\, x$

e) $\cosh\,(-x) = \cosh x$

f) $\tanh\,(-x) = -\tanh x$

g) $\text{senh}\,(x \pm y) = \text{senh}\, x \cosh y \pm \cosh x\, \text{senh}\, y$

h) $\cosh\,(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \text{senh}\, x\, \text{senh}\, y$

i) $\text{senh}\, 2x = 2\, \text{senh}\, x \cosh x$

j) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$
k) $2 \operatorname{senh}^2 (x/2) = \cosh x - 1$
l) $2 \cosh^2 (x/2) = \cosh x + 1$.

2. Establézcanse las siguientes fórmulas de derivación:

a) $D_x \operatorname{senh} x = \cosh x$ *b*) $D_x \cosh x = \operatorname{senh} x$
c) $D_x \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$ *d*) $D_x \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$
e) $D_x \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$ *f*) $D_x \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$.

3. Las funciones seno hiperbólico y tangente hiperbólica tienen funciones inversas denotadas por arcsenh = senh* y arctanh = tanh* respectivamente.

a) Demuéstrese que $\operatorname{arcsenh} x = \ln (x + \sqrt{x^2+1})$.

b) Demuéstrese que $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$, $|x| < 1$.

12. EL TEOREMA DE TAYLOR. LA APROXIMACIÓN DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES

En nuestras consideraciones sobre funciones elementales hemos estudiado las propiedades de muchas de estas funciones, pero en la mayor parte de los casos no hemos dado método alguno para calcular sus valores. Por ejemplo, ¿a qué es igual sen $\frac{1}{2}$ o $\exp(1) = e$? Realmente lo que queremos conocer es: ¿cuál es una aproximación decimal de sen $\frac{1}{2}$ y de $\exp(1)$? Como los valores de una función polinomial son fáciles de calcular —basta tan solo efectuar un número finito de multiplicaciones y adiciones— si pudiéramos aproximar estas funciones elementales por funciones polinomiales, entonces tendríamos un método sencillo para determinar valores aproximados de estas funciones.

Un método tal es exactamente el de aproximación por el uso de diferenciales. Si f es diferenciable sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ y $x_0 \in \mathfrak{J}$, entonces, para cualquier punto $x_0 + h \in \mathfrak{J}$,

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(x_0; h)$$

donde $\lim_{h \to 0} \varphi(x_0; h) = 0$; o, lo que es equivalente, para cualquier punto $x \in \mathfrak{J}$

12.1 $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \psi(x_0; x)(x - x_0)$$

donde $\lim_{x \to x_0} \psi(x_0; h) = 0$. La fórmula (12.1) nos dice que el valor de f en cualquier punto $x \in \mathfrak{J}$ es el valor del polinomio de primer grado $f(x_0) + f'(x_0)(I - x_0)$ en x más un término (el término del error) que es pequeño cuando x está próximo a x_0.

Es deseable extender este método de aproximación, ya que por lo anterior no tenemos ninguna forma de estimar la magnitud del error y el uso de un polinomio de primer grado puede que no nos dé una precisión suficiente en un problema dado. En esta sección desarrollamos una fórmula para aproximar funciones por polinomios de grado arbitrario con una expresión para el término del error que nos permitirá estimar hasta qué punto es buena nuestra aproximación.

El polinomio aproximativo $f(x_0)+f'(x_0)(I-x_0)$ usado en el método de la diferencial es un polinomio cuyo valor en x_0 es $f(x_0)$ y cuya derivada en x_0 es $f'(x_0)$. Esto nos sugiere que podríamos aproximar f por un polinomio P de grado n que tuviera la propiedad de que los valores de P y sus primeras n derivadas coincidieran con los de f en x_0; $P(x_0) = f(x_0)$, $P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. Desde luego, para tener una aproximación tal para f, f debe ser diferenciable n veces en x_0, y, en este caso, hay solamente un polinomio tal. Sus coeficientes pueden determinarse como sigue.

Sea
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k(I-x_0)^k$$
un polinomio tal. Entonces
$$f(x_0) = P(x_0) = a_0$$
y, como
$$P^{(m)} = \sum_{k=m}^{n} \frac{k!}{(k-m)!} a_k(I-x_0)^{k-m}, \quad m = 1, \ldots, n,$$
$$f^{(m)}(x_0) = P^{(m)}(x_0) = m!a_m.$$

De donde $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(I-x_0)^k$, donde $f^{(0)} = f$.

Una expresión útil para el término del error cuando aproximamos una función f por el polinomio $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(I-x_0)^k$ viene dada por el teorema de Taylor.

12.2 Teorema. (Teorema de Taylor.) *Si f tiene derivadas continuas hasta las de orden $n+1$ inclusive sobre el intervalo $\mathfrak{I}$, entonces, para cualquier $x \in \mathfrak{I}$, si $x_0 \in \mathfrak{I}$, se tiene*

12.3
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

donde $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$

PRUEBA. Como existe el número necesario de derivadas de f en x_0, es claro que $f(x)$ puede escribirse en la forma (12.3). Esta expresión simplemente define $R_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Lo que debemos probar es que $R_n(x) = \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$. Si hacemos

$g(t) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}$, entonces $g(x) = f(x)$ y $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(x-x_0)^k$, de donde

$$R_n(x) = g(x)-g(x_0) = \int_{x_0}^{x} g'$$

Como f tiene derivadas continuas hasta las de orden $(n+1)$ inclusive sobre $\mathfrak{J}$, sabemos que g' es continua sobre el intervalo cerrado de puntos extremos x_0 y x, y de aquí que $\int_{x_0}^{x} g'$ existe. En realidad

$$g'(t) = f'(t) + \sum_{k=1}^{n}\left[-f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} + f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}\right]$$

$$= f'(t)-f'(t) - \sum_{k=2}^{n} f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=2}^{n+1} f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Por tanto,

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Lo que completa la prueba del teorema de Taylor.

La fórmula (12.3) en el teorema de Taylor se llama *fórmula de Taylor* respecto al punto x_0 y al término R_n se le llama *residuo*. Considerando la fórmula de Taylor como una fórmula para la aproximación, si hacemos $E_n = |R_n|$, entonces llamamos a E_n *error de truncamiento*. Si hacemos $n = 1$ en el teorema de Taylor, tenemos una fórmula por aproximación por

diferenciales con una expresión para el residuo que es adecuada para estimar el error de truncamiento:

12.4
$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt$$
$$= f(x_0)+df(x_0;\, x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt.$$

12.5 Ejemplo. Obténgase un valor aproximado de $\sqrt{265}$ por el método de la diferencial y determínese una cota para el error de truncamiento.

SOLUCIÓN. Sea $f = I^{1/2}$; entonces $f' = \frac{1}{2}I^{-1/2}$ y $f'' = -\frac{1}{4}I^{-3/2}$. Como f'' es continua sobre $\langle 0, \infty\rangle$ tenemos:

$$\sqrt{x} = \sqrt{x_0} + \frac{x-x_0}{2\sqrt{x_0}} - \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} t^{-3/2}(x-t)\,dt$$
$$= \frac{x+x_0}{2\sqrt{x_0}} - \frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} t^{-3/2}(x-t)\,dt.$$

El número x_0 debe tomarse cercano a $\sqrt{265}$, pero, al mismo tiempo, debe escogerse de modo que $\sqrt{x_0}$ sea fácil de calcular. Escogiendo $x_0 = 256$, obtenemos

$$\sqrt{265} = \frac{265+256}{32} - \frac{1}{4}\int_{256}^{265} t^{-3/2}(265-t)\,dt.$$

Así pues $\frac{521}{32}$ es una aproximación para $\sqrt{265}$ con un error de truncamiento

$$E_1 = \frac{1}{4}\int_{256}^{265} t^{-3/2}(265-t)\,dt \leqslant \frac{1}{4(256)^{3/2}}\int_{256}^{265}(265-t)\,dt$$
$$= \frac{1}{16{,}384}\cdot\frac{81}{2} < .003.$$

Como $-.003 < R_1 < 0$ y $16.281 < \frac{521}{32} < 16.282$,

$$16.278 < \sqrt{265} < 16.282.$$

Podemos decir que $\sqrt{265} = 16.28$ tiene correctas dos cifras decimales. Decir que $\sqrt{265}$ es 16.28 con dos cifras decimales correctas significa que

$$16.275 \leqslant \sqrt{265} \leqslant 16.285.$$

Si se desea una mejor aproximación para $\sqrt{265}$, podemos escoger $x_0 = (16.28)^2$, el cuadrado de la anterior aproximación y proceder como anteriormente. Entonces

$$\sqrt{265} = \frac{265+265.0384}{32.56} - \frac{1}{4}\int_{265.0384}^{265} t^{-3/2}(265-t)\,dt.$$

Así pues $\frac{530.0384}{32.56}$ es una aproximación a $\sqrt{265}$ con un error de truncamiento

$$E_1 = \frac{1}{4}\int_{265.0384}^{265} t^{-3/2}(265-t)\,dt \leqslant \frac{1}{4(256)^{3/2}}\int_{265.0384}^{265} (265-t)dt$$

$$= \frac{.00147456}{32768} < .000{,}000{,}05.$$

Como $-.000{,}000{,}05 < R_1 < 0$ y

$$16.278{,}820{,}63 < \frac{530.0384}{32.56} < 16.278{,}820{,}64,$$

obtenemos

$$16.278{,}820{,}58 < \sqrt{265} < 16.278{,}820{,}64.$$

Así pues $\sqrt{265} = 16.278{,}820{,}6$ tiene 7 cifras decimales correctas.

Usando el teorema del valor medio para las integrales (teorema 8.4, pág. 571), podemos expresar el residuo R_n en otra forma que es en muchos casos más conveniente.

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n\,dt$$

12.6

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

para algún punto c entre x_0 y x. Se llama a ésta la *forma de Lagrange del residuo.*

12.7 Ejemplo. Hállese una aproximación a la función seno sobre el intervalo cerrado $[-\pi/4, \pi/4]$ por un polinomio de forma tal que el error de truncamiento sea menor que 1×10^{-5}.

SOLUCIÓN. Como todas las derivadas del seno son continuas sobre R —son $\pm$ sen o $\pm$ cos— el teorema de Taylor se verifica para cualesquier valores de n y x_0. Tomemos $x_0 = 0$. Usando la forma de Lagrange para el residuo (12.6), tenemos, para cualquier $x \in [-\pi/4, \pi/4]$, que $R_n(x)$ es o $\pm \dfrac{\text{sen}\, c}{(n+1)} x^{n+1}$ o $\pm \dfrac{\cos c}{(n+1)!} x^{n+1}$ donde c está entre 0 y x. Así pues

$$E_n(x) \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{(\pi/4)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{(n+1)!}.$$

Consultando una tabla de recíprocos de los factoriales, encontramos que $\frac{1}{9}$ es menor que 1×10^{-5}. Por tanto, si tomamos $n = 8$ en la fórmula de Taylor, tendremos una aproximación polinomial a la función seno con error de truncamiento menor que 1×10^{-5} sobre el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$. Desarrollando la fórmula de Taylor con $n = 8$, tenemos

$$\text{sen}\, x = \text{sen}\, 0 + x \cos 0 - \frac{x^2}{2!} \text{sen}\, 0 - \frac{x^3}{3!} \cos 0 + \frac{x^4}{4!} \text{sen}\, 0$$

$$+ \frac{x^5}{5!} \cos 0 - \frac{x^6}{6!} \text{sen}\, 0 - \frac{x^7}{7!} \cos 0 + \frac{x^8}{8!} \text{sen}\, 0 + \frac{x^9}{9!} \cos c$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \cos c.$$

El polinomio $I - \dfrac{I^3}{3!} \dfrac{I^5}{5!} \dfrac{I^7}{7!}$ es una aproximación de la función seno con error de truncamiento menor que 1×10^{-5} sobre el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$.

Podemos usar la fórmula determinada en el ejemplo 12.7 para obtener una aproximación a sen $\frac{1}{2}$.

$$\text{sen}\, \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{2^5 5!} - \frac{1}{2^7 7!} + \frac{1}{2^9 9!} \cos c, \quad c \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$$

y, por tanto, sen $\frac{1}{2}$ = .479,425,5 con 7 cifras decimales correctas.

12.8 Ejemplo. Determínese el valor de $\exp(1) = e$ con cinco cifras decimales exactas.

SOLUCIÓN. Como todas las derivadas de exp son continuas sobre R, el teorema de Taylor se verifica para valores cualesquiera de n y x_0. Tomemos $x_0 = 0$. Usando la forma de Lagrange para el residuo, tenemos para

cualquier $x \in \mathrm{R}$,

$$e^x = e^0 + xe^0 + \frac{x^2}{2!}e^0 + \ldots + \frac{x^n}{n!}e^0 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c,$$

donde c está entre 0 y x. Así pues,

$$E_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \quad \text{donde } c \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Como $e < 3$, $E_n(1) < \dfrac{3}{(n+1)!}$ y $E_9(1) < 1 \times 10^{-6}$. Tenemos pues que

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}$$

con error de truncamiento menor que 1×10^{-6} y $e = 2.71828$ tiene cinco cifras decimales exactas.

El teorema de Taylor puede usarse para establecer algunas desigualdades útiles. Por ejemplo, la fórmula para e^x obtenida en el ejemplo 12.8 da lugar a las desigualdades

$$1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + 3^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{para } x \geqslant 0.$$

De una manera análoga podemos usar el teorema de Taylor para determinar los valores extremos de una función cuya primera y segunda y posiblemente derivadas más altas son cero en un punto.

12.9 Ejemplo. ¿Tiene un valor extremo en 0 la función f definida por

$f(x) = e^x - x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}$?

SOLUCIÓN. Como para todo $x \in \mathrm{R}$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}e^c$$

donde c está entre 0 y x,

$$f(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} = 1 + \frac{x^4}{24}e^c \geqslant 1.$$

Así pues, $f(0) = 1$ es el valor mínimo de f en R.

Damos ahora algunos teoremas que cubren estos problemas de valores extremos.

12.10 Teorema. *Supongamos que $f^{(n)}$ es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$ que contiene a x_0 y que $f^{(k)}(x_0) = 0$ para $k = 1, \ldots, n-1$ donde n es un entero mayor que 1.*

1) *Si n es par y $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathfrak{J}$, entonces $f(x_0)$ es el valor mínimo de f sobre $\mathfrak{J}$.*

2) *Si n es par y $f^{(n)}(x) \leqslant 0$ para todo $x \in \mathfrak{J}$, entonces $f(x_0)$ es el valor máximo de f sobre $\mathfrak{J}$.*

PRUEBA. Usando la forma de Lagrange del residuo en el teorema de Taylor, tenemos para todo $x \in \mathfrak{J}$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$$

donde c está sobre algún punto entre x y x_0.

1) Si n es par y $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathfrak{J}$, entonces $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \geqslant 0$. Así pues, para todo $x \in \mathfrak{J}$, $f(x) \geqslant f(x_0)$ y $f(x_0)$ es el valor mínimo de f sobre $\mathfrak{J}$.

La prueba de (2) es análoga.

Para aplicar el teorema 12.10 debemos conocer algo sobre los valores de $f^{(n)}$ en una vecindad de x_0. En el siguiente teorema necesitamos conocer solamente el valor de $f^{(n)}$ en x_0. Este teorema es una extensión del método de la segunda derivada (teorema 5.6, pág. 464).

12.11 Teorema. *Supongamos que $f^{(n-1)}$ es continua en una vecindad $\mathcal{N}(x_0)$ de x_0, $f^{(k)}(x_0) = 0$ para $k = 1, \ldots, n-1$, y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, donde n es un entero mayor que 1.*

1) *Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo en x_0.*
2) *Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo en x_0.*
3) *Si n es impar, entonces f no tiene un valor extremo en x_0.*

PRUEBA. Usando el teorema de Taylor con la forma de Lagrange del residuo, tenemos para cualquier $x \in \mathcal{N}(x_0)$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}, \text{ donde } c \text{ está entre } x \text{ y } x_0.$$

1) Si $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces, como

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x - x_0},$$

existe una vecindad $\langle a, b\rangle$ de x_0 tal que (teorema 3.16, pág. 350) $f^{(n-1)} < 0$ para $x \in \langle a, x_0\rangle$ y $f^{(n-1)}(x) > 0$ para $x \in \langle x_0, b\rangle$. Si n es par, entonces para $x \in \langle a, x_0\rangle$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} > f(x_0)$$

y, para $x \in \langle x_0, b\rangle$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} > f(x_0).$$

Así pues, f tiene un mínimo en x_0.

2) Si $f^{(n)}(x_0) < 0$ y n es par, entonces $-f$ tiene un mínimo en x_0 por la parte (1) de este teorema. Luego f tiene un máximo en x_0.

3) Si $f^{(n)}(x_0) > 0$ y n es impar, entonces, para $x \in \langle a, x_0\rangle$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} < f(x_0)$$

y para $x \in \langle x_0, b\rangle$,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} > f(x_0).$$

Así pues, f no tiene un valor extremo en x_0. Si $f^{(n)}(x_0) < 0$ y n es impar, entonces $-f$ no tiene un valor extremo en x_0. Luego f no tiene un valor extremo en x_0.

El teorema 12.11 nos dice que si la primera derivada distinta de cero de una función f en un punto x_0 es de orden par, entonces f tiene un valor extremo en x_0. Este valor extremo es un mínimo si el valor de la primera derivada distinta de cero en x_0 es positivo, y un máximo si el valor es negativo.

12.12 Ejemplo. ¿Tiene un valor extremo en 0 la función f definida por $f(x) = x^2(1 - \cos x) + x^5 \cos 2x$?

SOLUCIÓN. Investigando los valores de las derivadas de f en 0, tenemos:

$$f'(x) = x^2 \operatorname{sen} x + 2x(1 - \cos x) - 2x^5 \operatorname{sen} 2x + 5x^4 \cos 2x$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(x) = x^2 \cos x + 4x \operatorname{sen} x + 2(1 - \cos x) - 20x^4 \operatorname{sen} 2x$$
$$-4x^5 \cos 2x + 20x^3 \cos 2x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x + 6 \operatorname{sen} x - 120x^3 \operatorname{sen} 2x$$
$$-60x^4 \cos 2x + 8x^5 \operatorname{sen} 2x + 60x^2 \cos 2x$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = -x^2 \cos x - 8x \operatorname{sen} x + 12 \cos x + 120x \cos 2x$$
$$-480x^2 \operatorname{sen} 2x - 480x^3 \cos 2x$$
$$+160x^4 \operatorname{sen} 2x + 16x^5 \cos 2x$$

$$f^{(4)}(0) = 12.$$

Así pues, por el teorema 12.11, f tiene un mínimo relativo en 0.

Problemas

1. Desarróllese la fórmula de Taylor para los siguientes casos:

a) $f = I^3 - 3I^2 + 5;\ x_0 = 0;\ n = 3$
b) $f = I^3 - 3I^2 + 5;\ x_0 = 2;\ n = 3$
c) $f = I^5 + 4I^3 - I;\ x_0 = 0;\ n = 3$
d) $f = \cos;\ x_0 = 0;\ n = 8$
e) $f = \cos;\ x_0 = \pi/2;\ n = 8$
f) $f = \ln;\ x_0 = 1;\ n = 7$
g) $f = \arctan;\ x_0 = 0;\ n = 4$
h) $f = \operatorname{arcsen};\ x_0 = 0;\ n = 4$
i) $f = (1+I)^6;\ x_0 = 0;\ n = 6$
j) $f = (1+I)^{1/2};\ x_0 = 0;\ n = 6$
k) $f = (1+I)^{-1/2};\ x_0 = 0;\ n = 6$
l) $f = (1+I)^r$ [r real]; $x_0 = 0;\ n = 6$.

2. Desarróllese la fórmula de Taylor para tan con $x_0 = 0$ y $n = 4$. ¿Para qué intervalo es válida esta fórmula?

3. Usando diferenciales, calcúlense los siguientes números con cuatro cifras decimales exactas.

a) $\sqrt{145}$ *b*) $\sqrt{34}$
c) $\sqrt{20}$ *d*) $\sqrt[3]{9}$.

4. Desarróllese una aproximación por un polinomio a la función coseno sobre el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$ de forma que el error por truncamiento sea menor que 1×10^{-5}. Calcúlese una aproximación para $\cos \frac{1}{3}$.

5. Determínese un intervalo sobre el cual I se aproxime al seno con un error por truncamiento menor que 1×10^{-3}.

6. Hállese una aproximación a $I^{1/2}$ sobre el intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ por un polinomio en $(I-1)$ de forma que el error por truncamiento sea menor que 1×10^{-3}.

7. Establézcanse las siguientes desigualdades:

a) $(1+x)^r \geqslant 1+rx$, donde $x \geqslant 1$ y $r \geqslant 1$

b) $(1+x)^r \geqslant 1+rx + \dfrac{r(r-1)}{2}x^2$, donde $x \geqslant 0$ y $r \geqslant 2$

c) $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!}, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]$

d) $x - \dfrac{x^3}{3!} \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}, \quad x \in [0, 3]$.

8. ¿Tienen un valor extremo en 0 las siguientes funciones?

a) $I^7 - 4I^3$

b) $-I^{10} + I^6$

c) $\operatorname{sen} - I$

d) $\operatorname{sen} - I + \frac{1}{6}I^3$

e) $\frac{2}{15}I^5 + \frac{1}{3}I^3 + I - \tan$

f) $\frac{1}{24}I^4 - \frac{1}{2}I^2 + 1 - \cos$.

9. ¿Tiene un valor extremo en 0 la función f definida por

$$f(x) = x^2(1 - \cos x) + x^3 \cos 2x.$$

10. Úsese el teorema de Taylor para demostrar la fórmula del binomio.

11. Si f'' es positiva sobre un intervalo $\langle a, b\rangle$ (y es, por tanto, cóncava hacia arriba la función f sobre $\langle a, b\rangle$), demuéstrese que sobre $\langle a, b\rangle$ la gráfica de f se encuentra sobre la recta tangente a la gráfica en cualquier punto de $\langle a, b\rangle$.

12. Determínese $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$.

13. RESUMEN

En este capítulo hemos completado nuestro estudio de las funciones elementales. Las funciones elementales son las algebraicas, las trigonométricas, las inversas trigonométricas, las logarítmicas, las exponenciales, las hiperbólicas y las hiperbólicas inversas. Algunas de estas funciones se introdujeron por primera vez en este capítulo y hemos estudiado en él sus

propiedades básicas. Las funciones elementales son las que se presentan con más frecuencia en las aplicaciones del cálculo. Sin embargo, para ciertas aplicaciones importantes son necesarias otras funciones a las que se les suele llamar funciones especiales.

En la sección 12, introdujimos el teorema de Taylor y obtuvimos así un método para aproximarnos a una función por un polinomio. El polinomio asociado a una función f por el teorema de Taylor es tal, que su valor y los valores de sus n primeras derivadas coinciden con los correspondientes valores de f y sus primeras n derivadas en un punto x_0. Para que f pueda tener una aproximación tal, es necesario que sea diferenciable n veces en x_0. El teorema de Taylor nos da una expresión para el error en esta aproximación que nos permite estimar cuán buena es la aproximación. Hemos visto que el teorema de Taylor da un método para determinar valores de una función. En particular, este método es aplicable a las funciones elementales y nos provee con un procedimiento para obtener una tabla de valores para cualquiera de estas funciones.

Problemas de repaso

1. Si $f = I^2+2I+3$ sobre $[0, \infty]$, encuéntrese

a) $f^*(3)$ *b*) $f^*(11)$

c) $f^*(25)$ *d*) $\mathfrak{D}_{f^*}$

e) f^* *f*) Df^*

2. Determínense:

a) $D[I^{1/3} \circ (I^3+1)]$ *b*) $D[I^{1/2} \circ \text{arcsen}]$

c) $D[\arctan \circ I^2]$ *d*) $D[\exp \circ \text{sen}]$

e) $D_x \text{ arcsen}^2 x$ *f*) $D_x \arctan e^x$

g) $D_x \text{ arcsen} \sqrt{1-2x}$ *h*) $D_x \ln |\cos x|$

i) $D_x \ln \ln x$ *j*) $D_x \ln |\tan x + \sec x|$.

3. Demuéstrese que

a) $\ln (x+\sqrt{x^2-1}) = -\ln (x-\sqrt{x^2-1}), \; |x| > 1$

b) $\ln (x+\sqrt{x^2-1}) = \text{arccosh } x$ donde $x \in [1, \infty\rangle$ y el rango de arccosh es $[0, \infty\rangle$

c) $\text{arccoth } x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$.

4. Encuéntrense

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{x^2+1}$ *b*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1}$

c) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$ *d*) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos^2\frac{1}{2}x\,dx$ *f*) $\displaystyle\int \tan 2x\sec^2 2x\,dx$

g) $\displaystyle\int_1^e \frac{1+\ln}{I}$ *h*) $\displaystyle\int \frac{\cos}{1+\operatorname{sen}}$

i) $\displaystyle\int \frac{\exp}{a+b\exp}$ *j*) $\displaystyle\int_0^\pi e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,dx$

k) $\displaystyle\int (e^{2x}+3^{2x})\,dx$ *l*) $\displaystyle\int e^{2x}3^{2x}\,dx$

m) $\displaystyle\int_0^a \cosh\frac{x}{a}\,dx$ *n*) $\displaystyle\int \sec\circ(aI)$

o) $\displaystyle\int \sec 3x\tan 3x\,dx$ *p*) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2}$.

5. Dibújese la gráfica de cada una de las siguientes funciones mostrando todos los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

a) $f(x) = \begin{cases} x\ln|x| & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = xe^{-x^2}$.

6. Encuéntrese el volumen generado haciendo girar la porción de gráfica de $y = e^{-x^2}$ entre $x = 0$ y $x = 2$ alrededor del eje Y.

7. Si f es una función continua tal que

$$x^3 = \int_a^x f,$$

demuéstrese que $f = 3I^2$ y determínense el valor o valores de a para los que tal ecuación se verifica.

8. Si f es una función continua tal que

$$\operatorname{sen} x = b + \int_a^x f$$

encuéntrese f. ¿Para qué valores de b satisfce f la anterior ecuación y de qué manera depende a de b?

9. Demuéstrese que si $\dot{y} = ay$ sobre $\langle -\infty, \infty \rangle$ y $y(0) = c$, entonces $y(t) = ce^{at}$ para todo $t \in \langle -\infty, \infty \rangle$.

Sugerencia. Si $\dot{y} = ay$ sobre $\langle -\infty, \infty \rangle$, entonces $e^{-at}(\dot{y}(t) - ay(t)) = 0$ para todo $t \in \langle -\infty, \infty \rangle$.

10. Determínense todas las soluciones de la forma $x(t) = ae^{\lambda t}$ de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0$
b) $\ddot{x} - 10\dot{x} + 4x = 0$
c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$.

11. Demuéstrese que el problema 10*c* tiene soluciones de la forma $x(t) = ae^{\beta t} \cos \omega t$. Determínense todas las soluciones.

12. Determínense los valores de a, b, y λ tales que $x(t) = ae^{\lambda t}$ y $y(t) = be^{\lambda t}$ son soluciones de los siguientes pares de ecuaciones diferenciales:

a) $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$

13. Determínense soluciones de la ecuación diferencial $\ddot{x} - x = 0$ que satisfagan:

a) $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$
b) $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$
c) $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$.

Sugerencia. e^t y e^{-t} satisfacen la ecuación diferencial.

14. Resuélvanse las siguientes ecuaciones por aproximaciones sucesivas:

a) $x^2 = \ln(x+1)$
b) $x = 5 \ln x$, $x \in \langle 0, 10]$
c) $x = e^{-x}$
d) $\ln x = 1.5 - x$
e) $e^{-x} = \operatorname{sen} x$, $x \in [0, \pi/2]$
f) $e^x + x + 1 = 0$
g) $\tan x = \ln(x+2)$, $x \in [0, 1]$.

15. *a*) Desarróllese la fórmula de Taylor con $x_0 = 0$ para $\ln(a+x)$.
b) Calcúlese ln 1.1 con error menor que 0.000.005. Compárese su contestación con el valor obtenido de una tabla de cinco cifras de la función logaritmo natural.
c) Calcúlese ln 1.2 con error menor que 0.000.005. Compárese el resultado obtenido con el dado en una tabla de cinco cifras.
d) Si ln 2 = 0.69315 con error menor que 0.000.005, calcúlese ln 2.1 con error menor que 0.000.01.

16. Demuéstrese que

a) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \geqslant 1, \quad x \in \langle -\infty, \infty \rangle$

b) $\cosh x + \cos x \geqslant 2, \quad x \in \langle -\infty, \infty \rangle$

c) $\ln x \leqslant \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \geqslant 1.$

17. Determínese el grado de exactitud de la aproximación

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 \text{ sobre } [-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}].$$

Capítulo

$$\int \frac{dx}{(ax + bx + c)^n}$$ **15**

Método de integración

1. INTRODUCCIÓN

Hemos visto que pueden definirse funciones por integrales. Por ejemplo, la función logaritmo natural fue definida por la integral

$$\ln = \int_1 I^{-1} \quad \text{sobre } \langle 0, \infty \rangle.$$

El estudio de funciones F definidas por integración,

$$F = \int_a f,$$

consta de dos problemas: 1) la determinación de las propiedades generales de la función y 2) la determinación de los valores de la función.

En la sección 4 del capítulo 14 consideramos el primer problema con respecto a la función logaritmo natural. Encontramos que la función logaritmo es una función diferenciable creciente sobre su dominio, de donde ha de tener una función inversa creciente la función exponencial. Encontramos también que la función logaritmo satisface la identidad

$$\ln xy = \ln x + \ln y \quad x, y \in \langle 0, \infty \rangle.$$

De esta relación se derivaron otras más, satisfechas también por la función logaritmo.

En este capítulo nos ocuparemos del segundo problema. Es decir, consideraremos métodos para la determinación de valores de una función definida por una integral. Estos métodos son de dos tipos: *a*) métodos basados en el segundo teorema fundamental y *b*) métodos numéricos.

Los métodos basados en el segundo teorema fundamental requieren que la función $F = \int_a f$ sea expresable en términos de funciones conocidas. Si pueden obtenerse tablas apropiadas de estas funciones conocidas o si sus valores son de fácil cálculo, entonces el problema 2, la determinación de valores de F, puede resolverse usando valores de las funciones conocidas.

Los métodos numéricos nos permiten encontrar valores de F usando solamente valores de f o valores de f y sus derivadas, y no requieren que F sea expresada primero en términos de funciones conocidas.

2. INTEGRACIÓN POR PARTES

Hemos visto en la sección 7 del capítulo 13 (pág. 611) que si las funciones u y v tienen derivadas continuas sobre un intervalo $\mathfrak{J}$, entonces la regla para la diferenciación del producto de funciones

$$D(uv) = uDv + vDu$$

nos lleva a la fórmula de integración

2.1 $$\int_a^b uDv = uv\Big]_a^b - \int_a^b vDu$$

para $a, b \in \mathfrak{J}$. La ecuación (2.1) es la fórmula para la integración por partes. Expresada en la notación de la integral indefinida, la ecuación (2.1) toma la forma

2.2 $$\int uDv = uv - \int vDu \quad \text{sobre } \mathfrak{J}.$$

La integración por partes reduce el problema de la evaluación de una integral al de la evaluación de otra integral. Al aplicar la integración por partes, nuestro objeto es obtener una integral $\int_a^b vDu$ que sea más simple

que la integral original $\int_a^b uDv$. No intentamos dar ningún tipo de regla general para la elección de los factores u y Dv. Sin embargo, haremos algunas observaciones sobre la elección de factores para ciertas clases de problemas. Los ejemplos ilustran el método de integración por partes.

2.3 Ejemplo. Encuéntrese $\int I^2 \exp$.

SOLUCIÓN. Si tomamos

$$u = I^2 \quad \text{y} \quad Dv = \exp,$$

entonces

$$Du = 2I \quad \text{y} \quad v = \exp$$

y la fórmula de integración por partes nos da

$$\int I^2 \exp = I^2 \exp - 2 \int I \exp.$$

Esta última integral es más sencilla que la integral original, ya que la integración por partes ha reducido la potencia de I. Aplicando la integración por partes a esta última integral con

$$u = I \quad \text{y} \quad Dv = \exp,$$

tenemos

$$Du = 1 \quad \text{y} \quad v = \exp$$

y de aqui

$$\int I \exp = I \exp - \int 1 \cdot \exp = I \exp - \exp.$$

Combinando estos resultados obtenemos

$$\int I^2 \exp = I^2 \exp - 2I \exp + 2 \exp$$

$$= (I^2 - 2I + 2) \exp.$$

En este ejemplo podríamos haber elegido $u = \exp$ y $Dv = I^2$. Esta elección nos llevaría a la integral

$$\int vDu = \tfrac{1}{3} \int I^3 \exp,$$

que es obviamente más complicada que la integral original ya que la potencia de I se ha aumentado.

Nota. Al aplicar la integración por partes cuando el integrando es el producto de un polinomio de grado n con la exponencial, el seno,

o el coseno, uno debe escoger el polinomio como el factor u. El nuevo integrando será entonces el producto de un polinomio de grado $n-1$ por exp, cos, o sen respectivamente. De donde, integrando por partes $n-1$ veces el problema se reduce al de integrar la función exponencial o la función seno o coseno.

2.4 Ejemplo. Encuéntrese $\int I \arctan$.

SOLUCIÓN. Tomando

$$u = \arctan \quad \text{y} \quad Dv = I$$

tenemos

$$Du = \frac{1}{1+I^2} \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{2}I^2$$

de modo que

$$\int I \arctan = \frac{1}{2}I^2 \arctan - \frac{1}{2}\int \frac{I^2}{1+I^2}$$

$$= \frac{1}{2}I^2 \arctan - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+I^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}I^2 \arctan - \tfrac{1}{2}I + \tfrac{1}{2}\arctan.$$

2.5 Ejemplo. Evalúese $\int_0^1 \text{arcsen}$.

SOLUCIÓN. Aquí el integrando no parece estar en la forma de un producto Sin embargo, podemos considerar el integrando como un producto, el $1 \cdot$arcsen. Tomando

$$u = \text{arcsen} \quad \text{y} \quad Dv = 1$$

tenemos

$$Du = \frac{1}{\sqrt{1-I^2}} \quad \text{y} \quad v = I$$

de modo que

$$\int_0^1 \text{arcsen} = I \,\text{arcsen}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{I}{\sqrt{1-I^2}}$$

$$= \text{arcsen}\, 1 - 0 \cdot \text{arcsen}\, 0 + \left[\sqrt{1-I^2}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 + 0 - \sqrt{1} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Nota. Si una de las funciones trigonométricas inversas o la función logarítmica aparece como un factor en un integrando, entonces se puede intentar la integración por partes escogiendo ese factor como u. Esto puede conducir a una simplificación ya que Du será una función algebraica.

2.6 Ejemplo. Encuéntrese $\int \sec^3$.

SOLUCIÓN. Tomamos

$$u = \sec, \qquad Dv = \sec^2.$$

Entonces

$$Du = \sec\tan, \qquad v = \tan$$

de modo que

$$\int \sec^3 = \sec\tan - \int \sec\tan^2.$$

Esta última integral no parece ser, en nada, mejor que la original. Sin embargo, si usamos la identidad

$$\tan^2 = \sec^2 - 1,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\int \sec^3 &= \sec\tan - \int \sec\tan^2 \\ &= \sec\tan - \int \sec^3 + \int \sec.\end{aligned}$$

Tenemos ahora una ecuación en $\int \sec^3$. Añadiendo esta expresión a ambos miembros de la ecuación, tenemos

$$2\int \sec^3 = \sec\tan + \int \sec$$

de modo que

$$\begin{aligned}\int \sec^3 &= \tfrac{1}{2}\sec\tan + \tfrac{1}{2}\int \sec \\ &= \tfrac{1}{2}\sec\tan + \tfrac{1}{2}\ln\circ|\sec + \tan|.\end{aligned}$$

Nota. En los problemas de la sección 8, capítulo 14 (pág. 685), consideramos integrales del tipo

$$\int \tan^m \sec^n.$$

En el problema 4 se señaló que si m es impar, $\tan^m \sec^n$ podía expresarse como un polinomio en la secante por $D \sec = \tan \sec$, y si n es par, $\tan^m \sec^n$ podía expresarse como un polinomio en la tangente por $D \tan = \sec^2$. En el problema 10, se obtuvo una fórmula de reducción para el caso especial $n = 0$.

Si m es par y n es impar, no hemos dado un método de ataque. En este caso, como m es par, $\tan^m \sec^n$ puede expresarse como un polinomio en la secante. Cada término puede entonces reducirse por la fórmula de reducción que aparece en uno de los siguientes problemas, el problema 3*e*. Esta fórmula de reducción puede obtenerse por el método del ejemplo 2.6.

El tratamiento de $\int \cot^m \csc^n$ es análogo al tratamiento descrito para $\int \tan^m \sec^n$.

Problemas

1. Encuéntrense las siguientes integrales:

a) $\int \arctan$

b) $\int_1^e I \ln$

c) $\int I^2 \operatorname{sen}$

d) $\int_0^5 \frac{I}{\sqrt{5-I}}$

e) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} I \sec^2$

f) $\int I \arctan \circ I^{-1}$

g) $\int \arccos$

h) $\int_0^\pi I^2 \cos.$

2. Encuéntrense las siguientes integrales:

a) $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

b) $\int xe^x\, dx$

c) $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$

d) $\int x^2 \arctan x\, dx$

e) $\int xe^{2x}\, dx$

f) $\int (x^2+1) \ln x\, dx$

g) $\int e^x \cos x\, dx$

h) $\int e^x \cosh x\, dx$

$i)$ $\int \cos x \ln |\operatorname{sen} x| \, dx$

$j)$ $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$

$k)$ $\int \sec^5 x \, dx$

$l)$ $\int \operatorname{senh}^2 x \, dx$

$m)$ $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$

$n)$ $\int_0^{16} \frac{x \, dx}{\sqrt{16-x}}$

$o)$ $\int_0^{2} \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$p)$ $\int_{-1}^{1} x e^{-x} \, dx$

$q)$ $\int x^n \ln x \, dx$

$r)$ $\int_0^{\infty} e^{-2x} \operatorname{sen} x \, dx.$

3. Obténganse las siguientes fórmulas de reducción (m y n son enteros positivos):

$a)$ $$\int I^n \operatorname{sen} = -I^n \cos + n \int I^{n-1} \cos$$

$b)$ $$\int \frac{\operatorname{sen}}{I^n} = -\frac{\operatorname{sen}}{(n-1)I^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos}{I^{n-1}} \qquad (n > 1)$$

$c)$ $$\int \operatorname{sen}^n = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} \cos + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2}$$

$d)$ $$\int \cos^n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} \operatorname{sen} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}$$

$e)$ $$\int \sec^n = \frac{1}{n-1} \tan \sec^{n-2} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}$$

$f)$ $$\int \csc^n = \frac{-1}{n-1} \cot \csc^{n-2} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2}$$

$g)$ $$\int \operatorname{sen}^m \cos^n = -\frac{1}{m+n} \operatorname{sen}^{m-1} \cos^{n+1} + \frac{m-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m-2} \cos^n$$

$h)$ $$\int \operatorname{sen}^m \cos^n = \frac{1}{m+n} \operatorname{sen}^{m+1} \cos^{n-1} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^m \cos^{n-2}$$

$i)$ $$\int I^n \exp = I^n \exp - n \int I^{n-1} \exp$$

j) $\int I^{-n} \exp = \frac{1}{n-1} [-I^{-n+1} \exp + \int I^{-n+1} \exp]$

k) $\int I^{n} \ln^{m} = \frac{1}{n+1} [I^{n+1} \ln^{m} - m \int I^{n} \ln^{m-1}].$

4. Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n = \int_0^{\pi/2} \cos^n.$

a) Úsense los problemas 3*c* y 3*d* para demostrar que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

b) Demuéstrese que

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2} \quad \text{si } n \text{ es un entero positivo par,}$$

$$I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \quad \text{si } n \text{ es un entero impar} > 1,$$

donde $n!!$ (léase "semifactorial de n") es el producto de los enteros impares $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots n$ si n es impar y el producto de los enteros pares $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots n$ si n es par.

5. Encuéntrese el área de la región limitada por la curva $y = xe^{-x}$, el eje X, y la recta $x = 1$.

6. Encuéntrese el área de la región acotada por la curva $y = \ln x$, el eje X, y la recta $x = e$.

7. Encuéntrese el área de la región limitada por la curva $y = x \cos x$ y el eje X entre $x = 0$ y el primer cero positivo de $x \cos x$.

8. Encuéntrese el volumen que se obtiene haciendo girar la región del problema 6 alrededor del eje X.

9. Sea $\mathcal{R}$ una región limitada superiormente por el eje X e inferiormente por la curva $y = f(x)$ donde $f(x) = x \ln x$ ($x > 0$) entre el mínimo de f y el cero de f.

a) Encuéntrese el volumen generado por el giro de $\mathcal{R}$ alrededor del eje Y.
b) Encuéntrese el volumen generado por el giro de $\mathcal{R}$ alrededor del eje X.

3. FRACCIONES PARCIALES

Recuérdese que una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales. Sean N_1/D_1 y N_2/D_2, donde N_1, N_2, D_1 y D_2 son

funciones polinomiales, un par de funciones racionales. Sabemos, por álgebra elemental, que

$$\frac{N_1}{D_1} + \frac{N_2}{D_2} = \frac{N_1D_2}{D_1D_2} + \frac{N_2D_1}{D_2D_1} = \frac{N_1D_2+N_2D_1}{D_1D_2}.$$

La suma de funciones racionales es una función racional. Por ejemplo,

$$I^2+1 + \frac{1}{I-1} + \frac{1}{I-2} = \frac{(I^2+1)(I-1)(I-2)+I-2+I-1}{(I-1)(I-2)}$$

$$= \frac{I^4-3I^3+3I^2-I-1}{I^2-3I+2}.$$

Hay muchos casos en donde se desea invertir este proceso. Es a menudo útil, cuando nos dan $(I^4-3I^3+3I^2-I-1)/(I^2-3I+2)$, reconocer que esta función racional es la suma

$$I^2+1 + \frac{1}{I-1} + \frac{1}{I-2}$$

de un polinomio y unas funciones racionales más sencillas. Las funciones racionales más sencillas se llaman *fracciones parciales.* Nuestra razón más inmediata para considerar este problema inverso es que, como veremos en la siguiente sección, las fracciones parciales se prestan fácilmente a la integración.

3.1 Definición. *Si N/D es una función racional y si el grado de N, denotado por* $\deg(N)$, *es menor que el grado de D, entonces N/D se llama **función racional propia**. Si* $\deg(N) \geqslant \deg(D)$, *entonces N/D se llama **función racional impropia**.*

Por ejemplo, $(I^4-3I^3+3I^2-I-1)/(I^2-3I+2)$ es una función racional impropia y $(I^3+4I^2-1)/(I^5+1)$ es una función racional propia.

Si N/D es una función racional impropia, entonces, por el algoritmo de la división (teorema 4.5 del capítulo 11, pág. 502), existen polinomiales Q y R con $R = 0$ o $\deg(R) < \deg(D)$ tales que

$$N = DQ+R$$

o

$$\frac{N}{D} = Q + \frac{R}{D}.$$

Así pues, si N/D es una función racional impropia, por división podemos escribir N/D como la suma de un polinomio Q y de una función racional

propia R/D en caso de que $R \neq 0$. Si $R = 0$, entonces N/D es simplemente una función polinomial. Por ejemplo

$$\frac{I^4-3I^3+3I^2-I-1}{I^2-3I+2} = I^2+1 + \frac{2I-3}{I^2-3I+2}$$

o

$$I^4-3I^3+3I^2-I-1 = (I^2-3I+2)(I^2+1)+2I-3 .$$

El principal resultado de esta sección está contenido en el siguiente teorema.

3.2 Teorema. *Si N/D es una función racional donde D tiene la factorización*

$$D = A(I-r_1)^{\alpha_1}\dots(I-r_n)^{\alpha_n}(I^2+b_1I+c_1)^{\beta_1}\dots(I^2+b_mI+c_m)^{\beta_m}$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ son enteros positivos y A es una función constante, entonces N/D puede expresarse como un polinomio P más la suma de fracciones parciales de la siguiente forma:

Para cada factor lineal $(I-r)^\alpha$ hay α fracciones parciales:

3.3
$$\frac{A_1}{(I-r)} + \dots + \frac{A_\alpha}{(I-r)^\alpha}$$

donde $A_1, \dots, A_\alpha$ son constantes.

Para cada factor cuadrático $(I^2+bI+c)^\beta$ hay β fracciones parciales:

3.4
$$\frac{B_1I+C_1}{I^2+bI+c} + \dots + \frac{B_\beta I+C_\beta}{(I^2+bI+c)^\beta}$$

donde $B_1, \dots, B_\beta, C_1, \dots, C_\beta$ son constantes.

3.5 Ejemplo. Encuéntrese la expansión en fracciones parciales de

$$\frac{I^2-2I}{(I-1)^2(I^2+1)}.$$

SOLUCIÓN. Por el teorema 3.2 sabemos que

$$\frac{I^2-2I}{(I-1)^2(I^2+1)} = \frac{A_1}{I-1} + \frac{A_2}{(I-1)^2} + \frac{BI+C}{I^2+1}$$

o

$$\frac{I^2-2I}{(I-1)^2(I^2+1)} = \frac{A_1(I-1)(I^2+1)+A_2(I^2+1)+(BI+C)(I-1)^2}{(I-1)^2(I^2+1)}$$

Como éstas son dos expresiones para la misma función racional y los denominadores son iguales, los numeradores deben también ser iguales. Es decir

$$\begin{aligned} I^2-2I &= A_1(I-1)(I^2+1)+A_2(I^2+1)+(BI+C)(I-1)^2 \\ &= (A_1+B)I^3+(-A_1+A_2-2B+C)I^2+ \\ &\quad +(A_1+B-2C)I+(-A_1+A_2+C). \end{aligned}$$

De donde, igualando coeficientes (corolario 4.14, pág. 505), obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1+B &= 0 & \qquad A_1+B-2C &= -2 \\ -A_1+A_2-2B+C &= 1 & \qquad -A_1+A_2+C &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones, encontramos $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, y $C = 1$, así que

$$\frac{I^2-2I}{(I-1)^2(I^2+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{I-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{(I-1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}I+1}{I^2+1}.$$

Este resultado puede comprobarse viendo cómo al combinar los términos del segundo miembro de la anterior ecuación se obtiene el primer miembro.

Efectuamos la prueba del teorema 3.2 por la consideración de cuatro lemas.

3.6 Lema. *Si D_1 y D_2 son dos funciones polinomiales sin ningún factor polinomial de grado positivo común, entonces existen funciones polinomiales P_1 y P_2 tales que*

$$1 = P_1D_1+P_2D_2.$$

PRUEBA. Sea

$$\mathcal{U} = \{P \mid P = N_1D_1+N_2D_2\}$$

donde N_1 y N_2 son polinomios cualesquiera. El conjunto $\mathcal{U}$ de polinomios P contiene polinomios de algún grado mínimo. Sea $d \in \mathcal{U}$ un polinomio de los de grado mínimo. Lo que deseamos demostrar es que $\deg(d) = 0$, es decir, que d es una constante distinta de cero.

Sea P un polinomio cualquiera en $\mathcal{U}$. Entonces, por el algoritmo de la división, existen polinomios A y R tales que

$$P = dA+R$$

donde $R = 0$ o $\deg(R) < \deg(d)$. Como d y P pertenecen a $\mathcal{U}$ hay polinomios S_1, S_2, T_1, y T_2 tales que

$$\begin{aligned} P &= S_1D_1+S_2D_2, \\ d &= T_1D_1+T_2D_2. \end{aligned}$$

Luego

$$R = P-dA = (S_1-T_1A)D_1+(S_2-T_2A)D_2$$

y R pertenece a $\mathcal{U}$. Como d es un polinomio de grado mínimo en $\mathcal{U}$, no podemos tener $\deg(R) < \deg(d)$ y por tanto $R = 0$. Así pues, para cualquier $P \in \mathcal{U}$ existe un polinomio A tal que $P = dA$.

Ahora bien, $D_1 \in \mathcal{U}$ para $N_1 = 1$ y $N_2 = 0$ y $D_2 \in \mathcal{U}$ para $N_1 = 0$ y $N_2 = 1$, de modo que existen polinomios A_1 y A_2 tales que $D_1 = dA_1$ y $D_2 = dA_2$. Luego d es un factor común de D_1 y D_2. Como, por hipótesis, D_1 y D_2 no tienen ningún factor común de grado positivo, $\deg(d) = 0$ y d es una constante distinta de cero. Dividiendo la relación $d = T_1 D_1 + T_2 D_2$ por la constante distinta de cero d, obtenemos la relación deseada:

$$1 = \frac{T_1}{d} D_1 + \frac{T_2}{d} D_2 = P_1 D_1 + P_2 D_2 .$$

3.7 Lema. *Si N/D es una función racional y $D = D_1 \cdot D_2$ donde D_1 y D_2 no tienen factores comunes de grado positivo, entonces existen funciones polinomiales P_1 y P_2 tales que*

$$\frac{N}{D} = \frac{NP_1}{D_2} + \frac{NP_2}{D_1} .$$

PRUEBA. Multiplicando la relación del lema 3.6 por $N/D = N/(D_1 D_2)$, obtenemos

$$\frac{N}{D} = \frac{N}{D_1 D_2} = \frac{NP_1 D_1}{D_1 D_2} + \frac{NP_2 D_2}{D_1 D_2}$$

$$= \frac{NP_1}{D_2} + \frac{NP_2}{D_1} .$$

De acuerdo con el teorema 4.16 del capítulo 11 (pág. 506), D tiene una factorización en factores lineales y factores cuadráticos irreducibles:

$$D = A(I - r_1)^{\alpha_1} \dots (I - r_n)^{\alpha_n} (I^2 + b_1 I + c_1)^{\beta_1} \dots (I^2 + b_m I + c_m)^{\beta_m}$$

donde $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m$ son enteros positivos. Por el lema 3.7 vemos que existen polinomiales $N_1, \dots, N_n, M_1, \dots, M_m$ tales que

3.8
$$\frac{N}{D} = \frac{N_1}{(I - r_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{N_n}{(I - r_n)^{\alpha_n}} + \frac{M_1}{(I^2 + b_1 I + c_1)^{\beta_1}} + \dots + \frac{M_m}{(I^2 + b_m I + c_m)^{\beta_m}} .$$

Nuestros dos próximos lemas demuestran que cada uno de los términos en (3.8) pueden expresarse como una suma de términos del tipo (3.3) o (3.4).

3.9 Lema. *Toda función racional de la forma $P/(I-r)^k$ tiene una expansión de la forma*

$$\frac{P}{(I-r)^k} = \frac{R_1}{(I-r)^k} + \frac{R_2}{(I-r)^{k-1}} + \ldots + \frac{R_k}{I-r} + Q_k ,$$

donde las R_i son constantes y Q_k es un polinomio.

PRUEBA. Por el algoritmo de la división (teorema 4.5, pág. 502), existen polinomios $Q_1, \ldots, Q_k, R_1, \ldots, R_k$ tales que

$$\begin{aligned} P &= (I-r)Q_1 + R_1 \\ Q_1 &= (I-r)Q_2 + R_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_{k-1} &= (I-r)Q_k + R_k \end{aligned}$$

donde alguno de los Q_i puede ser cero y donde cada uno de los R_i es cero o de grado cero. Por tanto

$$\frac{P}{(I-r)^k} = \frac{(I-r)Q_1 + R_1}{(I-r)^k} = \frac{R_1}{(I-r)^k} + \frac{Q_1}{(I-r)^{k-1}}$$

$$= \frac{R_1}{(I-r)^k} + \frac{(I-r)Q_2 + R_2}{(I-r)^{k-1}} = \ldots$$

$$= \frac{R_1}{(I-r)^k} + \frac{R_2}{(I-r)^{k-1}} + \ldots + \frac{R_k}{I-r} + Q_k .$$

Si $\deg(P) < k$, en cuyo caso estamos tratando con una función racional propia, entonces $Q_k = 0$, ya que

$$k > \deg(P) = 1 + \deg(Q_1) = 2 + \deg(Q_2) = \ldots = i + \deg(Q_i)$$

hasta que para algún $i < k$, $\deg(Q_i) = 0$ y $Q_{i+1} = 0$.

3.10 Lema. *Toda función racional de la forma $P/(I^2+bI+c)^k$ tiene un desarrollo de la forma*

$$\frac{P}{(I^2+bI+c)^k} = \frac{A_1 I + B_1}{(I^2+bI+c)^k} + \frac{A_2 I + B_2}{(I^2+bI+c)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k I + B_k}{I^2+bI+c} + Q_k ,$$

donde las A_i y B_i son constantes y Q_k es un polinomio.

PRUEBA. Por el algoritmo de la división existen polinomios $Q_1, \ldots, Q_k$ y constantes $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k$ algunas de las cuales pueden ser cero,

tales que

$$\begin{aligned} P &= (I^2+bI+c)Q_1+A_1I+B_1 \\ Q_1 &= (I^2+bI+c)Q_2+A_2I+B_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_{k-1} &= (I^2+bI+c)Q_k+A_kI+B_k. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{P}{(I^2+bI+c)^k} = \frac{(I^2+bI+c)Q_1+A_1I+B_1}{(I^2+bI+c)^k}$$

$$= \frac{A_1I+B_1}{(I^2+bI+c)^k} + \frac{Q_1}{(I^2+bI+c)^{k-1}}$$

$$= \ldots = \frac{A_1I+B_1}{(I^2+bI+c)^k} + \frac{A_2I+B_2}{(I^2+bI+c)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_kI+B_k}{I^2+bI+c} + Q_k.$$

Si $\deg(P) < 2k$, entonces $Q_k = 0$ ya que

$$2k > \deg(P) = 2+\deg(Q_1) = 4+\deg(Q_2) = \ldots = 2i+\deg(Q_i)$$

hasta que para algún $i < k$, $\deg(Q_i) \leqslant 1$ y $Q_{i+1} = 0$.

PRUEBA DEL TEOREMA 3.2. El teorema 3.2 se sigue inmediatamente de la ecuación (3.8) y de los lemas 3.9 y 3.10 al aplicar los lemas 3.9 y 3.10 a los términos de la ecuación (3.8). El polinomio P del teorema 3.2 es la suma de las Q_k obtenidas de los términos individuales de (3.8) por los lemas 3.9 y 3.10. Si N/D es una función racional propia, entonces $P = 0$.

4. INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

El teorema 3.2 nos dice que toda función racional tiene una descomposición en fracciones parciales. Si una función racional N/D es una función racional impropia, es decir, si el grado de N es mayor que o igual al grado de D, entonces por división obtenemos una función polinomial más una función racional propia — $\deg(N) < \deg(D)$. En esta sección suponemos que todas las funciones racionales consideradas han sido reducidas primero a una función polinomial más una racional propia. Demostramos ahora que la integral de cada una de las fracciones parciales individuales puede expresarse en términos de funciones elementales. Se sigue de ello que la integral de toda función racional puede expresarse en términos de funciones elementales.

Las integrales más sencillas en que aparecen funciones racionales propias son las del tipo

4.1 $$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} & (n > 1) \\ \ln |x+a| & (n = 1). \end{cases}$$

Consideramos a continuación las integrales del tipo

4.2 $$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}\, dx = \int \frac{\dfrac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \dfrac{Ab}{2a}\right)}{(ax^2+bx+c)^n}\, dx$$

$$= \frac{A}{2a} \int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}\, dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{A}{2a(1-n)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \left(B - \dfrac{Ab}{2a}\right) \displaystyle\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} & (n > 1) \\ \dfrac{A}{2a} \ln |ax^2+bx+c| + \left(B - \dfrac{Ab}{2a}\right) \displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} & (n = 1) \end{cases}$$

Así pues, las integrales del tipo (4.2) conducen a integrales del tipo

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} .$$

Una aplicación repetida de la fórmula de reducción

4.3 $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{(2n-3)2a}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

reduce este tipo de integral a

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} .$$

La fórmula de reducción (4.3) puede verificarse por diferenciación

Escribiendo

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{1}{4a^2}(4ac-b^2)\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{q}{4a^2}\right]$$

donde $q = 4ac-b^2$, tenemos

4.4
$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{q}{4a^2}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{q}}\arctan\dfrac{2ax+b}{\sqrt{q}} & \text{para } q = 4ac-b^2 > 0 \\[2ex] -\dfrac{2}{2ax+b} & \text{para } q = 4ac-b^2 = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{-q}}\ln\left|\dfrac{2ax+b-\sqrt{-q}}{2ax+b+\sqrt{-q}}\right| & \text{para } q = 4ac-b^2 < 0\,. \end{cases}$$

La fórmula (4.4) puede verificarse por diferenciación.

El teorema 3.2 nos dice que toda función racional tiene una descomposición en fracciones parciales. Pero lo visto de (4.1) a (4.4) nos dice que la integral de cada uno de estos términos es expresable en términos de funciones elementales. Así, pues, hemos demostrado que *es siempre posible expresar la integral de una función racional cualquiera en términos de funciones elementales.*

Discutiremos ahora algunos procedimientos sistemáticos para encontrar la expansión en fracciones parciales de funciones racionales propias. Consideramos cuatro casos.

Caso 1. El denominador tiene solamente factores lineales, ninguno de los cuales se repite. En este caso la función racional es la suma de las fracciones parciales cada una de las cuales es igual a una constante dividida por un factor del denominador.

4.5 Ejemplo. Encontrar $\displaystyle\int \frac{x^2+30x-96}{x^3-2x^2-24x}\,dx.$

SOLUCIÓN. Este integrando es una función racional propia ($2 < 3$). Factorizando el denominador tenemos

$$x^3-2x^2-24x = x(x+4)(x-6).$$

Estamos, pues, tratando con un problema que cae dentro del caso 1 y hay constantes A, B, y C tales que

$$\frac{x^2+30x-96}{x^3-2x^2-24x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} + \frac{C}{x-6}$$

$$= \frac{A(x+4)(x-6)+Bx(x-6)+Cx(x+4)}{x^3-2x^2-24x}.$$

Ahora bien, esto es una identidad y los dos numeradores deben ser iguales. Es decir

$$\begin{aligned} x^2+30x-96 &= A(x+4)(x-6)+Bx(x-6)+Cx(x+4) \\ &= x^2(A+B+C)+x(-2A-6B+4C)-24A. \end{aligned}$$

Hay dos métodos de encontrar las constantes desconocidas A, B, y C que son comúnmente usados. Podemos igualar coeficientes de iguales potencias de x, obteniendo tres ecuaciones para las tres constantes desconocidas que entonces pueden resolverse:

$$\begin{aligned} 1 &= A+B+C \\ 30 &= -2A-6B+4C \\ -96 &= -24A. \end{aligned}$$

Un segundo método es el de sustituir varios valores para x y obtener así tres ecuaciones para las tres incógnitas. Cuando estamos tratando con factores lineales es fácil escoger valores de x que hagan uno de los factores cero y resulten en ecuaciones con menos incógnitas.

Sustituyendo $x = 0$: $\quad -96 = A(4)(-6)$.
Sustituyendo $x = -4$: $\quad -200 = B(-4)(-10)$.
Sustituyendo $x = 6$: $\quad 120 = C(6)(10)$.

De donde $A = 4$, $B = -5$, $C = 2$. Por tanto

$$\int \frac{x^2+30x-96}{x^3-2x^2-24x}\,dx = \int \left(\frac{4}{x} - \frac{5}{x+4} + \frac{2}{x-6}\right)dx$$

$$= 4\ln|x| - 5\ln|x+4| + 2\ln|x-6|.$$

Caso 2. El denominador sólo tiene factores lineales, algunos de los cuales son repetidos. En este caso, correspondiéndose con un factor repetido k veces, hay k fracciones parciales

$$\frac{A_1}{(x-r)^k} + \frac{A_2}{(x-r)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-r}.$$

4.6 Ejemplo. Encuéntrese $\displaystyle\int \frac{3x^3+6x^2+7x-4}{(x^2-1)^2}\,dx.$

SOLUCIÓN. El integrando es una función racional propia y el denominador puede ser factorizado en la forma $(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$. Así pues

$$\frac{3x^3+6x^2+7x-4}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}$$

y

$$3x^3+6x^2+7x-4$$
$$= A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1)^2 + C(x-1)^2 + D(x-1)^2(x+1).$$

Sustituyendo:

$$x = 1; \qquad 12 = A(2)^2$$
$$x = -1; \qquad -8 = C(-2)^2.$$

Así pues, $A = 3$, $C = -2$. No hay ninguna otra elección de x que haga que se anule un factor, de modo que si tenemos que continuar con el método de sustitución para obtener ecuaciones de las que podamos encontrar B y D debemos escoger algunos valores para x que parezcan convenientes. Sustituyendo:

$$x = 0; \quad -4 = A-B+C+D = 3-B-2+D$$
$$x = 2; \quad 58 = 9A+9B+C+3D = 27+9B-2+3D.$$

Obtenemos así las ecuaciones

$$-B+D = -5$$
$$3B+D = 11$$

de donde encontramos $B = 4$, $D = -1$. Por tanto

$$\int \frac{3x^3+6x^2+7x-4}{(x^2-1)^2}\,dx = \int \left[\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}\right] dx$$

$$= -\frac{3}{x-1} + 4\ln|x-1| + \frac{2}{x+1} - \ln|x+1|.$$

Caso 3. El denominador tiene uno o más factores cuadráticos ninguno de los cuales se repite. En este caso, para cada factor cuadrático hay una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$$

4.7 Ejemplo. Encuéntrese $\displaystyle\int \frac{x^2-3}{(x^2+1)(x-2)}\,dx.$

SOLUCIÓN. El integrando es una función racional propia y tiene un desarrollo en fracciones parciales de la forma

$$\frac{x^2-3}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Resolviendo para A, B, y C bien por sustitución, bien igualando coeficientes, bien por una combinación de estos métodos, encontramos: $A = \frac{4}{5}$, $B = \frac{8}{5}$, $C = \frac{1}{5}$. Por tanto

$$\int \frac{x^2-3}{(x^2+1)(x-2)}\,dx = \frac{1}{5}\int \left[\frac{4x+8}{x^2+1} + \frac{1}{x-2}\right]dx$$

$$= \tfrac{1}{5}\{2\ln(x^2+1)+8\arctan x + \ln|x-2|\}.$$

Caso 4. El denominador tiene uno o más factores cuadráticos, algunos de los cuales son repetidos. En este caso, por cada factor cuadrático repetido k veces tenemos k términos

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^k} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^{k-1}} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{ax^2+bx+c}.$$

4.8 Ejemplo. Encuéntrese $\displaystyle\int \frac{x-1}{x(x^2-2x+2)^2}\,dx.$

SOLUCIÓN

$$\frac{x-1}{x(x^2-2x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2-2x+2)^2} + \frac{Dx+E}{x^2-2x+2}.$$

Resolviendo, encontramos $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = 0$, $D = \frac{1}{4}$, $E = -\frac{1}{2}$. Así pues

$$\int \frac{x-1}{x(x^2-2x+2)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \left[\frac{-1}{x} + \frac{2x}{(x^2-2x+2)^2} + \frac{x-2}{x^2-2x+2}\right]dx.$$

Usando (4.2) y la fórmula de reducción (4.3), tenemos

$$\int \frac{x-1}{x(x^2-2x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{x-2}{4(x^2-2x+2)} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

$$+\frac{1}{4}\int \frac{x-2}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{x-2}{4(x^2-2x+2)} + \frac{1}{8}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{x-2}{4(x^2-2x+2)} + \tfrac{1}{8}\ln(x^2-2x+2).$$

Problemas

1. Verifíquese la fórmula de reducción (4.3) por diferenciación.

2. Verifíquese la fórmula integral (4.4) por diferenciación.

3. Desarróllese cada una de las siguientes en fracciones parciales:

a) $\dfrac{7x-10}{(x-4)(2x+1)}$ *b*) $\dfrac{6x+11}{(3x+2)(x-4)}$

c) $\dfrac{4x^2-x-8}{x^3-x^2-2x}$ *d*) $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$

e) $\dfrac{4x^2+2x+8}{x(x^2+2)^2}$ *f*) $\dfrac{x^5+4x^3}{(x^2+2)^3}$

g) $\dfrac{x^5}{(x^2+4)^2}$ *h*) $\dfrac{x^4+5x^2+4}{(x+1)(x^2-x+3)}.$

4. Encuéntrese cada una de las siguientes integrales usando las fórmulas de integración (4.1) a (4.4):

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^5}$ *b*) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+2}$

c) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$ *d*) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x+2)^3}$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$ *f*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x-2}$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+1}$ *h*) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+2x+1}$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x-2)^2}$

k) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{(2x^2+x+1)^2}\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{5x+1}{(x^2+2x+1)^2}\,dx.$

5. Encuéntrense las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x+1)(x-2)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{2x^2-5x-3}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x-2}{2x^3-3x^2-2x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2-7x+1}{4x^3-x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^3+9x^2-5x-18}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^3-5x+1}{x^3+x^2-2x}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x(x+1)^2}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{x^3+4x-1}{(x-1)^3}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{6x^2-3x+1}{x^3-x^2}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2-7x+20}{(x^2-4)^2}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{5x^2-3x+1}{x^3+x}\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{6x^2+9x+4}{x^4+2x^2+2x}\,dx$

m) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}$

n) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3+2x^2+x+3}{x^4+3x^2+2}\,dx$

o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x^2+6x+17}{(x^2+x+1)^2(2-x)}\,dx$

p) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^5+2x^3-7x}{(x^2+1)^3}\,dx.$

5. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

En la sección 7 del capítulo 13 (pág. 614), discutimos la evaluación de las integrales definidas por el método de sustitución. Volvemos aquí a este método para considerar integrales que implican funciones con las que nos encontramos por primera vez en el capítulo 14 y para sistematizar el uso de la sustitución trigonométrica.

Recordemos que tenemos el teorema de sustitución (teorema 7.5, pág. 613):

Si

1) f es continua sobre un intervalo $\mathfrak{J}$,
2) u tiene una derivada continua sobre un intervalo $\mathfrak{E}$,

3) $u(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{I}$,

4) $u(\alpha) = a$ y $u(\beta) = b$ para $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$,

entonces

5.1
$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ u)u'.$$

Usamos la ecuación (5.1) en dos formas. Es decir, o el primer miembro o el segundo de la ecuación (5.1) pueden tomarse como la integral original. Podemos expresar la ecuación en las formas

5.2
$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,dt$$

y

5.3
$$\int_\alpha^\beta f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)\,dt$$

donde x identifica la integral original y t identifica la integral transformada.

Nota. Al usar la fórmula (5.2), si consideramos dx en $\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx$ como una diferencial, entonces la fórmula (5.2)

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))\,du(t)$$

se obtiene de un modo formal simplemente reemplazando x por $u(t)$ y encontrando los límites correspondientes.

Nota. A menudo exigimos que la función u sea univalente. Si hacemos la hipótesis adicional de que $u'(t) \neq 0$ para $t \in \mathcal{E}$, como por (2) u' es continua sobre $\mathcal{E}$, u será o creciente en $\mathcal{E}$ o decreciente en $\mathcal{E}$.

5.4 Ejemplo. Evalúese $\displaystyle\int_5^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x}}$.

Solución. Deseamos hacer una sustitución que transforme la integral en una integral con una función integral como integrando. Escogeremos $x = u(t)$ en tal forma que $\sqrt{9-x} = \sqrt{9-u(t)}$ sea un polinomio en t. Tomando

$$t = u^*(x) = \sqrt{9-x} \quad \text{o} \quad x = u(t) = 9-t^2,$$

tenemos

$$\alpha = u^*(5) = \sqrt{9-5} = 2,$$
$$\beta = u^*(8) = \sqrt{9-8} = 1,$$

y

$$dx = u'(t)dt = -2t\,dt.$$

Por tanto

$$\int_5^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{9-x}} = \int_2^1 \frac{(9-t^2)}{t}(-2t)\,dt = -2\int_2^1 (9-t^2)\,dt$$

$$= -2\left[9t - \frac{t^3}{3}\right]_2^1 = -2\left[9 - \frac{1}{3} - 18 + \frac{8}{3}\right] = \frac{40}{3}.$$

En integrales con $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, y $\sqrt{x^2-a^2}$, la sustitución con ciertas de las funciones trigonométricas racionalizará el integrando. Ilustramos estas sustituciones en los siguientes ejemplos.

5.5 Ejemplo. Encuéntrese $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a > 0)$.

SOLUCIÓN. Sea $x = u(t) = a \operatorname{sen} t$ donde el dominio de u es $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Entonces u tendrá una inversa y

$$t = u^*(x) = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}.$$

Tenemos

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{a^2\cos^2 t} = |\,a\cos t|.$$

Ahora bien, $t \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ implica $\cos t > 0$. Por tanto $|a\cos t| = a|\cos t| = a\cos t$ y

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t.$$

Por otra parte, $dx = u'(t)dt = a\cos t\,dt$, de modo que la integral transformada es

$$\int \frac{u'(t)\,dt}{u^2(t)\sqrt{a^2-u^2(t)}} = \int \frac{a\cos t\,dt}{a^2\operatorname{sen}^2 t\; a\cos t} = \frac{1}{a^2}\int \csc^2 t\,dt$$

$$= -\frac{1}{a^2}\cot t = -\frac{a\cos t}{a^3\operatorname{sen} t} = G(t).$$

Por tanto, como $t \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = G(u^*(x)) = G\left(\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right) = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x}.$$

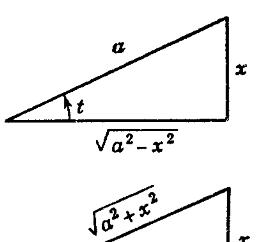
Esta fórmula puede ser comprobada por diferenciación.

Nota. En la integración indefinida, deseamos encontrar una fórmula para $\int f(x)dx$. Es decir, deseamos encontrar una función F tal que $F'(x) = f(x)$ para $x \in \mathfrak{D}_f$. Por tanto, si una sustitución se hace para obtener una integral transformada, la fórmula para la integral transformada no es una fórmula para la integral original. Para obtener una fórmula para la integral original debemos expresar el resultado en términos de x.

La identidad $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ puede usarse en forma análoga para las integrales en que aparecen $\sqrt{a^2+x^2}$ o $\sqrt{x^2-a^2}$. Si $a > 0$ y en el integrando aparece

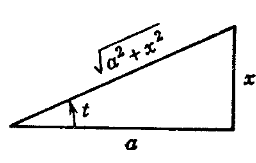
$\sqrt{a^2-x^2}$, póngase conjunto $x = a \operatorname{sen} t$,
$t = \operatorname{arcsen} x/a$ con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$,
$\sqrt{a^2+x^2}$, póngase conjunto $x = a \tan t$,
$t = \arctan x/a$ con $t \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,
$\sqrt{x^2-a^2}$, póngase conjunto $x = a \sec t$,
$t = \operatorname{arcsec} x/a$ con $t \in [-\pi, -\pi/2\rangle \cup [0, \pi/2\rangle$.

Estas relaciones se recuerdan más fácilmente con ayuda de diagramas. Dibujamos diagramas que sugieren que $t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, pero debemos recordar que t está en el rango de la función trigonométrica inversa particular que se use. Consideremos un triángulo rectángulo con dos lados a y x. El tercer lado es la raíz cuadrada particular que aparece en nuestra integral.



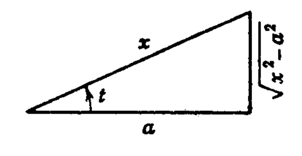
Para $\sqrt{a^2-x^2}$, tenemos a para la hipotenusa y x para un cateto. $\sqrt{a^2-x^2}$ es el otro cateto. Luego

$$x = a \operatorname{sen} t, \quad \sqrt{a^2-x^2} = a \cos t.$$



Para $\sqrt{a^2+x^2}$, tenemos $\sqrt{a^2+x^2}$ para la hipotenusa, x y a para los catetos. Entonces

$$x = a \tan t, \quad \sqrt{a^2+x^2} = a \sec t.$$



Para $\sqrt{x^2-a^2}$, tenemos x para la hipotenusa y a para un cateto. El otro cateto es $\sqrt{x^2-a^2}$. Luego

$$x = a \sec t, \quad \sqrt{x^2-a^2} = a \tan t.$$

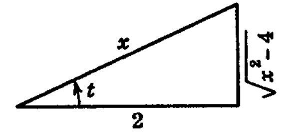
5.6 Ejemplo. Encuéntrese $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$.

SOLUCIÓN. Haciendo $x = u(t) = 2 \sec t$ con $t \in [-\pi, -\pi/2\rangle \cup [0, \pi/2\rangle$, tenemos

$$\sqrt{x^2-4} = 2 \tan t, \quad dx = u'(t)dt = 2 \sec t \tan t\, dt.$$

La integral transformada es

$$\int \frac{2 \sec t \tan t \, dt}{4 \sec^2 t \, 2 \tan t} = \frac{1}{4} \int \cos t \, dt = \frac{1}{4} \operatorname{sen} t .$$



Teniendo en cuenta nuestro diagrama en que aparecen las relaciones entre x y t para $x \in [2, \infty\rangle$ y $t \in [0, \pi/2\rangle$, encontramos

$$\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$$

Por tanto

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-4}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{4x} .$$

La fórmula debe ser comprobada por diferenciación.

Problemas

1. Encontrar las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ *b*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2 \, dx}{(16-x^2)^{3/2}}$ *d*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{4x^2-9}}$

e) $\displaystyle\int_{3/2}^{3} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} \, dx$ *f*) $\displaystyle\int_{a}^{2a} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

g) $\displaystyle\int_{0}^{5} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{25-x^2}}$ *h*) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2} \, dx$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}$ *j*) $\displaystyle\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{6x-x^2}}$.

2. Demuéstrese que la sustitución

$$t = (a+bx^n)^{1/q}$$

racionalizará el integrando en

$$\int x^m(a+bx^n)^{p/q}\,dx$$

si $(m+1)/n$ es un entero.

3. Encuéntrense las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x^3\cdot\sqrt[4]{9+x^2}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{9+x^2}}$

c) $\displaystyle\int x\sqrt{4+x}\,dx$ *d*) $\displaystyle\int x\sqrt{4+x^2}\,dx.$

4. Si el integrando es una función racional de sen y cos, entonces la sustitución

$$t = u^*(x) = \tan x/2, \quad x\in[0,\pi\rangle$$

producirá una integral transformada con integrando racional. Úsense las identidades (3.24) y (3.25) del capítulo 6 (pág. 276) para demostrar que

$$t^2 = \tan^2 x/2 = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Partiendo de esta relación, demostrar que

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Demuéstrese también que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

y

$$dx = u'(t)\,dt = D_t(2\arctan t)\,dt = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

5. Úsese el método del problema 4 para encontrar

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ *b*) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$ *d*) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\tan x-\operatorname{sen} x}.$

6. Para integrales en que aparece e^x la sustitución

$$t = e^x, \quad x = \ln t$$

es con frecuencia útil. Encuéntrense

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-e^x}$ *b*) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ *d*) $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-16}$.

6. TABLAS DE INTEGRALES

Hemos obtenido en el curso de este trabajo muchas fórmulas de integración. Por otra parte, toda fórmula que hemos obtenido para una derivada puede escribirse como una fórmula de integración. Podríamos compilar todas estas fórmulas de integración, clasificarlas de acuerdo a algún sistema y presentarlas en una tabla. Siempre que encontrásemos una nueva fórmula de derivación, podríamos añadir la correspondiente fórmula de integración a nuestra tabla. De esta manera, después de algún tiempo, tendríamos una tabla de integración, ciertamente, extensa. Ya ha habido quien haya hecho este trabajo por nosotros y podemos disponer ahora de muchas tablas de tal tipo. Todo estudiante debe hacerse de una de ellas. Una tabla de integrales es un valioso ayudante para todo el que quiera usar el cálculo en las aplicaciones.

6.1 Ejemplo. Encuéntrese $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$.

SOLUCIÓN. En una tabla de integrales encontramos

$$\int \frac{dx}{a+be^{mx}} = \frac{1}{am}\,[mx - \log(a+be^{mx})].$$

En la tabla particular que usamos en esta ocasión, encontramos como instrucción que, para funciones de valores reales, el $\log x$ debía ser reemplazado por $\log|x|$. Además, log está denotando la función logaritmo natural que hemos denotado por ln. Tomando $a = b = m = 1$, obtenemos

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x).$$

6.2 Ejemplo. Encuéntrese $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x - a^2 e^{-x}}$.

Solución. Multiplicando el numerador y el denominador por e^x obtenemos

$$\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x} - a^2} = -\int \frac{e^x\,dx}{a^2 - e^{2x}} = -\int \frac{du(x)}{a^2 - u^2(x)}$$

donde $u(x) = e^x$. En nuestra tabla de integrales encontramos

$$\int \frac{dx}{c^2 - x^2} = \frac{1}{2c} \log \frac{c+x}{c-x}.$$

Podemos usar esta fórmula si hacemos las siguientes sustituciones: reemplazar la c de la fórmula por a y la x de la fórmula por $u(x) = e^x$. Con estas sustituciones, encontramos que tenemos la negativa de nuestra integral. De donde

$$\int \frac{dx}{e^x - a^2 e^{-x}} = -\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+e^x}{a-e^x} \right| = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-e^x}{a+e^x} \right|.$$

6.3 Ejemplo. Evalúese $\displaystyle\int_0^{2 \ln |a|} \frac{dx}{e^x - a^2 e^{-x}}$.

Solución. Podemos considerar el uso de la fórmula del ejemplo 6.2. La fórmula del ejemplo 6.2 se verifica sobre cualquier *intervalo* contenido en el dominio de definición del integrando, $\langle -\infty, \ln |a| \rangle \cup \langle \ln |a|, \infty \rangle$. Como $\ln |a|$ está en el intervalo $[0, 2 \ln |a|]$ y no está en el dominio del integrando, esta integral es una integral impropia. Si no hubiésemos notado esto y hubiésemos usado la fórmula incorrectamente, hubiéramos obtenido

$$\int_0^{2 \ln |a|} \frac{dx}{e^x - a^2 e^{-x}} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-e^x}{a+e^x} \right| \Bigg]_0^{\ln a^2}$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\ln \left| \frac{a-a^2}{a+a^2} \right| - \ln \left| \frac{a-1}{a+1} \right| \right]$$

$$= \frac{1}{2a} \left[\ln \left| \frac{1-a}{1+a} \right| - \ln \left| \frac{a-1}{a+1} \right| \right] = 0.$$

Este resultado no es correcto. Ni la integral de 0 a $\ln |a|$ ni la integral

de ln $|a|$ a 2 ln $|a|$ existen. Por ejemplo,

$$\int_0^{\ln|a|} \frac{dx}{e^x - a^2 e^{-x}} = \lim_{t\to(\ln|a|)^-} \int_0^t \frac{dx}{e^x - a^2 e^{-x}}$$

$$= \lim_{t\to(\ln|a|)^-} \left[\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-e^t}{a+e^t}\right| - \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-1}{a+1}\right|\right].$$

Ahora $\lim_{t\to(\ln|a|)^-} \ln\left|\frac{a-e^t}{a+e^t}\right| = -\infty$, de modo que la anterior integral no existe y, por tanto, la integral de 0 a 2 ln $|a|$ no existe.

6.4 Ejemplo. Encuéntrese $\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx$.

Solución. Completando el cuadrado tenemos

$$\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2+1}\,dx.$$

Nuestra tabla contiene la fórmula

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}[x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})].$$

Reemplazando la x en la fórmula por $x+1$ y la a de la fórmula por 1 y notando que $d(x+1) = dx$, tenemos

$$\int \sqrt{x^2+2x+2}\,dx = \tfrac{1}{2}[(x+1)\sqrt{x^2+2x+2} + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|].$$

Problemas

1. Encuéntrense las siguientes integrales, usando una tabla de integrales estándar. Identifíquense tanto la tabla como las fórmulas particulares usadas en cada caso.

a) $\int x^3\sqrt{x^2+5}\,dx$

b) $\int \frac{dt}{(1-4t^2)^{3/2}}$

c) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9x^2-4}}$

d) $\int \frac{d\theta}{2-\cos 2\theta}$

e) $\int \frac{x^5\,dx}{(1-x^4)^{3/2}}$

f) $\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^2}\,dx$

$g)$ $\displaystyle\int e^t \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}\, dt$

$h)$ $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{1+\cos\theta}\, d\theta$

$i)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{2+2x+x^2}$

$j)$ $\displaystyle\int x^3 \operatorname{sen} x^2\, dx$

$k)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

$i)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9t^2+4}}{t}\, dt$

$m)$ $\displaystyle\int \frac{du}{u^4\sqrt{a^2-u^2}}$

$n)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x}}$

$o)$ $\displaystyle\int \frac{x^5}{5+4x^2}\, dx$

$p)$ $\displaystyle\int (a^2-u^2)^{3/2}\, du$

$q)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+2}$

$r)$ $\displaystyle\int \frac{\cot t\, dt}{1+\operatorname{sen} t}$

$s)$ $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+2y}{1-2y}}\, dy$

$t)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4x^2-25}}{x^2}\, dx$

$u)$ $\displaystyle\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{a+bx^2}}$

$v)$ $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y-1}}$

$w)$ $\displaystyle\int \sqrt{\frac{3+x^2}{2+x^2}}\, x\, dx$.

7. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

En nuestro estudio de las funciones algebraicas elementales y trascendentes, hemos visto que la integral de funciones algebraicas muy sencillas puede conducirnos a nuevas funciones. Nuestro principal ejemplo de esto fue el de la función logarítmica cuya definición sobre $\langle 0, \infty\rangle$ era

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Como el integrando es continuo sobre $\langle 0, \infty\rangle$ sabemos, por el teorema de existencia fundamental (5.1 del capítulo 12), que la integral, ciertamente, define una función. Muchas otras nuevas funciones surgen de esta forma.

Dos ejemplos importantes son:

$$\operatorname{si} x = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du \quad \text{y} \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

A "si" se le llama función "seno integral" y "erf" es la función "error".

En esta sección nos ocupamos del cálculo numérico de tales integrales definidas. En el ejemplo 3.12 del capítulo 12, ilustramos cómo $\int_1^5 \frac{dx}{x} = \ln 5$ podía calcularse acotando la integral con sumas superiores e inferiores. Este acotamiento de una integral definida mediante sumas superiores e inferiores, es un método que puede usarse para aproximarnos a las integrales definidas. El teorema 3.14 del capítulo 12 (pág. 540) nos muestra que, si f es continua sobre $[a, b]$, entonces $\int_a^b f$ puede calcularse en esta forma hasta cualquier grado deseado de precisión. La acotación de una integral definida por sumas superiores e inferiores tiene la ventaja de que la determinación de la precisión del cálculo es inmediata. Sin embargo en muchos casos el método es difícil o imposible de aplicar, ya que requiere que los valores máximos y mínimos de la función se calculen, o sean conocidos, dentro de cada uno de los subintervalos de la partición. Por ejemplo, a menudo se presenta el caso de que uno desea aproximarse a $\int_a^b f$ donde los valores conocidos de f están dados por una tabla y estos valores pueden haber sido determinados experimentalmente.

Ahora bien, el teorema 5.3 del capítulo 12 nos dice que si f es continua sobre $[a, b]$, $\int_a^b f$ puede aproximarse mediante una suma del tipo

7.1
$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

donde $\bar{x}_i$ es un número cualquiera en $[x_{i-1}, x_i]$. Tenemos, por tanto, un segundo método de integración numérica. Aunque fácil de aplicar, es posible que el método no sea eficiente. Por eficiencia entendemos la cantidad de cálculo —que puede ser medido por el tiempo que se requiere para efectuarlo— necesario para conseguir una precisión específica. En esta sección presentamos otros dos métodos de integración numérica y daremos fórmulas que harán posible la estimación del error. El análisis del error en la aproximación de las integrales definidas puede requerir varias técnicas especializadas. Esto es particularmente cierto cuando los valores de la función se conocen sólo experimentalmente y están, por tanto, ellos mismos sujetos a error.

Las fórmulas para la integración numérica son usualmente del siguiente tipo:

7.2
$$\int_a^b f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n) + R_n$$
$$= \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + R_n,$$

donde $P = \{x_i \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ es una partición de $[a, b]$. La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ tiene que ser aproximada por $S_n = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$. El término R_n no se conocerá en forma exacta, pero alguna información sobre R_n puede hacer posible determinar la precisión de la aproximación. Por error E_n de la aproximación S_n entendemos $|R_n| = |S_n - \int_a^b f|$, el valor absoluto de la diferencia entre la aproximación y el número que se calcula.

a) *Regla trapezoidal.* La regla trapezoidal es

7.3
$$\int_a^b f = h[\tfrac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h)$$
$$+ \dots + f(a+(n-1)h) + \tfrac{1}{2} f(b)] + R_n$$

donde $h = \dfrac{b-a}{n}$. Si f'' existe sobre $[a, b]$ y está acotada por M sobre $[a, b]$, entonces podemos dar la siguiente cota para el error:

$$E_n = |R_n| \leqslant \frac{Mh^2}{12}(b-a).$$

b) *Regla de Simpson (parabólica).* La regla de Simpson es

7.4
$$\int_a^b f = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h)$$
$$+ 2f(a+4h) + \dots + 2f(a+(n-2)h)$$
$$+ 4f(a+(n-1)h) + f(b)] + R_n$$

donde n es un entero par y $h = \dfrac{b-a}{n}$. Si $f^{(4)}$ existe sobre $[a, b]$ y está acotada por M sobre $[a, b]$, entonces podemos dar la siguiente cota para el error

$$E_n = |R_n| \leqslant \frac{Mh^4}{180}(b-a).$$

7.5 Ejemplo. Calcúlense aproximaciones de $\ln 5 = \int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$ usando $n = 4$ y $n = 8$, y háganse estimaciones del error de las aproximaciones.

SOLUCIÓN 1. Regla trapezoidal. Como $\left|D_x^2\left(\frac{1}{x}\right)\right| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant 2$ sobre $1, 5$, para $n = 4 (h = 1)$ obtenemos

$$E_4 = |R_4| \leqslant \frac{2\cdot 1^2}{12}(5-1) = \frac{2}{3}$$

y para $n = 8$ $(h = \frac{1}{2})$ obtenemos

$$E_8 = |R_8| \leqslant \frac{2(\frac{1}{2})^2}{12}(5-1) = \frac{1}{6}.$$

Vemos, por tanto, que para este cálculo $h = 1$ y $h = \frac{1}{2}$ son particiones más bien bastas. Podemos esperar que la aproximación S_8 sea exacta hasta casi una cifra decimal. Por esta razón evaluamos $1/x$ solamente con tres cifras decimales.

x_i	$f(x_i) = 1/x_i$	$n = 4$ C_i	$h = 1$ $C_i f(x_i)$	$n = 8$ C_i	$h = \frac{1}{2}$ $C_i f(x_i)$
1	1.000	$\frac{1}{2}$	0.500	$\frac{1}{2}$	0.500
1.5	0.667			1	0.667
2	0.500	1	0.500	1	0.500
2.5	0.400			1	0.400
3	0.333	1	0.333	1	0.333
3.5	0.286			1	0.286
4	0.250	1	0.250	1	0.250
4.5	0.222			1	0.222
5	0.200	$\frac{1}{2}$	0.100	$\frac{1}{2}$	0.100
$\Sigma C_i f(x_i)$			1.683		3.258
$S_n = \Sigma A_i f(x_i) = h\Sigma C_i f(x_i)$			1.683		1.629

Las dos aproximaciones S_4 y S_8 pueden usarse para obtener una corrección de S_8.[1] Tenemos

$$\int_a^b f = S_n + R_n = S_{2n} + R_{2n}.$$

Ahora, por la regla trapezoidal, como h^2 aparece como un factor en la cota para el residuo, esperamos que si h se reduce por un factor de 2 entonces el residuo se reducirá en un factor de, aproximadamente, 4. Es decir, $R_{2n} \approx \frac{1}{4} R_n$. Así pues

$$S_{2n} + R_{2n} = S_n + R_n \approx S_n + 4R_{2n}$$

y podemos usar

$$R_{2n} \approx \frac{S_{2n} - S_n}{3}$$

como una corrección para S_{2n}.

En el ejemplo,

$$R_8 \approx \frac{S_8 - S_4}{3} = \frac{1.629 - 1.683}{3} = -0.018.$$

Usando esta corrección sobre S_8, obtenemos $\ln 5 = 1.629 - 0.018 = 1.611$. Con cuatro cifras decimales exactas $\ln 5 = 1.6094$, y nuestro cálculo, después de la corrección, tiene dos cifras decimales exactas. Es esto mucho mejor que lo que nuestras cotas sobre R_8 nos habrían hecho esperar. Sin corrección, desde luego, S_8 tenía tan solo una cifra decimal exacta.

SOLUCIÓN 2. Regla de Simpson. Como $\left| D_x{}^4 \left(\frac{1}{x}\right) \right| = \left| \frac{4!}{x^5} \right| \leqslant 4!$ sobre $[1, 5]$, para $n = 4$ obtenemos

$$E_4 = |R_4| \leqslant \frac{4!}{180}(5-1) = \frac{8}{15}$$

y para $n = 8$ ($h = \frac{1}{2}$) obtenemos

$$E_8 = |R_8| \leqslant \frac{4!(\frac{1}{2})^4}{180}(5-1) = \frac{1}{30}.$$

[1] Para una justificación de este tipo de corrección véase Richardson, Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 226, pág. 229 (1927).

x_i	$f(x_i) = 1/x_i$	$n = 4$ $h = 1$ C_i	$C_i f(x_i)$	$n = 8$ $h = \frac{1}{2}$ C_i	$C_i f(x_i)$
1	1.0000	1	1.0000	1	1.0000
1.5	0.6667			4	2.6668
2	0.5000	4	2.0000	2	1.0000
2.5	0.4000			4	1.6000
3	0.3333	2	0.6666	2	0.6666
3.5	0.2857			4	1.1428
4	0.2500	4	1.0000	2	0.5000
4.5	0.2222			4	0.8888
5	0.2000	1	0.2000	1	0.2000
$\Sigma C_i f(x_i)$			4.8666		9.6650
$S_n = \Sigma A_i f(x_i) = \frac{h}{3} \Sigma C_i f(x_i)$			1.6222		1.6108

Calculamos $1/x$ con cuatro cifras decimales.

Por la regla de Simpson, como h^4 aparece como un factor en la cota para el residuo, esperamos que si reducimos a h por un factor de 2, entonces el residuo se reduzca por un factor de, aproximadamente, $2^4 = 16$. Es decir, que $R_{2n} \approx \frac{1}{16} R_n$. Así pues,

$$S_{2n} + R_{2n} = S_n + R_n \approx S_n + 16 R_{2n}$$

y podemos usar

$$R_{2n} \approx \frac{S_{2n} - S_n}{15}$$

como una corrección para S_{2n}.

En este ejemplo

$$R_8 \approx \frac{S_8 - S_4}{15} = \frac{1.6108 - 1.6222}{15} = -0.0008 .$$

Usando esta corrección sobre S_8, obtenemos $\ln 5 = 1.6108 - 0.0008 = 1.6100$. Una vez efectuada la corrección, el error real en este cálculo, por la regla de Simpson, es .0006, mientras que con la regla trapezoidal fue de .002. Antes de la corrección el error en la regla de Simpson es de .001, mientras que en la regla trapezoidal era de .02.

Vista geométricamente, la aproximación de $\int_a^b f$ por (7.1) es la aproximación del área bajo la gráfica de f por la suma de las áreas de los rectángulos (figura 1). En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, f está aproximado por $f(\bar{x}_i)$ —una constante, es decir, un polinomio de grado cero.

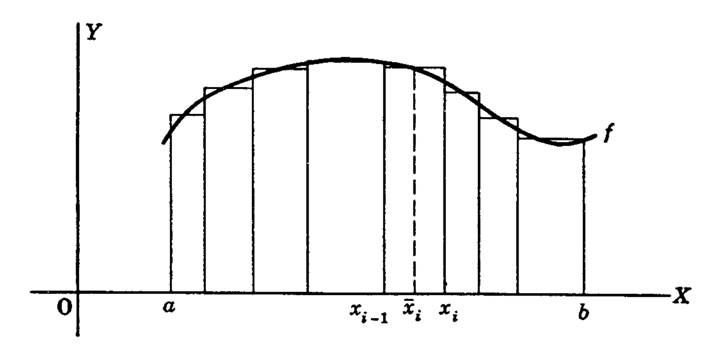


FIGURA 1

En la regla trapezoidal, el área bajo f está aproximada por el área de trapezoides, donde el intervalo $[a, b]$ ha sido dividido en n partes de igual longitud h (figura 2). El área del i-ésimo trapezoide es

$$\text{área } \mathcal{E}_i = \frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)],$$

y

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \text{área } \mathcal{E}_i &= \tfrac{1}{2}h[f(a)+f(a+h)]+\tfrac{1}{2}h[f(a+h)+f(a+2h)] \\ &\quad + \dots +\tfrac{1}{2}h[f(a+(n-2)h)+f(a+(n-1)h)] \\ &\quad +\tfrac{1}{2}h[f(a+(n-1)h)+f(a+nh)] \\ &= h[\tfrac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+ \dots \\ &\quad +f(a+(n-1)h)+\tfrac{1}{2}f(a+nh)].\end{aligned}$$

Esta es la S_n de la regla trapezoidal, y vemos que la regla trapezoidal es una aproximación del área bajo f por la suma de las áreas de los trapezoides. Hablando analíticamente, nos hemos aproximado a la función f en cada

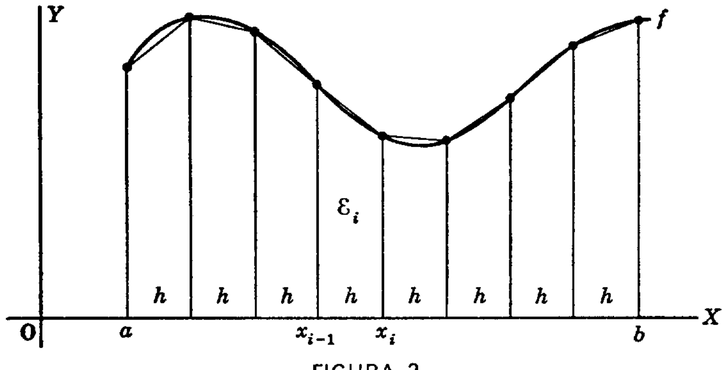


FIGURA 2

uno de los subintervalos por un polinomio de grado uno —la cuerda que une los puntos extremos de la gráfica de f en le subintervalo.

La regla de Simpson se obtiene aproximándonos a f por un polinomio de segundo grado —una parábola— sobre cada par de subintervalos (figura 3). Localicemos puntos a_0, a_1, a_2 distanciados entre sí una distancia h

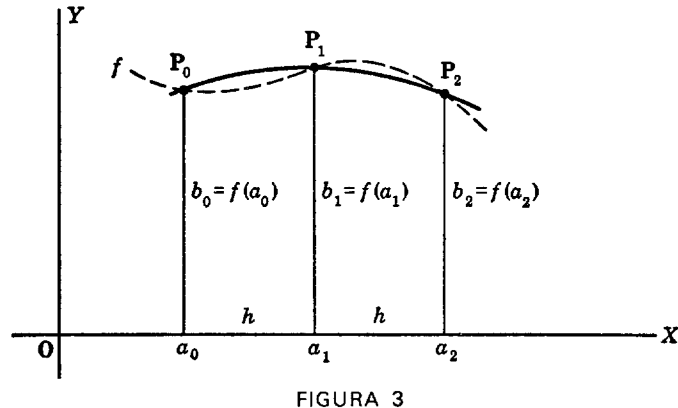


FIGURA 3

sobre el eje X. Sea p el polinomio de segundo grado o menor que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ de la gráfica de f: $\mathbf{P}_0 = (a_0, b_0)$, $\mathbf{P}_1 = (a_1, b_1)$, $\mathbf{P}_2 = (a_2, b_2)$. Se ve fácilmente que

$$p(x) = b_0 \cdot \frac{(x-a_1)(x-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + b_1 \cdot \frac{(x-a_0)(x-a_2)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}$$

$$+ b_2 \cdot \frac{(x-a_0)(x-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}$$

$$= \frac{1}{2h^2}[b_0(x-a_1)(x-a_2)-2b_1(x-a_0)(x-a_2)$$

$$+ b_2(x-a_0)(x-a_1)]$$

satisface $p(a_0) = b_0$, $p(a_1) = b_1$, y $p(a_2) = b_2$. Puede verse también que, recíprocamente, $p(x)$ es el único polinomio de segundo grado o menor que pasa por $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$. Nos aproximaremos a $\int_{a_0}^{a_2} f$ por $\int_{a_0}^{a_2} p$. Sustituyendo $x = u+a_1$ da

$$\int_{a_0}^{a_2} p(x)\,dx = \int_{-h}^{h} p(u+a_1)\,du\,.$$

Ahora bien

$$p(u+a_1) = \frac{1}{2h^2}[b_0u(u-h)-2b_1(u+h)(u-h)+b_2(u+h)u]\,.$$

Las integrales sobre $[-h, h]$ de las potencias impares de u son cero, luego

7.6 $$\int_{a_0}^{a_2} p = \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}[(b_0-2b_1+b_2)\cdot u^2+2b_1h^2]\,du$$

$$= \frac{h}{3}[b_0+4b_1+b_2] = \frac{h}{3}[f(a_0)+4f(a_1)+f(a_2)]\,.$$

Para aproximarnos a $\int_a^b f$ dividimos el intervalo $[a, b]$ en $n = 2m$ intervalos de longitud h. Sobre cada uno de los intervalos $[a, a+2h]$, $[a+2h, a+4h]$, ... , nos aproximamos a f por una parábola y, usando (7.6), sumamos las áreas bajo las parábolas que se aproximan a f y obtenemos

$$\frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)] + \frac{h}{3}[f(a+2h)+4f(a+3h)$$

$$+f(a+4h)]+ \ldots + \frac{h}{3}[f(a+(n-2)h)+4f(a+(n-1)h)+f(a+nh)]$$

$$= \frac{h}{3}[f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)$$

$$+ \ldots +2f(a+(n-2)h)+4f(a+(n-1)h)+f(a+nh)]\,.$$

Esta suma es la S_n de la regla de Simpson y vemos, así, que la regla de Simpson nos da, como aproximación a $\int_a^b f$, la suma de las áreas bajo arcos parabólicos.

Justificación de la acotación del error en la regla de Simpson

Deseamos demostrar que si $f^{(4)}$ existe sobre $[a, b]$ y si $|f^{(4)}(x)| \leqslant M$ para $x \in [a, b]$, entonces el error E_n en la regla de Simpson satisface la relación

$$E_n = |R_n| \leqslant \frac{Mh^4}{180}(b-a)$$

Sea $c = a + \dfrac{b-a}{n}(2i-1)$, $i = 1, 2, \ldots, n/2$ y sea

7.7 $$g(x) = \int_{c-x}^{c+x} f(t)\,dt - \frac{x}{3}[f(c-x)+4f(c)+f(c+x)], \quad x \in [0, h].$$

Notamos que $|g(h)|$ es el error obtenido al aproximarnos a $\int_{c-h}^{c+h} f$ por los términos correspondientes de la regla de Simpson. Si F es una función tal que $F' = f$ sobre $[c-h, c+h]$, entonces

$$\int_{c-x}^{c+x} f = F(c+x)-F(c-x), \quad x \in [0, h]$$

y

$$g(x) = F(c+x)-F(c-x) - \frac{x}{3}[f(c+x)+4f(c)+f(c-x)], \quad x \in [0, h].$$

Diferenciando g tres veces obtenemos

$$g'(x) = \frac{2}{3}[f(c+x)+f(c-x)] - \frac{4}{3}f(c) - \frac{x}{3}[f'(c+x)-f'(c-x)],$$

$$g''(x) = \frac{1}{3}[f'(c+x) - f'(c-x)] - \frac{x}{3}[f''(c+x)+f''(c-x)],$$

y

$$g'''(x) = -\frac{x}{3}[f'''(c+x)-f'''(c-x)]$$

$$= -\frac{2x^2}{3}\left[\frac{f'''(c+x)-f'''(c-x)}{2x}\right]$$

Como $f^{(4)}$ existe sobre $[a, b]$, podemos aplicar el teorema del valor medio para obtener

$$g'''(x) = -\frac{2x^2}{3} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in \langle c-x, c+x \rangle.$$

Si $f^{(4)}(x) \leqslant M$ sobre $[a, b]$, entonces

$$|g'''(x)| \leqslant \frac{2x^2 M}{3}, \quad x \in [0, h].$$

Como $g''(0) = g'(0) = g(0) = 0$, para $x \in [0, h]$ tenemos

$$|g''(x)| = \left| \int_0^x g'''(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^x |g'''(t)|\,dt \leqslant \int_0^x \tfrac{2}{3}t^2 M\,dt = \tfrac{2}{9}x^3 M,$$

$$|g'(x)| = \left| \int_0^x g''(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^x |g''(t)|\,dt \leqslant \int_0^x \tfrac{2}{9}t^3 M\,dt = \tfrac{1}{18}x^4 M,$$

$$|g(x)| = \left| \int_0^x g'(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^x |g'(t)|\,dt \leqslant \int_0^x \tfrac{1}{18}t^4 M\,dt = \tfrac{1}{90}x^5 M,$$

y

$$|g(h)| \leqslant \tfrac{1}{90}h^5 M.$$

Tomando $c = a + \dfrac{b-a}{n}(2i-1)$ y sumando desde $i = 1$ hasta $i = n/2$, obtenemos

$$E_n = |R_n| = \left| \int_a^b f - S_n \right| \leqslant \frac{n}{2}\,\frac{1}{90}h^5 M = \frac{h^4}{180}(b-a)M.$$

La cota del error en la regla trapezoidal puede justificarse de un modo análogo definiendo

$$g(x) = \int_{c-x/2}^{c+x/2} f(t)\,dt - \frac{x}{2}\left[f\left(c - \frac{x}{2}\right) + f\left(c + \frac{x}{2}\right)\right]$$

y aplicando el teorema del valor medio a $g'(x)$.

Es interesante observar que la regla de Simpson es exacta cuando f es un polinomio de tercer grado o menor ya que $f^{(4)} = 0$ y podemos tomar la cota $M = 0$.

Problemas

1. Calcúlese ln 2 por *a*) la regla de Simpson, *b*) la regla trapezoidal, usando $h = 0.1$.

2. ¿Qué valores de h aseguran un cálculo de ln 2 con seis cifras decimales exactas si se usa *a*) la regla de Simpson? *b*) la regla trapezoidal?

3. Como $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, π puede computarse por integración númérica de $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. ¿Qué valores de h aseguran seis cifras decimales exactas si la integral se calcula por: *a*) la regla trapezoidal? *b*) la regla de Simpson?

4. Calcúlese π con tres cifras decimales exactas.

5. Usando la regla de Simpson, calcúlense S_4 y S_8 y úsese S_4 para corregir S_8 para las siguientes integrales:

a) $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ *b*) $\int_2^4 \sqrt{16+x^4}\,dx$

6. Proporciónese una verificación directa del hecho de que la regla de Simpson da la respuesta exacta cuando f es un polinomio de tercer grado o menor.

7. Dados $n+1$ puntos $\mathbf{P}_i = (a_i, b_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, constrúyase un polinomio de grado no mayor que n cuya gráfica pase por $\mathbf{P}_0, \ldots, \mathbf{P}_n$ ($a_i \neq a_j$ para $i \neq j$). Pruébese que hay solamente un polinomio tal.

8. La siguiente tabla da las velocidades (lineales) de un automóvil anotadas con un minuto de intervalo

t (minutos)	velocidad (km.p.h.)
0	32.0
1	48.6
2	49.3
3	56.8
4	38.8
5	21.7
6	39.2
7	35.0
8	27.9

Estímese la distancia viajada usando *a*) la regla trapezoidal, *b*) la regla de Simpson. Calculando S_4 estímese el erroı en (*a*) y (*b*).

9. Estímese la distancia recorrida en el problema 8 ploteando los puntos sobre papel milimétrico, dibujando una curva lisa que pase por los puntos y contando los cuadrados debajo de la curva.

8. LA FÓRMULA DE TAYLOR Y LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA

La fórmula de Taylor puede usarse para obtener valores aproximados para las integrales. Si la $(n+1)$-ésima derivada de una función f existe y es continua sobre un intervalo $[a, b]$, entonces, para cualquier $x \in [a, b]$,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

y

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad \text{para algún } c \in \langle a, x \rangle.$$

De donde podemos aproximarnos a f por P_n con error $E_n(x) = |R_n(x)|$.

Se sabe que $E_n(x) = |R_n(x)| \leqslant M$ para toda $x \in [a, b]$, entonces podemos aproximarnos a $\int_a^b f$ por $\int_a^b P_n$ con error

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b P_n \right| = \left| \int_a^b R_n \right| \leqslant (b-a)M_n.$$

Este método de aproximación de integrales requiere la determinación de las primeras $(n+1)$ derivadas del integrando. Si estas derivadas son fácilmente obtenibles y si el residuo es suficientemente pequeño para n razonablemente pequeñas, entonces la aproximación de la integral por el uso de la fórmula de Taylor es un método práctico. A menudo sucede que las derivadas del integrando se hacen más y más complicadas cuando n aumenta y se hace difícil la obtención de la fórmula de Taylor para el integrando. Sin embargo, es a menudo posible, como se muestra en los siguientes ejemplos y problemas, reemplazar el integrando por una función que tenga una fórmula de Taylor fácilmente obtenible y luego mediante una sustitución adecuada obtener una aproximación del integrando original.

8.1 Ejemplo. Obténgase una aproximación polinomial para la función error

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

sobre el intervalo $[0, 1]$ con error menor que 10^{-3}.

SOLUCIÓN. Obtenemos un desarrollo para e^{-t^2} escribiendo la fórmula de Taylor para e^u y reemplazando u por $-t^2$:

$$f(u) = f'(u) = f''(u) = \ldots = f^{(n+1)}(u) = e^u$$

de modo que

$$f(u) = 1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\frac{u^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

donde c es algún número entre 0 y u. De donde

$$e^{-t^2} = f(-t^2) = 1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\ldots+\frac{(-t^2)^n}{n!}+\frac{(-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-c_1^2}$$

donde c_1 es algún número entre 0 y t. Tenemos

$$|R_n(t)| = \left|\frac{(-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}e^{-c_1^2}\right| \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}.$$

Ahora bien, $t \in [0, x] \subset [0, 1]$, de modo que

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$$

y

$$|R_6(t)| \leqslant \frac{1}{7!} = .19841 \times 10^{-3}$$

para $t \in [0, 1]$. De donde

$$e^{-t^2} = 1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\frac{t^8}{4!}-\frac{t^{10}}{5!}+\frac{t^{12}}{6!}+R_6(t)$$

y

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}+\frac{x^{13}}{13\cdot 6!}\right]$$

para $x \in [0, 1]$ con error menor que $\dfrac{2x}{7!\sqrt{\pi}} \leqslant 2\times 10^{-4}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} < 10^{-3}$

La anterior fórmula es válida para todo el intervalo [0, 1]. Sin embargo la fórmula contiene más términos de los necesarios si x no se aproxima a 1. Por ejemplo, si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces

$$|R_n(t)| = \left|\frac{(-t^2)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-c_1^2}\right| \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{2^{2n+2}(n+1)!}$$

y

$$|R_3(t)| \leqslant \frac{1}{2^8 4!} = \frac{1}{6144}$$

de modo que

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!}\right]$$

para $x \in [0, \frac{1}{2}]$ con error menor que $\dfrac{2x}{6144\sqrt{\pi}} \leqslant \dfrac{1}{6144\sqrt{\pi}} < 10^{-4}$. En particular

$$\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^7 \cdot 7 \cdot 3!}\right] = 0.5205$$

y

$$\operatorname{erf}(.1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[.1 - \frac{.001}{3} + \frac{.00001}{10} - \frac{10^{-7}}{7 \cdot 3!}\right] = 0.1125.$$

8.2 Ejemplo. La integral

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}, \quad k \in [0, 1\rangle$$

se llama integral elíptica completa de primera clase. Para $k \in [0, \frac{1}{2}]$, obténgase una aproximación de $K(k)$ con error menor que 10^{-3}.

SOLUCIÓN. Sea

$$f(u) = (1-u)^{-1/2}.$$

Entonces

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}(1-u)^{-3/2}$$

$$f''(u) = \frac{1\cdot 3}{2^2}(1-u)^{-5/2}$$

$$f'''(u) = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}(1-u)^{-7/2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n+1)}(u) = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}(1-u)^{-(2n+3)/2}$$

donde $(2n+1)!!$, que se lee "semifactorial de $2n+1$", es el producto de los enteros impares desde 1 hasta $2n+1$; es decir, $(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n+1)$. Entonces

$$f(u) = f(0)+uf'(0)+\ldots+\frac{u^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_n(u)$$

$$= 1+\frac{1}{2}u+\frac{1\cdot 3}{2^2 2!}u^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}u^3+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}u^n+R_n(u),$$

donde

$$R_n(u) = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}u^{n+1}(1-c)^{-(2n+3)/2}, \quad c\in\langle 0, u\rangle.$$

De donde

$$f(k^2 \operatorname{sen}^2 x) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

$$= 1+\frac{1}{2}k^2 \operatorname{sen}^2 x+\frac{1\cdot 3}{2^2 2!}k^4 \operatorname{sen}^4 x+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}k^6 \operatorname{sen}^6 x$$

$$+\ldots+\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}k^{2n} \operatorname{sen}^{2n} x+R_n(u),$$

donde para $k\in[0, \frac{1}{2}]$, $u = k^2 \operatorname{sen}^2 x\in[0, \frac{1}{4}]$ y

$$R_n(u) = \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}u^{n+1}(1-c)^{-(2n+3)/2}$$

$$\leqslant \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!4^{n+1}(\frac{3}{4})^{(2n+3)/2}}$$

$$= \frac{(2n+1)!!2}{6^{n+1}\sqrt{3}(n+1)}.$$

Ahora para $u \in 0, \frac{1}{4}]$,

$$R_5(u) \leqslant \frac{11!!2}{6^6\sqrt{3}\,6!} = 3.57 \times 10^{-4}$$

e

$$\int_0^{\pi/2} R_5 \leqslant \frac{\pi}{2} 3.57 \times 10^{-4} = 5.61 \times 10^{-4}.$$

Luego para $k \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[1 + \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sen}^2 x + \frac{1 \cdot 3}{2^2\, 2!}k^4 \operatorname{sen}^4 x + \ldots + \frac{9!!}{2^5\, 5!}k^{10} \operatorname{sen}^{10} x\right]dx$$

con error menor que 5.61×10^{-4}. En el problema 4 (pág. 618), vimos que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2m-1)!!}{2^m m!}\,\frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, para $k \in [0, \frac{1}{2}]$,

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2^2 2!}\right)^2 k^4 + \ldots + \left(\frac{9!!}{2^5\, 5!}\right)^2 k^{10}\right]$$

con error menor que 5.61×10^{-4}.

Problemas

1. *a*) Para $u \in [0, \frac{1}{4}]$ obténgase por la fórmula de Taylor,

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 - u^5 + u^6 + R_6(u)$$

donde

$$|R_6(u)| \leqslant 4^{-7} = (16384)^{-1}.$$

b) Úsese el resultado del problema 1*a* para encontrar una aproximación de arctan x para $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

c) Úsese el resultado del problema 1*b* para obtener una aproximación de arctan $\frac{1}{2}$.

2. La integral $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}\, dx$ se llama la integral elíptica completa de segunda clase. Usando el ejemplo 8.2 como modelo, obténgase una aproximación de $E(k)$ con error menor que 10^{-3} para $k \in [0, \frac{1}{2}]$.

3. *a*) Demuéstrese que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + R_8(x)$$

donde $|R_8(x)| = \left|\frac{x^9}{9!}\cos c\right| \leqslant \frac{|x^9|}{9!}$.

b) Usando la fórmula del problema 3*a*, obténgase una aproximación de la función seno integral, $Si(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$, para $x \in [0, 1]$ y estímese el error.

4. Demuéstrese que

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\, dx \approx \left[\frac{1}{2\cdot 2!} - \frac{1}{4\cdot 4!} + \frac{1}{6\cdot 6!} - \frac{1}{8\cdot 8!}\right]$$

y estímese el error.

5. *a*) Demuéstrese que

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + R_n(t)$$

donde $|R_n(t)| = \left|\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\, e^c\right|$ con c entre 0 y t.

b) Usando la fórmula del problema 5*a*, demuéstrese que

$$\frac{e^{xu} - e^{-xu}}{u} = 2\left[x + \frac{x^3u^2}{3!} + \frac{x^5u^4}{5!} + \frac{x^7u^6}{7!}\right] + \frac{1}{u}\left[R_8(xu) - R_8(-xu)\right]$$

donde $\left|\frac{1}{u}[R_8(xu)-R_8(-xu)]\right| = \left|\frac{x^9u^8}{9!}[e^{c_1}+e^{-c_2}]\right|$

$$\leqslant \frac{|x|^9}{9!}(1+e^{|x|}) \quad \text{para} \quad u \in [0, 1].$$

c) Usando la fórmula del problema $5b$, demuéstrese que

$$\int_0^1 \frac{e^{xu}-e^{-xu}}{u}\,du = 2\left[x + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} + \frac{x^7}{7\cdot 7!}\right]$$

con error menor que o igual a $\frac{|x|^9}{9!}(1+e^{|x|})$.

d) Calcúlese $\int_0^1 \frac{e^u-e^{-u}}{u}\,du$.

6. Usando la fórmula de Taylor calcúlese

$$\int_1^{1.2} \ln x\,dx = \int_0^{0.2} \ln(1+x)\,dx$$

con error menor que 10^{-3}.

7. Usando la fórmula de Taylor para e^x con x reemplazada por $\cos^2 u$, calcúlese

$$\int_0^{\pi/2} e^{\cos^2 u}\,du$$

con error menor que 10^{-2}.

8. Usando la fórmula de Taylor para $\sqrt{1+x}$ con x reemplazada por u^3, calcúlese

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1+u^3}\,du$$

con error menor que 10^{-5}.

9. Usando la fórmula de Taylor para $(1-x)^{-1/2}$ con x reemplazada por u^2, calcúlese

$$\int_0^{1/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

con error menor que 1.5×10^{-3} y obténgase así una aproximación de π con error menor que 10^{-2}.

9. RESUMEN

En este capítulo hemos estudiado varios métodos de integración. En las aplicaciones, uno de los métodos más importantes es el uso de tablas. Cualquiera que se enfrente a la tarea de encontrar integrales debe tener una tabla de éstas. El uso de las tablas implica el método de sustitución y el desarrollo de las funciones racionales en fracciones parciales. Si en algunas aplicaciones encontrar una integral es suficientemente importante, puede perderse mucho tiempo intentando varias sustituciones en un intento de reducir una integral a una integral conocida. A veces ésta resulta ser una actividad infructuosa, aparte de no ser eso lo que realmente se necesita en el problema.

En muchas aplicaciones se desea encontrar el valor numérico de una integral definida. Es a menudo posible obtener el valor numérico con el conveniente grado de exactitud con, relativamente, poco esfuerzo por medio de la integración numérica. Los métodos numéricos de integración son efectuados fácil y rápidamente por las modernas computadoras de alta velocidad e incluso con una calculadora común de mesa el cálculo no es difícil. La importancia de la integración numérica no debe ser subestimada. Hemos discutido tres métodos de integración numérica —la regla trapezoidal, la regla de Simpson y el uso de la fórmula de Taylor. De los primeros dos métodos, la regla de Simpson es la más precisa, pero requiere que el intervalo de integración se subdivida en un número par de subintervalos de igual longitud. Para la regla trapezoidal, el número de subintervalos puede ser par o impar y, con modificaciones obvias, puede emplearse con subintervalos distintos. La fórmula de Taylor es útil en casos en los que las derivadas del integrando pueden obtenerse con facilidad. En los casos en que los valores del integrando en puntos de subdivisión no se puede hallar con facilidad, haciendo así imprácticas las reglas de Simpson y trapezoidal, debe considerarse el uso de la fórmula de Taylor.

Problemas de repaso

1. Encuéntrense las siguientes integrales:

a) $\int I^3 \ln$ *b*) $\int I^3 \exp$

c) $\int \operatorname{arcsen}^2$ *d*) $\int \arccos^2$

e) $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^4}$ *f*) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

g) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$

h) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

i) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$

j) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

k) $\int x^3\,\sqrt[3]{2+x^2}\,dx$

l) $\int \frac{(x+1)\,dx}{1-\sqrt{x+2}}$

m) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+4x+5}$

n) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x-3)^2}$

o) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x+1)\,(x-3)}$

p) $\int \frac{(x+2)\,dx}{6x^2+x-2}$

q) $\int (1-x^2)^{5/2}\,dx$

r) $\int (x^2+1)^{5/2}\,dx$.

2. Demuéstrese que

$$\int_{-a}^{a} f = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ es una función impar} \\ 2\displaystyle\int_0^a f & \text{si } f \text{ es una función par.} \end{cases}$$

Conclúyase de ello que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\cos = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ es una función impar} \\ 2\displaystyle\int_0^{\pi} f\cos & \text{si } f \text{ es una función par} \end{cases}$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\,\text{sen} = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^{\pi} f\,\text{sen} & \text{si } f \text{ es una función impar} \\ 0 & \text{si } f \text{ es una función par.} \end{cases}$$

3. Evalúense

a) $\int_{-1}^{1} x^2 \arcsen x\,dx$

b) $\int_{-2}^{2} x^3\,\sqrt[3]{2+x^2}\,dx$

c) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-u^2}\,du$

d) $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{9+x^2}$.

4. Encuéntrese el área de la región limitada a la derecha por la elipse $16x^2+25y^2 = 400$ y a la izquierda por la recta $x = \frac{5}{2}$.

5. Encuéntrese el área de la región limitada por la hipérbola $16x^2-25y^2 = 400$ y la recta $x = 8$.

6. Encuéntrese el volumen generado haciendo girar la región del problema 4 alrededor del eje X.

7. Encuéntrese el volumen generado haciendo girar la región del problema 5 alrededor del eje Y.

Respuestas a los ejercicios

Páginas 20-21

1. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{3, 5\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$.
3. $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.
4. *a*) $\{a, b, c, d, e, f\}$; *c*) $\varnothing$; *e*) $\{a, b, c, e, f\}$ *g*) $\varnothing$; *i*) $\{b, c, e, f, g\}$.
5. *a*) $\{a, b, c, d, e\}$; *c*) $\{a, b, c, d, e\}$; *e*) $\{a, b, c, e\}$; *g*) $\varnothing$.
7. *a*) $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ es el conjunto de todos los estudiantes de un colegio que pueden resolver el problema 2. $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$ es el conjunto de todos los estudiantes del colegio que pueden resolver el problema 2 y pueden leer inglés; *b*) 1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$; 3. $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$; *c*) No; *e*) No.

Páginas 33-34

9. *a*) -4; *c*) 9; *e*) $\frac{6}{5}$.
10. *a*) $1, -5$; *c*) $-2, \frac{5}{2}$; *e*) $-\frac{3}{5}, -2$.
11. *a*) $1, -5$; *c*) $-3+\sqrt{2}, -3-\sqrt{2}$; *e*) ninguna solución.

Página 38

8. *a*) $x > -3$; *c*) $x < 1$; *e*) $x > -\frac{4}{5}$.
10. *a*) $x < 3$ y $x > 2$; *c*) $x > \frac{5}{2}$ o $x < -2$; *e*) ninguna solución.
13. *a*) 1; *c*) -1.
14. *a*) 0; *c*) 2.
15. *a*) 1) $x = 6$ o $x = -1$, 2) $x < 6$ y $x > -1$, 3) $x > 6$ o $x < -1$; *c*) ninguna solución, 2) ninguna solución, 3) x cualquier número real.

Página 40

1. *a*) $\langle 2, 3\rangle$; *c*) $[1, 3]$; *e*) $\langle 1, 7\rangle$.

Páginas 44-45

8. *a*) $4, -4$; *c*) $2, -\frac{4}{3}$; *e*) $[-\frac{3}{2}, \infty\rangle$; *g*) $-4, 0, 2$; *i*) $6, -2$.
9. *a*) $[-4, 4]$; *c*) $\langle -\infty, -10\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle$; *e*) $\langle -\infty, -4\rangle \cup \langle -1, \infty\rangle$; *g*) $[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}]$; *i*) $\langle -\infty, 2] \cup [4, \infty\rangle$; *k*) $\langle -\infty, -7\rangle \cup \langle -1, \infty\rangle$.
11. *a*) $\langle 8, \infty\rangle$; *c*) $\langle -4,0\rangle$; *e*) $\langle -\infty, \frac{1}{5}\rangle \cup \langle \frac{5}{3}, \infty\rangle$.

Página 48

3. $|a+b|$.

Páginas 49-50

1. *a*) $\langle 2, 7\rangle$; *c*) $[3, 5\rangle$; *e*) $[3, 4]$.
2. $\{x \mid x = 15n, n \text{ un entero}\}$.
6. $[1.532, 1.533]$.
12. $4.54915 \leqslant a+b \leqslant 4.55925$; $4.43336 \leqslant ab \leqslant 4.44782$.
13. *a*) $\langle -6, \infty\rangle$; *c*) $\langle 2, 3\rangle$.
14. *a*) $\langle -\infty, -9\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$; *c*) $\langle -10, 4\rangle$.
15. *a*) $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$; *c*) $\langle -\infty, -6\rangle \cup \langle -1, \infty\rangle$.
16. *a*) $\sqrt{6}$; *c*) $7^{-1/6}$; *e*) $2ab^{5/3}$.
17. *a*) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; *c*) $\frac{1}{3}\sqrt[5]{81}$; *e*) $-\frac{1}{3}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$.

Página 55

3. 5. 4. *a*) 10; *c*) $\sqrt{10}$.

Páginas 59-60

1. *a*) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (3, 11)$; *c*) $2\mathbf{a}+2\mathbf{b} = (6, 22)$; *e*) $\mathbf{P}_0+3\mathbf{a} = (-4, 3)$.
5. *a*) $\mathbf{v} = \frac{1}{7}(-1, -11)$; *c*) $\mathbf{v} = (-\frac{3}{5}, 0)$; *e*) Ninguna solución.
6. *a*) Ninguna solución; *c*) $r = -\frac{1}{2}$.

Páginas 66-67

3. *a*) $t = 0$, $\mathbf{P} = (1, 2)$; $t = 1$, $\mathbf{P} = (-1, 3)$; $t = -1$, $\mathbf{P} = (3, 1)$; $t = 2$, $\mathbf{P} = (-3, 4)$; $t = -2$, $\mathbf{P} = (5, 0)$.
   c) $t = 0$, $\mathbf{P} = (-1, 0)$; $t = 1$, $\mathbf{P} = (2, 3)$; $t = -1$, $\mathbf{P} = (-4, -3)$; $t = 2$, $\mathbf{P} = (5, 6)$; $t = -2$, $\mathbf{P} = (-7, -6)$.

6. *b*) $\mathbf{v}_g = \left(\frac{360}{\sqrt{2}}, \frac{360}{\sqrt{2}} - 60\right) \approx (254, 194)$; la velocidad lineal $|\mathbf{v}_g|$ del aeroplano respecto al suelo es aproximadamente de 320 kilómetros por hora.

Página 70

1. *a*) $(1, 1)$ y $(2, 2)$ son paralelos; *c*) $(6, 2)$ y $(-3, -1)$ son paralelos;

e) $(-5, 10)$ y $(3, -6)$ son paralelos, $r = -\frac{3}{5}$.

2. *a*) $(1, 2)$; *c*) $(1, -6)$; *e*) $(1, 2)$.

Página 73

1. *a*) $\sqrt{17}$; *c*) $\sqrt{50}$; *e*) $3\sqrt{17}$; *g*) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$; *i*) 1.

3. *a*) *No* ortogonal; *c*) ortogonal; *e*) ortogonal.

Páginas 78-79

1. *a*) Sí; *c*) sí.

2. *a*) $(0, -1)$ y $(0, 1)$; *c*) $(-5, -4)$ y $(5, 4)$.

4. *a*) -7; *c*) 116; *e*) -40.

7. *a*) Paralelas; *c*) no paralelas.

8. $\frac{2}{3}\sqrt{42}$.

Páginas 87-88

1. *a*) $\mathbf{a} = \frac{4}{5}\mathbf{b} + \frac{2}{5}\mathbf{b}^{\perp}$; *c*) $\mathbf{a} = -\frac{2}{5}\mathbf{b} + \frac{4}{5}\mathbf{b}^{\perp}$; *e*) $\mathbf{a} = -\frac{23}{29}\mathbf{b} + \frac{14}{29}\mathbf{b}^{\perp}$

2. *a*) $\text{Comp}_{\mathbf{b}}\ \mathbf{a} = 0$, $\mathbf{Proy}_{\mathbf{b}}\ \mathbf{a} = 0$; *c*) $\text{Comp}_{\mathbf{b}}\ \mathbf{a} = 0$, $\mathbf{Proy}_{\mathbf{b}}\ \mathbf{a} = 0$;

e) $\text{Comp}_{\mathbf{b}}\ \mathbf{a} = \dfrac{42}{\sqrt{61}}$, $\mathbf{Proy}_{\mathbf{b}}\ \mathbf{a} = \frac{42}{61}(-6, 5)$.

3. *a*) $\text{Comp}_{se}\ \mathbf{v} = -\dfrac{60}{\sqrt{2}}$, $\text{Comp}_{sw}\ \mathbf{v} = \dfrac{60}{\sqrt{2}}$;

c) $\text{Comp}_{se}\ \mathbf{v} = 0$, $\text{Comp}_{sw}\ \mathbf{v} = -\text{Comp}_{ne}\ \mathbf{v} = -60$.

4. *a*) Componente horizontal $\mathbf{v} = \dfrac{1100}{\sqrt{401}} \approx 55$ kmph;

b) Componente vertical $\mathbf{v} = \dfrac{55}{\sqrt{401}} \approx 2.74$ kmph;

c) el componente de la fuerza gravitacional que actúa sobre el carro *hacia arriba* de la colina es $-\dfrac{2\,000}{\sqrt{401}} \approx -100$ kilogramos.

7. *a*) 32 unidades cuadradas; *c*) 22 unidades cuadradas.

8. *a*) 1 unidad cuadrada; *c*) 2 unidades cuadradas;

e) 9 unidades cuadradas.

Páginas 93-95

1. *a*) 5; *c*) $4\sqrt{2}$; *e*) $\sqrt{773}$; *g*) $\sqrt{a^2+b^2}$; *i*) $|t\mathbf{P}_1-(1+t)\mathbf{P}_0|$.
4. *a*) Sí; *c*) no.
5. *a*) No; *c*) no.
7. *a*) 1) $\{(x, x)|x\in \mathrm{R}\}$, 2) $\{(y, y)|y\in \mathrm{R}\}$;
c) 1) $\{(x, x+1)|x\in \mathrm{R}\}$, 2) $\{(y-1, y)|y\in \mathrm{R}\}$;
e) 1) $\{(x, \frac{1}{2}x+3)|x\in \mathrm{R}\}$, 2) $\{(2y-6, y)|y\in \mathrm{R}\}$;
g) 1) la forma (1) no es posible, 2) $\{(-1, y)|y\in \mathrm{R}\}$.
8. $\mathfrak{L} = \{(x, mx+b)|x\in \mathrm{R}\}$.
10. *a*) 1) (0, 0), 2) (0, 0); *c*) 1) ninguna intersección, 2) (0, 2); *e*) 1) $(-1, 0)$, 2) ninguna intersección.
11. *a*) la recta que pasa por (2, 1) paralela a $(3, -1)$;
c) la recta por (3, 0) y (2, 5);
e) la recta horizontal 2 unidades sobre el eje X;
g) la recta que pasa por $(0, -5)$ paralela a (1, 2);
i) el segmento rectilíneo de (1, 2) a (2, 3) que no contiene los puntos extremos;
k) la recta que pasa por (0, 5) paralela a $(1, -3)$;
m) la circunferencia de radio 4 con centro en el origen.

Página 99

1. $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ y $\mathfrak{L}_4$ son paralelas; $\mathfrak{L}_3$ y $\mathfrak{L}_5$ son paralelas.
2. *a*) $\mathfrak{L} = \{(1+t, -6+t)|t\in \mathrm{R}\}$; *c*) $\mathfrak{L} = \{(1+t, -6+2t)|t\in \mathrm{R}\}$;
e) Igual que (*c*).
3. *a*) $\{(x, y_0)|x\in \mathrm{R}\}$; *c*) $\{(x-ta, y+tb)|t\in \mathrm{R}\}$.
5. *a*) (5, 0); *c*) $(-\frac{3}{2}, 0)$; *e*) $(-5, 0)$.
6. *a*) $(0, -5)$; *c*) (0, 3); *e*) (0, 10).

Páginas 105-107

1. *a*) $x = 4y = -2$; *c*) $x+3y = 10$;
e) $(y_1-y_0)(x-x_0)-(x_1-x_0)(y-y_0) = 0$.
2. *a*) *No* ortogonal; *c*) *no* ortogonal; *e*) ortogonal.
3. *a*) La recta que pasa por el origen ortogonal a $(3, -2)$;
c) la recta que pasa por $(3, -2)$ ortogonal a (1, 2).
4. *a*) 2; *c*) $\sqrt{5}$.
6. *a*) $\frac{4}{5}$; *c*) $6/\sqrt{5}$.
8. *a*) $x = \frac{1}{2}(a+b)$, $a \neq b$; *c*) $18x-4y = -61$; *e*) $x-2y = 1$.
9. *a*) $x = 2t$, $y = 3t$; *c*) $x = 3-2t$, $y = -2+t$.
11. *a*) (1, 0) y (2, 0); *c*) $(-\frac{1}{3}, -\frac{22}{3})$ y $(-\frac{11}{3}, -\frac{29}{3})$.
15. *a*) (0, 1); *c*) (1, 2).

Páginas 114-115

1. *a*) $\mathbf{c} = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$; *c*) $\mathbf{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{a} - \frac{5\sqrt{2}}{2}\mathbf{b}$.
5. *a*) $(-2, 4)$; *c*) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; *e*) $(\frac{12}{5}, \frac{14}{3})$.
6. *a*) $(2, 0)$; *c*) ninguna solución; *e*) $(0, 0)$.
8. *a*) Ninguna solución distinta de la trivial;
   c) cada punto de la recta $x - 3y = 0$ corresponde a una solución; es decir, $x = 3t$, $y = t$ es una solución para todo valor de t.
9. $\lambda = 1 : x = t$, $y = t$ es una solución para toda t; $\lambda = 5 : x = t$, $y = -t$ es una solución para toda t.
10. $(300, 90)$; ninguna; $t_0 = 3$.

Página 119

1. *a*) $m = \frac{3}{2}$; *c*) $m = \frac{3}{2}$; *e*) $m = 0$; *g*) $m = \frac{3}{2}$.
2. *a*) $x = 2t$, $y = \frac{3}{2} - t$; *c*) $x = 7$; *e*) $x = at$, $y = b(1-t)$, $a^2 + b^2 \neq 0$, o $bx + ay = ab$, $a^2 + b^2 \neq 0$.
3. *a*) $y = -3x + 4$; *c*) $y = -2$; *e*) $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Páginas 119-122

5. $y = 3x + 2\sqrt{10}$, $y = 3x - 2\sqrt{10}$.
6. $y^2 = 8(x-2)$; una parábola.
7. $(1, 1, -1)$.
9. *d*) $\mathbf{P} = \frac{1}{3}(1, 1)$.
10. $a = 4$.
12. $(6, 7) = \frac{1}{2}(12, 14)$.
14. $(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1) + \frac{y-x}{2}(-1, 1)$. 16. $\frac{y-x}{\sqrt{2}}$.

Páginas 127-128

1. *a*) $\mathfrak{D} = \{2, -1, 0, 6\}$, $\mathfrak{R} = \{1, 5, 0, 2\}$; *c*) $\mathfrak{D} = \{-5, 1, 3, 5, 7\}$, $\mathfrak{R} = \{2\}$.
3. $\{(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}), (0, 0), (\frac{2}{3}, -\frac{8}{9}), (\frac{5}{2}, \frac{5}{4}), (1 + \sqrt{2}, 1)\}$.
5. *a*) 4; *c*) $\frac{100}{27}$; *e*) $x^3 + 3x^2$; *g*) $x^3 + 3hx^2 + 3(h^2 - 1)x + h^3 - 3h + 2$.
7. *a*) $((\frac{1}{3}, \frac{1}{7}), \frac{1}{21})$; *c*) $((-\sqrt{3}, \sqrt{5}), -\sqrt{15}$; *e*) $((\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}), \sqrt[3]{2}\sqrt{3})$.
8. *a*) $\frac{10}{21}$; *c*) $4\sqrt{3}$.
9. *a*) Función; *c*) función.

10. *a*) $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36)\}$.

11. *a*) $f(x) = \frac{9}{5}x+3$ (sí); *c*) $f(x) = x^2$.

Páginas 130-131

3. No.

Páginas 133-134

1. *a*) 3; *c*) -1; *e*) 1. **11.** No.

Páginas 140-141

1. *a*) 1) $\{(2, 4), (3, 3), (4, 10)\}$, 2) $\{(2, 0), (3, -4), (4, 21)\}$,
3) $\{(-3, 4), (0, 0), (2, 16), (3, 1), (4, 9)\}$,
4) $\{(2, 16), (3, 13), (4, 30)\}$, 5) 4, 6) 0, 7) 16;

c) 1) $[f+g](x) = \begin{cases} 2x-1+\sqrt{x}, & x\in[1, 2] \\ 3+\sqrt{x}, & x\in[3, 4] \end{cases}$,

2) $[fg](x) = \begin{cases} \sqrt{x}(2x-1), & x\in[1, 2] \\ 3\sqrt{x}, & x\in[3, 4] \end{cases}$,

3) $f^2(x) = \begin{cases} 4x^2-4x+1, & x\in[0, 2] \\ 9, & x\in[3, 5] \end{cases}$,

4) $[f^2+3g](x) = \begin{cases} 4x^2-4x+1+3\sqrt{x}, & x\in[1, 2] \\ 9+3\sqrt{x}, & x\in[3, 4] \end{cases}$,

5) $3+\sqrt{2}$, 6) $3\sqrt{2}$, 7) $9+3\sqrt{2}$;

e) 1) $\{(-1, 1), (\frac{1}{2}, \frac{5}{4}), (2, -1), (4, 4+\sqrt{2})\}$,
2) $\{(-1, -2), (\frac{1}{2}, \frac{3}{8}), (2, -6), (4, 4\sqrt{2})\}$, 3) $f^2(x) = x^2$,
4) $\{(-1, 7), (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}), (2, -5), (4, 16+3\sqrt{2})\}$, 5) -1, 6) -6, 7) -5.

5. *a*) 1) $\{(2, 4), (3, -5), (4, -4)\}$, 2) $\{(2, -4), (3, 5), (4, 4)\}$,
3) $\{(3, -\frac{1}{4}), (4, \frac{3}{7})\}$, 4) $\{(2, 0), (3, -4), (4, \frac{7}{3})\}$;

c) 1) $[f-g](x) = \begin{cases} 2x-1-\sqrt{x}, & x\in[1, 2] \\ 3-\sqrt{x}, & x\in[3, 4] \end{cases}$

2) $[g-f](x) = \begin{cases} \sqrt{x}-2x+1, & x\in[1, 2] \\ \sqrt{x}-3, & x\in[3, 4] \end{cases}$,

3) $\left[\dfrac{f}{g}\right](x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{\sqrt{x}}, & x\in[1, 2] \\ \dfrac{3}{\sqrt{x}} & x\in[3, 4] \end{cases}$,

4) $\left[\dfrac{g}{f}\right](x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{2x-1}, & x \in [1, 2] \\ \frac{1}{3}\sqrt{x} & x \in [3, 4] \end{cases}$

e) 1) $\{(-1, -3), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}), (2, 5), (4, 4-\sqrt{2})\}$,

2) $\{(-1, 3), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (2, -5), (4, \sqrt{2}-4)\}$,

3) $\{(-1, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), (2, -\frac{2}{3}), (4, 2\sqrt{2})\}$,

4) $\{(-1, -2), (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (2, -\frac{3}{2}), (4, \frac{1}{4}\sqrt{2})\}$.

9. *a*) 1) R; $[f+g](x) = 2x^2-7$, 2) R; $[f-g](x) = 4x-9$,

3) R; $[g-f](x) = -4x+9$, 4) R; $[fg](x) = x^4-11x^2+18x-8$,

5) $\{x \mid x \neq 1\}$, $\left[\dfrac{f}{g}\right](x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-2x+1}$,

6) $\{x \mid x \neq -4, 2\}$, $\left[\dfrac{g}{f}\right](x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8}$;

c) 1) $\{x \mid x \neq \pm 1\}$; $[f+g](x) = \dfrac{x^4+x^2-6x+10}{x^2-1}$,

2) $\{x \mid x \neq \pm 1\}$; $[f-g](x) = \dfrac{-x^4+2x^3+x^2+10x-6}{x^2-1}$,

3) $\{x \mid x \neq \pm 1\}$; $[g-f](x) = \dfrac{x^4-2x^3-x^2-10x+6}{x^2-1}$.

4) $\{x \mid x \neq \pm 1\}$; $[fg](x) = \dfrac{x^5+2x^3-8x^2-16}{x^2-1}$,

5) $\{x \mid x \neq \pm 1, 2\}$; $\left[\dfrac{f}{g}\right](x) = \dfrac{x^3+x^2+2x+2}{x^4-x^3-8x+8}$,

6) $\{x \mid x \neq \pm 1\}$; $\left[\dfrac{g}{f}\right](x) = \dfrac{x^4-x^3-8x+8}{x^3+x^2+2x+2}$.

10. *a*) $[f+g](-3) = 11$, $[f-g](-3) = -21$, $[g-f](-3) = 21$,

$[fg](-3) = -80$, $\left[\dfrac{f}{g}\right](-3) = -\frac{5}{16}$, $\left[\dfrac{g}{f}\right](-3) = -\frac{16}{5}$;

c) $[f+g](-3) = \frac{59}{4}$, $[f-g](-3) = -\frac{81}{4}$, $[g-f](-3) = \frac{81}{4}$,

$[fg](-3) = -\frac{385}{8}$, $\left[\dfrac{f}{g}\right](-3) = -\frac{11}{70}$, $\left[\dfrac{g}{f}\right](-3) = -\frac{70}{11}$.

Páginas 151-152

1. *a*) $f\circ g = \{(0, 5), (1, 3), (2, 2), (3, 7)\}$, $g\circ f = \{(1, 1), (2, 4)\}$;
c) $f\circ g = \{(0, -2), (3, 0), (-1, -1), (2, -2)\}$, $g\circ f = \{(3, 1), (4, 4)\}$.

2. *a*) $f\circ g = I^2-12I+39$, $g\circ f = I^2-3$; *c*) $[f\circ g](x) = \dfrac{1}{4x^2-12x+10}$,
$\mathfrak{D}_{f\circ g} = [0, 5]$, $[g\circ f](x) = \dfrac{2}{x^2+1} - 3$, $\mathfrak{D}_{g\circ f} = \langle -\infty, \infty\rangle$;
e) $f\circ g = \{(0, 1), (4, \sqrt{7}), (3, 1)\}$,
$g\circ f = \{(0, 1), (4, -3), (16, 7), (64, -1), (9, 1)\}$;
g) $f\circ g = 27I^3+27I^2+9I+5$, $g\circ f = 3I^3+13$;
i) $f\circ g = \dfrac{4I^4(-8I^3+3I-3)}{I(I-1)^2}$, $g\circ f = \dfrac{I^5(-I^2+3I-2)}{4I(3I-2)^3}$.

5. *a*) $f^* = \{(2, 1), (3, 2), (5, 3), (7, 4)\}$, $g^* = \{(3, 0), (2,1), (1, 2), (4, 3)\}$;
c) f^* no existe, $g^* = I+6$;
e) $f^* = \{(x, x^2+1) \mid x\in[0, \infty\rangle\}$, $g^* = \{(x, 3-x) \mid x\in\langle -\infty, \infty\rangle\} = g$;
g) $f^* = \{(x, \sqrt[3]{x-4}) \mid x \in\langle -\infty, \infty\rangle\}$, $g^* = \frac{1}{3}(I-1)$.

7. *a*) $f^* = \{(x, \sqrt{x}) \mid x\in[0, 4]\}$.

Páginas 155-156

1. *a*) $f+g = 4I^2+2I+1$, $fg = 3I^4-2I^3+3I^2+28I-20$;
c) $f+g = I^5+I^4-3I^3+3I+4$,
$fg = I^9+I^8-4I^7-4I^6+7I^5+3I^4-16I^3+12I$.

3. *a*) $f\circ g = I^2+2$, $g\circ f = I^2+4I+4$;
c) $f\circ g = I^4+10I^2+21$, $g\circ f = I^4+4I^3-2I^2-12I+13$.

4. *a*) $[0, \infty\rangle$, $[I^{1/2}\circ I^{1/2}](x) = x$; *c*) $\langle -\infty, \infty\rangle$, $[I^{1/2}\circ I^2](x) = |x|$;
e) $[0, \infty\rangle$, $[I^2\circ(I+I^{1/2})](x) = x^2+2x^{3/2}+x$;
g) $\langle -\infty, \infty\rangle$, $[(I^3+I^2)\circ I^{1/3}](x) = x+x^{2/3}$.

Página 157

1. $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(\frac{2}{3}) = 1$, $f(\frac{3}{2}) = 3$, $f(4) = 8$, $f(\frac{10}{3}) = 6$.

3. $f(0) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = \sqrt[3]{5}$, $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{7}$.

5. $\frac{1}{4}I$. **7.** $f(t) = (1, 3)+\sqrt{5}t(2, 1)$.

Páginas 163-164

1. *a*) $(1, 3)$; *c*) $(2, 5)$; *e*) $(5, 3)$; *g*) $(0, 0)$; *i*) $-(3, 8)$; *k*) $(0, 3)$; *m*) $(5, -5)$.

2. 1) T_1 mueve todo punto horizontalmente 1 unidad y verticalmente 3 unidades; 3) $T_3 = T_1$; 5) T_5 "expande" R^2 por un factor 2; 7) T_7 es una rotación de R^2 de 90° en sentido dextrógiro.

5. *a*) $(-2, -6)$; *c*) $(0, 0)$; *e*) $(0, 1)$.
8. *a*) $(0, 0)$; *c*) $(1, 2)$ y $(-1, 2)$; *e*) $(-1, 2)$;
g) cualquier punto de la recta $x = -2$.

Páginas 176-178

1. *a*) T es no singular y rígido, $T^*(x', y') = (y', -x')$;
c) T es no singular y rígida, $T^*(x', y') = \frac{1}{\sqrt{2}} x'(1, -1) + \frac{1}{\sqrt{2}} y'(1, 1)$;
e) T es singular y no es rígida;
g) T es no singular y no es rígida, $T^*(x', y') = \frac{1}{2}(y', x')$; *i*) T es no singular y rígida, $T(x', y') = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-3)(1, 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(y'-5)(1, -1)$.
2. *a*) T hace girar a R^2 en sentido contrario a las manecillas del reloj 90°, ($T(\mathbf{i}) = \mathbf{j}$); *c*) T hace girar 45° a R^2 en dirección contraria a las manecillas del reloj, $\left(T(\mathbf{i}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\right)$; *i*) T es la reflexión respecto de la recta que pasa por el origen paralela a $(1+\sqrt{2}, 1)$ seguida de la traslación $(3, 5)$.
8. *a*) $T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+(4, 3)$; *c*) $T(\mathbf{P}) = \mathbf{P}+(39, -20)$.
9. *a*) 1) $U(x, y) = \frac{1}{2}x(1, \sqrt{3})+\frac{1}{2}y(-\sqrt{3}, 1)$,
2) $V(x, y) = \frac{1}{2}x(1, \sqrt{3})+\frac{1}{2}y(\sqrt{3}, -1)$;
c) 1) $U(x, y) = \frac{1}{2}x(\sqrt{3}, -1)+\frac{1}{2}y(1, \sqrt{3})$,
2) $V(x, y) = \frac{1}{2}x(-\sqrt{3}, 1)+\frac{1}{2}y(1, \sqrt{3})$;
e) 1) $U(x, y) = (-y, x)$, 2) $V(x, y) = \frac{1}{5}x(-3, -4)-\frac{1}{5}y(4, -3)$;
g) $U(x, y) = (y, -x)$, $V(x, y) = \frac{1}{5}x(3, 4)+\frac{1}{5}y(4, -3)$.
10. *a*) $T(X)$ es la recta $y = 5$;
c) $T(\mathcal{C})$ es la circunferencia de radio 1 alrededor del punto $(1, -2)$;
e) $L(Y)$ es la recta que pasa por el origen paralela a **b**.
11. *a*) $U(x, y) = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}(x-3y, 3x+y)$;
c) $U(x, y) = \pm\frac{1}{13}(12x-5y, 5x+12y)$.
13. *a*) $U(x, y) = (x, -y)$; *c*) $U(x, y) = (-y, -x)$.
Compruébese $U(x, -x) = (x, -x)$.

Páginas 181-182

1. 1) T_1 es la rotación de 180°; 3) T_3 es la rotación levógira de 45°; 5) T_5 es la rotación dextrógira de 60°; 7) T_7 es una transformación lineal. $T(X)$ es la recta que pasa por el origen paralela a **a**. $T(Y)$ es la recta que pasa por el origen paralela a **b**.
2. *a*) $[T_1 \circ T_2](x', y') = (-x'+2, -y'-3)$:

c) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}((1-\sqrt{3})x+(1+\sqrt{3})y), ((1+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}-1)y)$; *e*) $T_1^* = T_1$;

g) $T_2^*(x', y') = (x'+2, y'-3)$;

i) $[T_2 \circ T_3]^*(x', y') = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y'-1, y'-x'-5)$;

k) $[T_6 \circ T_7](x, y) = x\mathbf{a}+y\mathbf{b}-(x_0, y_0)$.

Páginas 185-186

1. *a*) Esta es una traslación de coordenadas. El nuevo origen está en el punto $(x, y) = (3, -2)$; *c*) Los ejes de coordenadas han girado dextrógiramente un ángulo de 90° y después se han trasladado. El nuevo origen está en el punto $(x, y) = (-1, 2)$.

2. *a*) $2x'-3y' = -7$; *c*) $2y'+3x' = 13$.

3. $T^*(x, y) = (x', y') = (x-4, y+2)$.

4. $U(x, y) = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y, y-x)$. No hay ningunas otras.

Páginas 195-198

7. *a*) $T(x, y) = x\mathbf{u}+y\mathbf{v}+(3, 5)$ donde **u** y **v** son un par cualquiera de vectores ortogonales de longitud unitaria;

c) $T(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}(1, 1) + \dfrac{y}{\sqrt{2}}(-1, 1)+(3, 5)$;

e) $T(x, y) = (-y+3, x-4)$.

11. *a*) $x' = my'$; *c*) $x'^2+y'^2 = 1$; *e*) $x'^2-y'^2 = -2$; *g*) $y'^2 = -4x'$;

i) $\dfrac{y'^2}{a^2} + \dfrac{x'^2}{b^2} = 1$; *k*) $x'^2+2y'^2 = 5$.

Páginas 207-209

3. *a*) $\{(x', y') \mid 7x'-y' = 2\sqrt{2}\}$.

5. *a*) T es la traslación que mueve el punto (x_0, y_0) al origen;

b) el origen del sistema de coordenadas se mueve hasta el punto (x_0, y_0).

7. $V(\mathcal{C}) = \{(x', y') \mid x'^2 = 4py'\}$.

Páginas 210-213

1. *a*) T_2, T_3, T_4, T_5; *c*) T_1, T_4, T_5; *e*) T_5.

3. $[T \circ U]^* (x', y') = (x'-h)(u_1, -u_2)+(y'-k)(u_2, u_1)$;
$[U \circ T]^* (x', y') = x'(u_1, -u_2)+y'(u_2, u_1)-(h, k)$.

5. $U \circ T$, donde T traslada Q_0 hasta el origen y $U(\mathbf{i}) = \dfrac{\mathbf{P}_0-\mathbf{Q}_0}{|\mathbf{P}_0-\mathbf{Q}_0|}$.

Página 221

1. *a*) $x^2-y = 0$; *c*) $y-3x = 2$; *e*) $x-y = 0$; $x, y \in [-2, \infty\rangle$.

Página 229

	X-Intercepciones	Y-Intercepciones	Simetrías	Extensión
1. *a*)	± 5	± 2	X, Y, **O**	$x\in[-5, 5]$, $y\in[-2, 2]$
c)	ninguna	± 4	X, Y, **O**	$x\in\mathrm{R}$, $y\in\langle-\infty, -4]\cup[4, \infty\rangle$
e)	ninguna	ninguno	**O**	$\begin{cases} x\in\langle 0, \infty\rangle, y\in\langle-\infty, 0\rangle \\ x\in\langle-\infty, 0\rangle, y\in\langle 0, \infty\rangle \end{cases}$
g)	1	$-2\pm\frac{4}{5}\sqrt{6}$	rectas $x = 1$, $y = -2$	$x\in[-4, 6]$, $y\in[-4, 0]$
i)	ninguna	-4	Y	$\begin{cases} x\in\langle-\infty, -1\rangle, y\in\langle 0, \infty\rangle \\ x\in\langle-1, 1\rangle, y\in\langle-\infty, -4] \\ x\in\langle 1, \infty\rangle, y\in\langle 0, \infty\rangle \end{cases}$
k)	± 2	± 2	X, Y, **O**	$x\in[-2, 2]$, $y\in[-2, 2]$
2. *a*)	0	0	**O**	1° y 3er cuadrantes
c)	0	0	X	$x\in[0, \infty\rangle$, $y\in\mathrm{R}$
e)	ninguna	ninguno	**O**	1° y 3er cuadrantes
g)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	ninguna	x, y no ambos > 0.

2. *a*), *e*), y *g*) son gráficas de funciones.
2. *c*) No es la gráfica de una función.

Páginas 231-232

1. *a*) Circunferencia, centro (0, 0), radio 4; *c*) conjunto vacío;
e) circunferencia, centro $(-1, -1)$, radio 1.
2. *a*) $(x-4)^2+(y+2)^2 = 9$; *c*) $(x-3)^2+(y+1)^2 = 29$;
e) $(x-3)^2+(y+1)^2 = \frac{25}{4}$; *g*) $x^2+y^2-6x-2y = 0$.
3. Centro $(0, c)$, radio $\sqrt{a^2+c^2}$ donde $c\in\mathrm{R}$.
4. *a*) (0, 5) y $(-5, 0)$; *c*) (4, 3).

Páginas 235-236

1. *a*) Parábola, abierta hacia arriba, $\mathbf{V} = (2, -1)$, $\mathbf{F} = (2, 0)$, directriz:

$y=-2$; *c*) parábola, abierta a la derecha, $\mathbf{V}=(-2,3)$, $\mathbf{F}=(-\frac{3}{4},3)$, directriz: $x=-\frac{13}{4}$; *e*) parábola abierta hacia arriba, $\mathbf{V}=(2,-1)$, $\mathbf{F}=(2,-\frac{3}{4})$, directriz: $y=-\frac{5}{4}$; *g*) circunferencia, centro $(0,-2)$, radio $2/\sqrt{3}$; *i*) parábola, abierta hacia arriba, $\mathbf{V}=(-\frac{1}{2},1)$, $\mathbf{F}=(-\frac{1}{2},\frac{11}{10})$, directriz: $y=\frac{9}{10}$; *k*) parábola, abierta a la derecha, $\mathbf{V}=(1,-2)$, $\mathbf{F}=(\frac{3}{4},-2)$, directriz: $x=\frac{2}{3}$.

2. *a*) $(x-2)^2=-32(y-3)$; *c*) $(x-7)^2=-14(y-\frac{3}{2})$.

3. $(y+1)^2=-6(x-\frac{7}{2})$.

6. *a*) $\begin{cases} x=\dfrac{y'^2}{8}-\dfrac{y'}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{y'^2}{8}+\dfrac{y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$ o $\begin{cases} x=t^2-2t \\ y=t^2+2t \end{cases}$ donde $y'=2\sqrt{2t}$;

c) $x=2+\dfrac{3y'^2}{100}-\dfrac{4y'}{5}$, $y=3+\dfrac{4y'^2}{100}+\dfrac{3y'}{5}$.

7. *a*) Parábola abierta hacia arriba si $p>0$, abierta hacia abajo si $p<0$, $\mathbf{V}=(0,0)$, $\mathbf{F}=(0,p)$, directriz: $y=-p$; *c*) parábola, $\mathbf{V}=(0,0)$, $\mathbf{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $p=\sqrt{2}$ (lo mismo que en 6*a*); *e*) parábola, $\mathbf{V}=(2,3)$, $\mathbf{u}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$, $p=5$ (lo mismo que en 6*c*).

Páginas 242-243

1. *a*) Elipse, $\mathbf{F}_0=(0,0)$, eje mayor a lo largo del eje de las X, $a=5$, $b=3$; *c*) elipse, $\mathbf{F}_0=(1,-2)$, eje mayor paralelo al eje X, $a=13$, $b=12$; *e*) elipse, $\mathbf{F}_0=(-2,3)$, eje mayor paralelo al eje Y, $a=5$, $b=4$; *g*) elipse, $\mathbf{F}_0=(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$, eje mayor paralelo al eje X, $a=\frac{1}{2}\sqrt{39}$, $b=\frac{1}{2}\sqrt{13}$; *i*) circunferencia, centro $(-2,\frac{2}{3})$, radio $\frac{5}{3}$.

2. *a*) $(x-5)^2+4(y-4)^2=16$; *c*) $16(x-2)^2+25y^2=400$;

e) $\mathbf{P}=(5,7)+x'(\frac{4}{5},\frac{3}{5})+y'(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ donde $\dfrac{x'^2}{25}+\dfrac{y'^2}{4}=1$

o $289x^2-504xy+436y^2+638x-3584y+8449=0$;

g) $\mathbf{P}=(-2,2)+x'(\frac{5}{13},\frac{12}{13})+y'(-\frac{12}{13},\frac{5}{13})$ donde $\dfrac{25x'^2}{6084}+\dfrac{25y'^2}{1859}=1$.

3. *a*) $9x^2+5y^2-18x+20y-151=0$ o $\dfrac{(x-1)^2}{20}+\dfrac{(y+2)^2}{26}=1$.

5. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ donde $b^2=a^2(1-e^2)$.

Páginas 248-249

1. *a*) Hipérbola, $\mathbf{F}_0 = (0, 0)$, eje sobre el eje X, $a = 3$, $b = 2$;
c) hipérbola, $\mathbf{F}_0 = (-1, 2)$, eje paralelo al eje Y, $a = 5$, $b = \sqrt{5}$;
e) elipse, $\mathbf{F}_0 = (1, -1)$, eje paralelo al eje X, $a = 4$, $b = 3$;
g) hipérbola, $\mathbf{F}_0 = (-8, 1)$, eje paralelo al eje X, $a = \frac{1}{3}\sqrt{481}$, $b = \frac{1}{4}\sqrt{481}$;
i) hipérbola, $\mathbf{F}_0 = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, eje paralelo al eje Y, $a = \frac{3}{2}$, $b = 3$;
k) circunferencia, $\mathbf{F}_0 = (-1, \frac{5}{2})$, $r = \sqrt{\frac{23}{12}}$.

2. *a*) $9x^2 - 16y^2 = 144$; *c*) $25y^2 - 4x^2 = 100$;
e) $20(x-1)^2 - 16(y-4)^2 = 320$; *g*) $4(y+4)^2 - 25(x-1)^2 = 100$.

3. *a*) $16y^2 - 9x^2 = 144$; *c*) $4x^2 - 25y^2 = 100$;
e) $16(y-4)^2 - 20(x-1)^2 = 320$; *g*) $25(x-1)^2 - 4(y+4)^2 = 100$.

4. *a*) $45(y-11)^2 - 36(x-1)^2 = 1\,620$.

7. *a*) $x'^2 - y'^2 = 2c$.

Página 254

1. *a*) $27x'^2 + 18y'^2$; *c*) $50x'^2 + 25y'^2$; *e*) $125x'^2 + 50y'^2$; *g*) $5x'^2$;
i) $169(2x'^2 + y'^2)$.

Página 259

1. *a*) Elipse; *c*) elipse; *e*) hipérbola; *g*) elipse.

Páginas 263-264

	X-Intercepciones	Y-Intercepciones	Simetrías	Extensión
2. *a*)	± 2	± 3	X, Y, $\mathbf{O}$	$x \in [-2, 2]$, $y \in [-3, 3]$
c)	± 1	ninguna	X, Y, $\mathbf{O}$	$x \notin \langle -1, 1 \rangle$

3. *a*) Hipérbola, $\mathbf{F}_0 = -(3, 1)$ eje paralelo al eje X, $a = 2$, $b = 2\sqrt{2}$;
c) circunferencia, $\mathbf{F}_0 = (2, -3)$, $r = \sqrt{\frac{7}{5}}$;
e) elipse, $\mathbf{F}_0 = (-1, -\frac{3}{4})$, eje paralelo al eje X, $a = \frac{1}{4}\sqrt{274}$, $b = \frac{1}{4}\sqrt{137}$;
g) parábola, $\mathbf{V} = (0, -\frac{3}{2})$, abierto hacia abajo;
i) recta, pendiente $-\frac{3}{2}$, Y-intercepción $-\frac{5}{2}$;
k) hipérbola, $\mathbf{F}_0 = (-2, 1)$, eje paralelo al eje X, $a = \frac{1}{3}\sqrt{6}$, $b = \frac{1}{5}\sqrt{10}$;
m) parábola, $\mathbf{V} = (1, -\frac{3}{2})$, abierto hacia arriba;
o) recta, pendiente $-\frac{1}{3}$, Y-intercepción $-\frac{5}{3}$.

5. $\dfrac{(x-6)^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$. **7.** $\dfrac{(x-2)^2}{5} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$.

9. *a*) Parábola; *c*) hipérbola; *e*) parábola.

Páginas 278-279

8. *a*) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *c*) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *e*) $\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}\right)^{1/2}, \ \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^{1/2}$

Páginas 291-293

1. *a*) $U(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y)$;

c) $U(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{85}}(-2x-9y, 9x-2y)$;

e) $U(x, y) = (-y, x) = (x, y)^{\perp}$; *g*) $U(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y, \ -x+y)$;

i) $U(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2}}(b_1 x - b_2 y, \ b_2 x + b_1 y)$.

3. $57° 17' 45''$. **5.** 0.00029.

7. 18.3 radianes/seg; 45.8 pies/seg.

11. *a*) 19.19, 20; *c*) 25.88, 26.18; *e*) 99.8, 100; *g*) 26.31, 27.75.

12. 907 millas/hora.

13. *a*) 8.6 años luz; *c*) 542 años luz.

14. *a*) $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = \dfrac{1}{\csc\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\theta = \cot\theta = 1$;

c) $\cos\theta = \sec\theta = 1$, $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta = 0$, $\csc\theta$ y $\cot\theta$ no están definidas;

e) $\operatorname{sen}\theta = \csc\theta = 1$, $\cos\theta = \cot\theta = 0$, $\tan\theta$ y $\sec\theta$ no están definidas;

g) $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\csc\theta} = -\frac{5}{13}$; $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = -\frac{12}{13}$; $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} = \frac{5}{12}$.

Página 295

1. *a*) $\cos 325° 8' = 0.82048$; *c*) $\operatorname{sen} 32.8\pi = 0.58779$;

e) $\tan 318° 15' = -0.89253$; *g*) $\cos\dfrac{8\pi}{7} = -0.90097$;

i) $\cot\dfrac{7\pi}{5} = 0.32492$; *k*) $\csc 200° = -2.9238$; *m*) $\cos\dfrac{15\pi}{8} = 0.92388$.

3. *a*) $\mathbf{a} = (1.53, 3.70)$; *c*) $\mathbf{a} = (17.91, -1.796)$.

4. *a*) $\mathbf{F} = (211.4, 133.4)$; *c*) $\mathbf{F} = (45.65, -14.83)$; *e*) $\mathbf{F} = (-1.23, -10.5)$.

Página 298

1. *a*) $45°$; *c*) $36°52'$.
2. *a*) $32°12'$; *c*) $31°20'$.
3. *a*) $225°$; *c*) $135°$; *e*) $90°$.
4. *a*) $-28°14' \pm 2'$.
5. *a*) $207°17' \pm 2'$; *c*) $107°34' \pm 2'$.
6. *a*) $94°5' \pm 10'$; *c*) $249°23' \pm 3'$.

Páginas 304-305

1. *a*) $|\mathbf{a}| = 5.6$, $|\mathbf{b}| = 14$; *c*) $\alpha = 76°$, $\beta = 14°$, $|\mathbf{c}| = 12.4$;
e) $|\mathbf{c}| = 113$, $|\mathbf{a}| = 64.7$; *g*) $|\mathbf{b}| = 33$, $|\mathbf{a}| = 85$, $\alpha = 69°$, $\beta = 21°$.
2. *a*) $|\mathbf{c}| = 4.44$, $\alpha = 116°$, $\beta = 34°$; *c*) $|\mathbf{a}| = 8.4$, $|\mathbf{b}| = 13$;
e) $|\mathbf{b}| = 8.42$, $\gamma = 73°10' \pm 10'$, $\alpha = 46°30' \pm 10'$;
g) $|\mathbf{a}| = \sqrt{13}$, $\alpha = 18°$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{65}$, $\beta = 45°$, $|\mathbf{c}| = \sqrt{104}$, $\gamma = 117°$;
i) $|\mathbf{a}| = 12\sqrt{5}$, $\alpha = 124°$; $|\mathbf{b}| = 16$, $\beta = 30°$; $|\mathbf{c}| = 4\sqrt{13}$, $\gamma = 26°$.
3. La antena tiene una altura de 71.4 metros y está a 264.7 metros sobre el suelo.
5. $\mathbf{V}_{wp} = (592, -38)$ donde la dirección de $\mathbf{i}$ es E y la dirección de $\mathbf{j}$ es N.

Páginas 310-312

1. *a*) $\sqrt{2}(1, 1)$; *c*) $\sqrt{2}(1, 1)$; *e*) $\frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$.
2. *a*) $r = 1$, $\theta = \pi$; *c*) $r = \sqrt{2}$, $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$; *e*) $r = 19.8$, $\theta = 131°$.
9. *a*) $r = a \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta$; *c*) $r = a \operatorname{sen} \theta \tan \theta$; *e*) $r = a \cos 2\theta \sec \theta$.

Páginas 312-314

4. *a*) $n\pi$, n cualquier entero; *c*) $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + n\pi$, n cualquier entero;
e) $(-1)^{n+1} \dfrac{\pi}{6} + n\pi$, n cualquier entero; *g*) $\dfrac{\pi}{4} + n\pi$, n cualquier entero.
6. *a*) $U(x, y) = \pm \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x+3y, -3x+y)$.
11. 1 000 "mils" de infantería = 1 radián = 1 018 "mils" de artillería.
13. *a*) $\langle -\infty, \infty \rangle$; *c*) $\langle -\infty, -1 \rangle \cup [1, \infty \rangle$.
15. 4.545 metros.

Páginas 321-322

1. *a*) $1+2+3+4+5$; *c*) $r+r^2+r^3+r^4+r^5+r^6+r^7$; *e*) $r+r^3+r^5+r^7$.
3. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$. **5.** *a*) $\frac{1}{2}(3^n-1)$; *c*) $\frac{5}{2}\,\frac{3^n-1}{3^{n-1}}$.
7. *a*) 5; *c*) 125.

Página 327

1. $\sum_{k=1}^{6} 3a_k = 3a_1+3a_2+3a_3+3a_4+3a_5+3a_6$;
$3\sum_{k=1}^{6} a_k = 3(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)$.
4. *a*) 385; *c*) $\frac{1}{6}(2n^3+9n^2+13n)$; *e*) 2025.

Páginas 329-330

2. *a*) $\binom{6}{0}=1$, $\binom{6}{1}=6$, $\binom{6}{2}=15$, $\binom{6}{3}=20$, $\binom{6}{4}=15$, $\binom{6}{5}=6$, $\binom{6}{6}=1$;
c) $\binom{100}{0}=1$, $\binom{100}{1}=100$, $\binom{100}{2}=4\,950$. $\binom{100}{3}=161\,700$,
$\binom{100}{97}=161\,700$, $\binom{100}{98}=4\,950$, $\binom{100}{99}=100$, $\binom{100}{100}=1$;
3. *a*) $32x^5-80x^4+80x^3-40x^2+10x-1$;
c) $16a^4+96a^3+216a^2+216a+81$;
e) $x^{5/2}-10x^2+40x^{3/2}-80x+80x^{1/2}-32$.
7. $720x^8$.

Páginas 331-332

12. *a*) 25316; *c*) 25316. **13.** *a*) $81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$.
15. $28x^{12}y^2$.

Páginas 337-338

1. *a*) h. **2.** *a*) $m=\frac{1}{2}$. **3.** $m=1$.

Páginas 354-356

2. *a*) 0; *c*) $\frac{1}{2}$; *e*) 6; *g*) $ax_0{}^2$; *i*) 0; *k*) 0; *m*) $4a+2b+c$. **13.** 0. **15.** 0.

Páginas 364-365

1. *a*) 3; *c*) 6; *e*) 6. **2.** *a*) 27; *c*) $\frac{1}{6}\sqrt{3}$; *e*) 3.
3. *a*) $2x$; *c*) $4x^3$; *e*) $-2x^{-3}$. **4.** *a*) 2; *c*) 1; *e*) 1; *g*) 1.

Páginas 370-371

7. Sí. **8.** *a*) $n\pi$; *c*) 0,2; *e*) ninguno.

Página 374

1. *a*) $32t_0$; *c*) $51.5t_0$; *e*) $9.65t_0^2$.

Páginas 381-382

2. *a*) 2; *c*) m; *e*) $2aI$; *g*) $\dfrac{-1}{(I+5)^2}$; *i*) $\dfrac{-I^2+3}{(I^2+3)^2}$;

k) $2I$ sobre $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, \infty\rangle$.

3. *a*) -3; *c*) $2ax$; *e*) $8x+6x^2$; *g*) $\dfrac{-6x}{(x^2+2)^2}$; *i*) $\dfrac{2}{(x+2)^2}$.

5. *a*) 0 para x no un entero;
c) 2 sobre $\langle -\infty, 3\rangle$, 0 sobre $\langle 3, \infty\rangle$, $f'(3)$ no existe.

Páginas 387-388

7. *a*) $10I+2$; *c*) $2I+\cos$; *e*) $\cos+\sec^2$; *g*) 0; *i*) $2\sec^2$; *k*) $2I-\cos$;

m) $2I\,\text{sen} + I^2\cos$; *o*) $\dfrac{-(1+I^2)\,\text{sen} - 2I\cos}{(1+I^2)^2}$;

q) $2\,\text{sen}\cos$; *s*) $\dfrac{1+\cos+\text{sen}}{(1+\cos)^2}$.

8. *a*) $16x^3+8x+3$; *c*) $2x-\text{sen}\,x$; *e*) $2x\cos x-x^2\,\text{sen}\,x$; *g*) 0; *i*) $2\cos x$;

k) $x\cos x$; *m*) $\dfrac{x\cos x-\text{sen}\,x}{x^2}$; *o*) $\cos^2 x-\text{sen}^2 x$;

q) $3x^2\,\text{sen}\,x+x^3\cos x$; *s*) $-\text{sen}\,x$; *u*) $\text{sen}\,x+\sec x\tan x$;

w) $2\cos x-(2x-3)\,\text{sen}\,x$; *y*) $\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$.

Páginas 392-393

1. *a*) $2x \sec^2 (x^2+2)$; *c*) $-\csc^2 (\text{sen}\, x) \cos x$; *e*) $3 \tan^2 x \sec^2 x$; *g*) $2 \sec^2 y \tan y$; *i*) $-4\pi \text{ sen} (4\pi\theta)$; *k*) $\omega \cos (\omega t+\delta)$.

2. *a*) $12x^2(x^3+2)^3$; *c*) $3 \text{ sen}^2 x \cos x$; *e*) $9 \text{ sen}^2 3x \cos 3x$; *g*) $-3 \text{ sen}^{-4} x \cos x$; *i*) $-4(2x+1)^{-3}$; *k*) $\dfrac{-2}{(t-1)^2}$.

3. *a*) $\frac{1}{2}[I^{-1/2} \circ \text{sen}] \cos$; *c*) $(I^{-2/3} \circ \tan \circ 3I)(\sec^2 \circ 3I)$; *e*) $\dfrac{4I}{(2+I)^3}$; *g*) $-2 \csc (\csc + \cot)^2$; *i*) $\dfrac{I(I+2)}{(I+1)^2} \sec^2 \circ \left(\dfrac{I^2}{I+1}\right)$; *k*) $(2I+3) \cos \circ (I^2+3I)$; *m*) $\dfrac{\text{sen}}{|\text{sen}|\,(1+\cos)}$; *o*) $-(\cos \circ \cos)\, \text{sen}$.

Páginas 394-395

1. *a*) $f' = 12I^3+6I^2-10I+2$, $f'' = 36I^2+12I-10$; *c*) $f' = (1-I)^{-2}$, $f'' = 2(1-I)^{-3}$; *e*) $f' = \frac{1}{4} \cos \circ (4I)$, $f'' = -\text{sen} \circ (4I)$; *g*) $F'(\theta) = -\csc\theta \cot\theta$, $F''(\theta) = \dfrac{1+\cos^2\theta}{\text{sen}^3\theta}$; *i*) $G'(x) = \dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$; $G''(x) = \dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$.

6. *a*) $(I^2-20)\cos + 10I \text{ sen}$; *c*) $-\text{sen}$.

Páginas 399-401

1. *a*) $2 \cos 2x\, dx$; *c*) $\dfrac{6x(3x-1)\,dx}{(6x-1)^2}$; *e*) $(\cos x - 2x \text{ sen } x) \cos x\, dx$; *g*) $(\text{sen } \pi x + \pi x \cos \pi x)dx$.

2. *a*) $\dfrac{\sec^4 x}{(1-\tan^2 x)^2}$; *c*) $-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$; *e*) $-6 \text{ sen } 3x$; *g*) $\dfrac{-8}{(2x-3)^2}$.

3. *a*) 13.0385; *c*) 4.9733; *e*) 0.455; *g*) 1.105.

5. 19.38 m^2. **7.** 1.774 cm^3.

Páginas 404-405

1. 0.1644×10^{-2} cm/°C.

3. 9.43×10^{-4} cm²/seg.
5. 0.052 metros/seg.
7. -0.075 amp/seg.
9. 699.92 km/hr.
11. 0.631 m³/hr.

Páginas 408-409

1. *a*) $\frac{1}{3}(I^3+1)$; *c*) $\frac{1}{4}(15-\cos^4)$; *e*) $\frac{1}{15}[\text{sen}^3 \circ (5I)-149]$.
2. *a*) $\frac{3}{2}t^2-2$; *c*) $-t^3+4t-3$; *e*) $\frac{1}{18}(109-2\cos 3t)$.

Páginas 415-416

6. *a*) ∞; *c*) no existe; *e*) ∞; *g*) 3; *i*) 0.

Páginas 417-420

2. *a*) 3; *c*) 1; *e*) 1.
5. *a*) $-5\,\text{sen}\,5x$; *c*) $3\cos(\tan 3x)\sec^2 3x$; *e*) 0; *g*) $-4I\,\text{sen} \circ (2I^2+3)$;
i) $5\tan^4 \sec^2$; *k*) $\frac{1}{2}[I^{-1/2} \circ (I^2+\sec)](2I+\sec\tan)$;

m) $\dfrac{2x+\sec x\tan x}{2\sqrt{x^2+\sec x}}$; *o*) $5\tan^4 x\sec^4 x+2\tan^6 x\sec^2 x$;

q) $\dfrac{(x^2+5\cot x)(\text{sen}\,x+x\cos x)-x\,\text{sen}\,x(2x-5\csc^2 x)}{(x^2+5\cot x)^2}$.

6. *a*) 11.958; *c*) 0.8747. **7.** 0.035 cm.
9. $\frac{1}{n}$ %. **11.** 6.19 m. **17.** 324. **19.** 2.29 m/seg; 1.63 m/seg.

Páginas 424-425

2. *a*) Superiormente acotada, no inferiormente acotada, no acotada; *c*) superiormente acotada, inferiormente acotada, acotada.
5. *a*) sup = 7, ínf = 2; *c*) no hay supremo, ínf = 1.

Página 429

1. *a*) sup = 1, ínf = 0, no tiene máximo, 0 es el mínimo;
c) no hay sup, ínf = 0, no hay máximo, 0 es el mínimo.

5. El conjunto de todos los números racionales positivos cuyos cuadrados son mayores que 3.

Página 435

1. *a*) 1.1 o 1.2; *c*) 1.7 o 1.8. 3. 2.236. 5. 1.26. 10. *a*) [0, 27]; *c*) [0, 9⟩.

Páginas 437-438

1. Sí, no. 3. Sí, sí.

Páginas 442-443

4. *a*) $\frac{\varepsilon}{12}$. 6. Sí.

Página 445

1. *a*) Superiormente acotada, inferiormente acotada, acotada; *c*) superiormente acotada, inferiormente acotada, acotada.
2. *a*) Ínf $= 0$, sup $= 9$; *c*) ínf $= 0$, sup $= \frac{1}{9}$.
5. *a*) Máx $= 9+a$, mín $= a$; *c*) máx $= 58$, mín $= -2$; *e*) máx $= \frac{1}{4}$, mín $= \frac{1}{7}$.

Página 447

3. Ínf $= \frac{1}{2}$, sup $= \frac{5}{4}$. 7. $\langle -\infty, -1] \cup [1, \infty\rangle$. 9. Sí, sí.

Páginas 453-454

1. *a*) Máx $= 2$, mín $= -14$; *c*) máx $= 21$, mín $= -3$; *e*) máx $= \sqrt{5}\sqrt[3]{2}$, mín $= -\frac{3}{25}\sqrt{5}\sqrt[3]{150}$; *g*) máx $= \sqrt{2}$, mín $= -\sqrt{2}$; *i*) máx $= \sqrt{2}$, mín $= 1$.
5. $h = \frac{4}{3}a$, $r = \frac{2}{3}\sqrt{2}a$, $V = \frac{32}{81}\pi a^3$.
7. $l = \frac{2}{3}a$, $h = \frac{1}{6}a$, $V = \frac{2}{27}a^3$.
9. Un cuadrado de lado $\sqrt{2}r$.
11. Después de andar $\frac{13}{8}$ de kilómetro por el camino.
13. $6 \times \sqrt{7}$, $A = 6\sqrt{7}$. 15. $5\sqrt{5}$.

Página 457

1. *a*) Cualquier número en $\langle 1, 4 \rangle$; *c*) 0; *e*) .69.

Páginas 459-460

1. $f(x) = -3,\ x \in \langle 1, 5 \rangle$. **5.** $y(x) = 2x^2+3$.

Páginas 466-468

1. *a*) $-\frac{2187}{256}$ es el mínimo relativo y el mínimo absoluto;
c) 0, mínimo relativo; 16 máximo relativo; 0, mínimo absoluto;
e) 12, mínimo relativo; *g*) -1 máximo relativo, 3 mínimo relativo.
3. 6, 6. **5.** $ 100. **7.** 3 000. **9.** 22.23 cm × 15.88 cm.
11. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\ h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. **13.** $\sqrt{8.54}$ m. **15.** $R = r$.
17. *a*) Se encuentra $m-4$ kilómetros a lo largo de la playa;
b) se encuentra totalmente en el agua.

Páginas 479-481

1. *a*) Hacia arriba $\langle 0, \infty \rangle$, hacia abajo $\langle -\infty, 0 \rangle$;
c) hacia arriba $\langle -\infty, \infty \rangle$;
e) hacia arriba $\langle 0, \infty \rangle$, hacia abajo $\langle -\infty, 0 \rangle$, punto de inflexión 0;
g) hacia arriba $\left\langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle, \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty \right\rangle$, hacia abajo $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$,
puntos de inflexión $-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$;
i) hacia arriba $\langle -\infty, 0 \rangle$, hacia abajo $\langle 0, \infty \rangle$, punto de inflexión 0;
k) hacia arriba $\langle 1, \infty \rangle$, hacia abajo $\langle -\infty, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle$, punto de inflexión 1.
3. *a*) $\frac{3}{16}PL,\ L$; *b*) $0,\ \frac{8}{11}L$.

Página 482

1. *a*) $\text{Máx} = 1-\frac{\pi}{4},\ \text{mín} = \frac{\pi}{4}-1$.
2. *a*) Mínimo relativo -35, -160; máximo relativo 29;
decreciente $\langle -\infty, -1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle$; creciente $\langle -1, 1 \rangle, \langle 4, \infty \rangle$;
cóncava hacia arriba $\langle -\infty, \frac{1}{3}(4-\sqrt{19}) \rangle, \langle \frac{1}{3}(4+\sqrt{19}), \infty \rangle$;

cóncava hacia abajo $\langle \frac{1}{3}(4-\sqrt{19}), \frac{1}{3}(4+\sqrt{19})\rangle$.

c) mínimo relativo 2; decreciente $\langle -\infty, 0\rangle$; creciente $\langle 0, \infty\rangle$; cóncava hacia arriba $\langle -\infty, \infty\rangle$.

Páginas 492-494

1. *a*) Sí; *c*) no, por ejemplo, 2 no tiene inverso multiplicativo.

15. *a*) $8+2i$; *c*) $15+16i$; *e*) $-i\sqrt{2}$; *g*) $\frac{9}{37}+\frac{20}{37}i$.

17. *a*) $5+i$; *c*) $10+20i$; *e*) $-i$; *g*) $-i$; *i*) 1.

18. *a*) $\frac{2}{29}+\frac{5}{29}i$; *c*) $2-3i$; *e*) no hay solución;
g) $z_1 = (9+19i)/34$, $z_2 = (-5-37i)/34$.

Páginas 499-501

1. *a*) $e^{i\pi/2}$; *c*) $e^{i3\pi/2}$; *e*) $\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$; *g*) $2\sqrt{3}\,e^{i5\pi/6}$;
i) $2\sqrt{3}\,e^{i\pi/3}$; *k*) $8e^{i2\pi/3}$; *m*) $3e^{i\pi/2}$; *o*) $7e^{i\pi}$.

2. *a*) $-6\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{12}\right) = -3\sqrt{2}\,(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\,i)$

$= -8.196-2.196i$; *c*) $-3-3\sqrt{3}i$; *e*) $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$.

3. *a*) $2\sqrt{2}\,e^{i3\pi/4}$; *c*) $\dfrac{e^{i3\pi/2}}{5^6\,2^3}$; *e*) $29^{-3/2}\,e^{-5.81i}$;

g) $25\sqrt{5}\,e^{4.43i}$; *i*) $\sqrt{2}\cos(\omega t+\pi/4)$;
k) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\cos(\omega t-\pi/4)$.

5. *a*) Circunferencia, centro en el origen, radio 1;
c) la recta $x = -2$; *e*) la recta $y = 1$; *g*) el semiplano sobre el eje X;
i) interior del círculo, centro en $(-1, 0)$, radio 1;
k) el intervalo $[-1, 1]$; *m*) el eje Y.

6. *a*) $1+i$, $-1-i$; *c*) $2\sqrt[4]{2}\,e^{i5\pi/12}$, $2\sqrt[4]{2}\,e^{i11\pi/12}$, $2\sqrt[4]{2}\,e^{i17\pi/12}$,
$2\sqrt[4]{2}\,e^{i23\pi/12}$; *e*) $3\sqrt[6]{2}\,e^{i\pi/4}$, $3\sqrt[6]{2}\,e^{i11\pi/12}$, $3\sqrt[6]{2}\,e^{i19\pi/12}$.

7. *a*) 3, $\frac{3}{2}(-1+\sqrt{3}i)$, $\frac{3}{2}(-1-\sqrt{3}i)$; *c*) $1, e^{i2\pi/5}, e^{i4\pi/5}, e^{i6\pi/5}, e^{i8\pi/5}$;
e) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.

10. *a*) $\sqrt{29}\,\mathrm{sen}\,(\theta+0.38)$; *c*) $\sqrt{29}\,\mathrm{sen}\,(\theta+1.19)$.

Páginas 507-508

1. *a*) $(I-4)(2I^2+8I+29)+121$; *c*) $\frac{1}{2}(I+3)(I^2+I+2)-\frac{7}{2}I$;
e) $\frac{1}{8}(20I^2+42I+105)(2I^3-5I^2+1)+\frac{1}{8}(521I^2-18I-161)$.

2. *a*) $(I-1)^3$; *c*) $(I-1)\left(I+\frac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(I+\frac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

e) $(I-1)(I+i)(I-3i)$.

Página 509

1. *a*) $Q = I+1,\ R = 4$; *c*) $Q = I^4+I^3+2I+2,\ R = 3$;
e) $Q = 5I^2-13I+27,\ R = -55$.

2. *a*) $-74,\ -58,\ -83$; *c*) $86,\ -\frac{9}{16}$; *e*) $-9,\ -3,\ 475$.

Página 513

1. *a*) $2,\ -2,\ -3$; *c*) $-\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$; *e*) 1.

2. *a*) $(I-1)(I+1)(I+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{21})(I+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{21})$; *c*) $(I-1)(I+1)^2(I+2)$;
e) $2(I-\frac{1}{2})\left(I+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(I+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Página 515

a) $7\pi/6,\ 11\pi/6\ (210°,\ 330°)$; *c*) $\pi/6,\ 5\pi/6,\ 7\pi/6,\ 11\pi/6\ (30°,\ 150°,\ 210°,\ 330°)$;
e) $0,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3\ (0°,\ 120°,\ 240°)$;
g) $\pi/3,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3,\ 5\pi/3\ (60°,\ 120°,\ 240°,\ 300°)$;
i) sin soluciones; *k*) $0,\ 2\pi/3\ (0°,\ 120°)$.

Páginas 521-522

1. *a*) 3.24; *c*) 0.269; *e*) 0, −0.88. **3.** *a*) 0.51; *c*) 1.70; *e*) ±0.92.

4. *a*) 4.64; *c*) 3.08.

Páginas 523-524

1. *a*) $8-3i$; *c*) $26-13i$; *e*) $-i$.

2. *a*) $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; *c*) $\dfrac{1+i}{16}$; *e*) $\dfrac{-\sqrt{15}-\sqrt{5}\,i}{405\,000}$.

3. *a*) $\dfrac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$; *c*) $\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$.

4. *a*) $2(I+5)(I-\frac{3}{2})(I+i)(I-i)$; *c*) $2(I-1)(I+1)(I+\frac{3}{2})(I-\sqrt{5})(I+\sqrt{5})$.

5. *a*) $\pi/6,\ \pi/2,\ 5\pi/6,\ 3\pi/2$; *c*) $\pi/3$; *e*) $\pi/6,\ 5\pi/6,\ 7\pi/6,\ 11\pi/6$;
g) $x = k\pi/4,\ k = 0, 1, \ldots, 7$.

6. *a*) ±0.82; *c*) 0, 0.69.

Páginas 530-532

1. 2. **3.** $2.496 < \pi < 3.5$. **5.** $d = \frac{k}{2}a^2$. **7.** $a^4/4$.

Páginas 541-543

3. 1.60. **5.** *b*) 1.8.
9. *a*) $|P| \leqslant 6.4 \times 10^{-4}$ por problema 8; $|P| \leqslant 10^{-3}$ por problema 7;
c) $|P| \leqslant 0.1$ por problema 8; $|P| \leqslant 0.11$ por problema 7.

Páginas 547-549

1. Aproximación deseada 2 600; contestación exacta 2 500.
2. *a*) 0.785; *c*) 0.694. **3.** 11.75.
6. *a*) $\int_1^9 x^3\,dx$; *c*) $\int_{-5}^{13} 2x\,dx$; *e*) $\int_a^b f(x)\,dx$.

Páginas 567-569

1. *a*) 72; *c*) $\frac{1}{2}$; *e*) -2; *g*) $8^{14}/14$; *i*) la integral es indefinida;
k) $\frac{1}{3}$; *m*) -80; *o*) $\frac{987}{3} = 332\frac{1}{3}$; *q*) la integral es indefinida;
s) π; *u*) $\frac{\pi}{2}$; *w*) $\frac{2t}{1+t^4}$; *y*) $\frac{2\theta}{1+\cos^2\theta^2} - \frac{1}{1+\cos^2\theta}$.
2. *a*) 36; *c*) 50; *e*) 1. **3.** $10\sqrt{5/3}$. **5.** $\frac{64}{3}$.
6. *a*) $\int_0^{5/16} (10-32t)\,dt + \int_{5/16}^{30} (32t-10)\,dt = 14\,103\frac{1}{8}$;
c) $\frac{1}{3}[(10\,001)^{3/2} - (101)^{3/2}]$.
7. *a*) $\frac{1}{3}[(1+I)^3 - 1]$; *c*) $y(t) = y_0 + \int_0^t \frac{\text{sen}}{1+I^2}$.

Páginas 572-573

1. $\frac{13}{3}$. **3.** 0. **5.** $\frac{2}{\pi}$. **7.** $\frac{1}{2}$. **9.** 0. **11.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$. **13** 0.
14. *a*) $E(\bar{u})$, donde $\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$. 15. *c*) $\bar{x} = \frac{1}{2}\,\frac{c_2 l^2 + (c_1 - c_2)a^2}{c_2 l + (c_1 - c_2)a}$.

Páginas 577-579

1. *a*) Integral impropia de primera clase;
c) $1/r_0$. Integral impropia de la primera clase;
e) ∞. Integral impropia de primera clase;
g) 2. Integral impropia de primera clase;
i) ∞. Integral impropia de segunda clase;
k) 4. Integral impropia de segunda clase;
m) ∞. Integral impropia de segunda clase;
o) ∞. Integral impropia de segunda clase.

2. *a*) 0; *c*) $\frac{2}{a^2}$. **3.** *a*) Divergente; *c*) divergente; *e*) divergente. **4.** 4.

Páginas 580-582

1. *a*) F está definida sobre $\langle 0, \infty \rangle$ y es una función creciente. La gráfica de F es cóncava hacia abajo.
c) Máximo relativo en $t = (2k-1)\pi$ y en $t = -2k\pi$ para $k = 1, 2, \ldots$ Mínimo relativo en $t = 2k\pi$ y en $t = -(2k-1)\pi$ para $k = 1, 2, \ldots$ Hay un punto de inflexión en $t = 0$ y en todos los puntos en que $t = \tan t$. (Véase el ejemplo 8.4, página 520.)

4. *a*) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; *c*) $(28)^{11}/33$. **7.** *a*) 0; *c*) 0.

9. $\frac{b^2}{2}\operatorname{sgn} b - \frac{a^2}{2}\operatorname{sgn} a$, donde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$; sgn x se lee "signo de x". No es difícil ver que $D_x\left(\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn} x\right) = x \operatorname{sgn} x = |x|$.

11. *a*) $2\sqrt{6}$; *c*) ∞; divergente; *e*) 0.

Páginas 590-591

2. $\frac{32}{3}$. **4.** $\frac{1}{12}$. **6.** $\frac{32}{3}$. **8.** 18. **10.** ∞. **12.** No hay ninguna región. **14.** 21. **16.** 9. **18.** La pendiente de la recta es $3(2-2^{2/3})$.

Páginas 593-594

1. πa^2. **3.** $2\pi a^2$. **5.** $\pi a^2/2$. **7.** $\frac{\pi}{2}(2b^2+a^2)$.

9. Área del rizo más pequeño:

$$\frac{\pi-\alpha}{2}(2b^2+a^2)-2ab \operatorname{sen}\alpha - \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$$

$$= \frac{\pi-\alpha}{2}(2b^2+a^2) - \frac{3}{2}b(a^2-b^2)^{1/2};$$

área del rizo mayor:

$$\frac{\alpha}{2}(2b^2+a^2)+\frac{3}{2}b(a^2-b^2)^{1/2}, \text{ donde } \tfrac{1}{2}\pi<\alpha<\pi \text{ y } \cos\alpha = -\frac{b}{a}.$$

11. $\frac{1}{2}(\pi-2)a^2$. **13.** $\frac{1}{2}(\pi-2)a^2$.

15. $\frac{1}{2}r^2(\alpha - \text{sen}\,\alpha)$, donde α es el ángulo subtendido por la cuerda y r es el radio de la circunferencia.

Páginas 597-598

1. 69 pie-libras. **3.** $15\frac{r_0}{r}(r-r_0)$ kilográmetros. **5.** $\frac{kpq}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$.

Páginas 601-603

1. *a*) $s(t) = -\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$;

c) $y(t) = \frac{1}{3}\left[1-\cos\left(3t-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{3}[1-\text{sen}\,3t]$.

3. $(1.44)2^{2/3}$ libras.

5. *a*) Juan: 24.7 millas. Roberto: 24.5 millas. Si Juan simplemente promedia las velocidades que ha apuntado, su estimado es de 25.2 millas. *c*) 19.8 millas < distancia recorrida < 29.2 millas.

7. *a*) $s(t) = -16t^2+200t+100$; $s_{max} = 725$;

c) $y(t) = 10+\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{12}$; $y_{max} = \frac{43}{4}$.

9. $x^2+y^2 = c^2$; circunferencias concéntricas con el origen como centro.

Páginas 608-611

7. 90.1. **9.** $-\frac{1}{4}$. **11.** $\frac{1}{4}(t^2+t+1)^4$. **13.** $\frac{1}{12}(2I+1)^6$.

15. $\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$. **17.** $(a^2+t^2)^{1/2}$. **19.** 0. **21.** $-\frac{15^6-1}{12}$.

23. No definida. **25.** $\sqrt{2}-1$. **27.** 1.

31. No (obsérvese que 6.7 requiere que f sea continua sobre $\mathfrak{I}$. Por ejemplo, $\int \text{sgn}\, x\,dx = |x|$ sobre $\langle -\infty, \infty\rangle$. El problema 29 es otro ejemplo).

Páginas 618-621

1. *a*) $\cos + I\,\text{sen}$; *c*) $\frac{1}{4}(\text{sen}\circ 2I - 2I\cos\circ 2I)$; *e*) $\frac{1}{3}\left(\frac{\text{sen}}{\cos^3}+2\tan\right)$.

2. *a*) 0; *c*) $4\cos\frac{5}{2}+10\operatorname{sen}\frac{5}{2}-4$; *e*) $\frac{1696}{105}$.

6. *a*) $\frac{3}{8}(18^{4/3}-9^{4/3})$; *c*) $\frac{1}{3}$; *e*) $1-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$; *g*) $a^3/3$.

Páginas 624-625

1. *a*) $\pi/5$; *c*) $5\pi/6$. **2.** *a*) $\dfrac{2\pi p^3}{5}$; *c*) $\pi/2$. **4.** 3.6521×10^6 pies-libras.

Páginas 633-636

1. *a*) $\displaystyle\int_0^{\pi}\operatorname{sen} x\,dx = 2$; *c*) $\displaystyle\int_a^b x\,dx$ o $\displaystyle\int_0^{b-a}(a+x)\,dx$;

e) $\displaystyle\int_a^b x\,dx-\int_a^b x\,dx = 0.$

2. *a*) $\displaystyle 2\int_a^b x\,dx$; *c*) $\displaystyle\int_a^b \cos x\,dx$. **7.** $\frac{4}{3}\pi r^3$.

10. *a*) $\pi/15$; *c*) $7\pi/24$; *e*) $17\pi/24$.

11. *a*) $\frac{16}{3}$ pies^3; *c*) $\frac{4}{3}$ pies^3. **12.** $18\sqrt{20}$. **13.** $\frac{2}{3}\pi a^3(16-6\sqrt{3})$.

Páginas 644-647

1. *a*) $4\sqrt{29}$; *c*) $\frac{222}{3}$; *e*) 8; *g*) $\dfrac{3\pi}{2}a$.

2. *a*) $\displaystyle\int_0^{\pi}(1+\cos^2)^{1/2}$; *c*) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+3\cos^2 2\theta)^{1/2}\,d\theta$;

e) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{ed}{(1-e\cos\theta)^2}\sqrt{1+e^2-2e\cos\theta}\,d\theta.$

5. *a*) $\displaystyle\frac{2}{3}\left[\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)^{3/2}+\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right)^{3/2}-2\right]$; *c*) $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

6. *a*) $\mathbf{v}(t)=(10,\,-at+10)$, $\mathbf{a}=(0,\,-a)$; *c*) $20/a$.

8. *a*) $\mathbf{v}(t)=2t\mathbf{r}^{\perp}(t)$; *c*) $s(t)=t^2r_0$; *e*) 0;
g) $\mathbf{a}(t)=-4t^2\mathbf{r}(t)+2\mathbf{r}^{\perp}(t)$; *i*) $a_T=2r_0$.

Páginas 648-651

1. $2/\omega$ **4.** πa^2. **5.** *a*) 24π; *c*) $\pi/2$.
7. $3\pi a^2/8$ (esta curva es una hipocicloide con cuatro puntas y se llama *astroide*). **9.** $\frac{2048}{105}$. **11.** 1.52×10^5 pies-libras.
13. *a*) $\dfrac{4\pi ab^2}{3}$ donde $a > b$. **15.** $124\pi/3$. **17.** $4r^3/\sqrt{3}$. **19.** $\frac{2}{3}a^3 \tan \alpha$.
21. $y(x) = \frac{1}{4}x^4 \operatorname{sgn} x$, donde $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$; sgn x se lee "signo de x".
23. La velocidad de escape es aproximadamente la de 10.77 kilómetros/segundo, o sea, alrededor de 38 616 kilómetros poı hora.
25. *a*) $\mathbf{v}(t) = (v_1, -at + v_2)$; *c*) $\dfrac{v_2}{a}$.
26. *a*) (50, 0); *c*) $\left(\dfrac{1}{\pi} - 1\,250\pi, 125\right)$.

Página 661

1. *a*) $\frac{1}{12}$; *c*) 1; *e*) 4; *g*) $\frac{1}{6}$.

Página 664

1. *a*) $\frac{2}{3}I^{-1/3} + \frac{3}{4}I^{-3/4}$; *c*) $\frac{1}{2}I^{-1/2} + \frac{1}{3}I^{-2/3}$; *e*) $3[I^{1/2} \circ (1 + 2\tan)]\sec^2$; *g*) $3\sec^{3/2} 2x \tan 2x$.
3. A 16 metros del punto más próximo al almacén. Distancia = 122 metros.

Páginas 669-670

1. *a*) ln 2; *c*) $\frac{1}{12}\ln x^6 y$. 3. *a*) $\dfrac{e-1}{e+1}$; *c*) $0, 1 - \sqrt{2}$.
5. *a*) $2/x$; *c*) $\dfrac{1}{x \ln x}$; *e*) $\dfrac{x}{x^2 + a^2}$.
6. *a*) $I^3 + \frac{1}{2}I^2 - 5I - \frac{1}{2}\ln \circ (I^2 + 1)$; *c*) $-\ln \circ |\cos|$; *e*) $\frac{1}{2}I^2 \circ \ln$.

Páginas 672-673

1. *a*) 0.00005; *c*) 0.30728. **2.** *a*) 0.694×10^{-3}; *c*) 2.81.
3. *a*) $1 + \ln$; *c*) sec; *e*) $\dfrac{1}{\cos} = \sec$; *g*) $\dfrac{4e^{2x}}{e^{4x} - 1}$.

4. *a*) $\frac{1}{5}\exp\ (5I)$; *c*) $2\exp\ I^{1/2}$; *e*) $\ln\circ(1+\exp)$; *g*) $\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}$;
i) $\frac{1}{8}\ln(3+2e^{4x})$; *k*) $\frac{1}{2}x^2$. **5.** $\ln(-x)$.

Páginas 680-682

1. *a*) $\log_2 8 = 3$; *c*) $\log_{10} 100 = 2$; *e*) $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$; *g*) $\log_{10} 0.1 = -1$.
2. *a*) $2^3 = 8$; *c*) $10^2 = 100$; *e*) $10^{0.30103} = 2$; *g*) $8^{5/3} = 32$.
4. *a*) 3.46; *c*) 1.26; *e*) 2.10.
5. *a*) $3I^{-1}\log_a e$; *c*) $-(\tan)\log_a e$; *e*) $(\ln a)\cos\exp_a\circ\text{sen}$;
g) $(2x+x^2\ln 3)3^x$; *i*) $\dfrac{-\cos x}{1-\text{sen}\,x}\log_3 e$; *k*) $3x^2 2^{x^3}\ln 2$.

7. *a*) $\dfrac{\exp_3\circ(2I)}{2\ln 3}$; *c*) $\dfrac{\exp_2\exp}{1+\ln 2}$; *e*) $\dfrac{\exp_5\circ\text{sen}}{\ln 5}$;
g) $\dfrac{2^{3x}}{3\ln 2}$; *i*) $\dfrac{3^x e^x}{1+\ln 3}$; *k*) $-\dfrac{2^{-x}}{\ln 2}$.

Páginas 684-688

1. *a*) $-\frac{1}{2}\cos 2x$; *c*) $\dfrac{1}{b}\ln|\sec bx|$; *e*) $\frac{1}{2}\ln|\text{sen}\,2x|$;
g) $\frac{1}{3}\ln|\csc 3x-\cot 3x|$; *i*) $\frac{1}{2}\sec^2$; *k*) $-2\csc$; *m*) $2\,\text{sen}\,\dfrac{x}{2}$;
o) $-\frac{1}{3}\cos^3$; *q*) $\tan x$; *s*) π; *u*) $-\frac{1}{4}\cot 4x$; *w*) $2\ln(\sqrt{2}-1)$;
y) $-\frac{1}{3}\cot 3\theta-\theta$.
3. *a*) $\frac{1}{7}\cos^7 x-\frac{1}{5}\cos^5 x$; *c*) $\frac{15}{128}$; *e*) $\sec x+\cos x$.
4. *a*) $\tan x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x$; *c*) $\frac{1}{10}\tan^5 2x+\frac{1}{14}\tan^7 2x$; *e*) $\frac{1}{3}\tan^3 x$.
5. *a*) $\frac{1}{3}\csc^3 x-\frac{1}{5}\csc^5 x$; *c*) $-\frac{1}{9}\csc^3 3x$.
7. *a*) $\frac{1}{32}(4x-\text{sen}\,4x)$; *c*) $x+\text{sen}^2 x$.
8. *a*) $-\frac{1}{20}(5\cos 2x+\cos 10x)$; *c*) $\frac{1}{18}(9\,\text{sen}\,x+\text{sen}\,9x)$.
10. *c*) $\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|$.
11. *a*) $-\dfrac{1}{n-1}\cot^{n-1}x-\displaystyle\int\cot^{n-2}x\,dx$; *c*) $-\frac{1}{3}\cot^3 x+\cot x+x$.

12. *a*) π; *c*) $\tan x+2\ln|\csc 2x-\cot 2x|-\cot x$;
e) $\frac{2}{3}\text{sen}^{3/2}-\frac{2}{7}\text{sen}^{7/2}$; *g*) $\frac{1}{2}\text{sen}\,2x$; *i*) $\frac{1}{2}\tan^2+\ln\circ|\cos|$;
k) $\frac{1}{2}\tan^2+4\ln\circ|\cos\text{sen}|+\frac{1}{2}\cot^2$; *m*) $\tan+\frac{2}{3}\tan^3+\frac{1}{5}\tan^5$.

Páginas 696-699

1. *a*) $-\pi/4$; *c*) $2\pi/3$; *e*) 0; *g*) $\pi/4$; *i*) 0.848; *k*) 0.45; *m*) 0.245.

7. *a*) $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; *c*) $\dfrac{-\text{sen}\,x}{|\text{sen}\,x|}$; *e*) $\dfrac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$.

9. *a*) $\text{arcsen}\,\dfrac{x}{3}$; *c*) $\dfrac{\pi}{12}$; *e*) $\frac{1}{2}\ln 2$; *g*) $\dfrac{1}{6}\,\text{arcsec}\,\dfrac{x^2}{3}$; *i*) $\frac{1}{3}\,\text{arcsen}\circ(\frac{3}{4}I)$;

$k)$ $\frac{1}{15}\operatorname{arcsec}\circ(\frac{1}{5}I)$; $m)$ $\operatorname{arcsen}\circ\left(\frac{I-2}{3}\right)$;

$o)$ $\frac{1}{4}\ln|4x^2+25| - \frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{5}$. **11.** 3 radianes/horas.

Páginas 700-701

1. $a)$ $x\sqrt{x^2+1}\left[\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}\right]$;

$c)$ $\frac{x^2e^x}{(x^2-1)^{5/3}\operatorname{sen}x}\left[\frac{2}{x}+1-\cot x-\frac{10x}{3(x^2-1)}\right]$; $e)$ $\frac{1}{\operatorname{sen}x}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

2. $a)$ $x^x[1+\ln x]$; $c)$ $(\ln x)^x\left[\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right]$.

Páginas 712-713

1. $a)$ $f(x)=x^3-3x^2+5$; $c)$ $f(x)=-x+4x^3+20\int_0^x t(x-t)^3\,dt$;

$e)$ $$\cos x=-(x-\pi/2)+\frac{(x-\pi/2)^3}{3!}-\frac{(x-\pi/2)^5}{5!}+$$
$$+\frac{(x-\pi/2)^7}{7!}-\frac{1}{8!}\int_{\pi/2}^x (x-t)^8\operatorname{sen}t\,dt;$$

$g)$ $\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+R_4(x)$ donde $R_4(x)=\int_0^x\frac{5t^4-10t^2+1}{(1+t^2)^5}(x-t)^4dt$;

$i)$ $f(x)=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^k$;

$k)$ $$f(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{3!!x^2}{2^2 2!}-\frac{5!!x^3}{2^3 3!}+\frac{7!!x^4}{2^4 4!}-\frac{9!!x^5}{2^5 5!}+\frac{11!!x^6}{2^6 6!}+R_6(x)$$

donde $R_6(x)=-\frac{13!!}{2^7 6!}\int_0^x(1+t)^{-15/2}(x-t)^6\,dt$.

3. $a)$ 12.0416; $c)$ 4.4721. **5.** $\langle -\sqrt[3]{6}\times10^{-1},\ \sqrt[3]{6}\times10^{-1}\rangle$.
8. $a)$ No; $c)$ no; $e)$ no. **9.** No.

Páginas 714-717

1. $a)$ 0; $c)$ $\sqrt{23}-1$; $e)$ $-1+I^{1/2}\circ(I-2)$ sobre $[3,\infty\rangle$.

2. *a*) $\dfrac{t^2}{t^{2/3}(t^3+1)}$; *c*) $\dfrac{2t}{t^4+1}$; *e*) $\dfrac{2 \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$;

g) $\dfrac{-1}{\sqrt{2x-4x^2}}$; *i*) $\dfrac{1}{x \ln x}$.

4. *a*) $\frac{1}{2}\ln 2$; *c*) $-\sqrt{4-x^2}$; *e*) $-\dfrac{2}{3}\cos^3 \dfrac{x}{2}$; *g*) $\frac{3}{2}$; *i*) $\dfrac{1}{b}\ln |a+b\exp|$;

k) $\frac{1}{2}(e^{2x}+3^{2x}\log_3 e)$; *m*) $a \operatorname{senh} 1$; *o*) $\frac{1}{3}\sec 3x$.

5. *a*) Máx en $-\dfrac{1}{e}(1, 1)$, mín en $\dfrac{1}{e}(1, 1)$, ningún punto de inflexión; *c*) máx en $\frac{1}{2}\sqrt{2}(1, e^{-1/2})$, mín en $-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1, e^{-1/2})$, puntos de inflexión en $(0, 0)$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}(1, e^{-3/2})$. **7.** $a = 0$.

10. *a*) $\lambda = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, a arbitraria; *c*) $\lambda = -1 \pm 2i$, a arbitraria.

11. $\beta = -1$, $\omega = \pm 2$.

12. *a*) $x(t) = ae^{\pm\sqrt{2}t}$, $y(t) = a(\pm\sqrt{2}-1)e^{\pm\sqrt{2}t}$, a arbitraria.

13. *a*) $x(t) = \cosh t$; *c*) $x(t) = \cosh t + b \operatorname{senh} t$.

14. *a*) 0, 0.747; *c*) 0.567; *e*) 0.59; *g*) 0.80.

15. *a*) $\ln(a+x) = \ln a + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{x}{a}\right)^k + R_n(x)$

donde $R_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+1}\left[\dfrac{x}{a+c}\right]^{n+1}$ c entre 0 y x; *c*) 0.18232.

17. $|R_2(x)| \leqslant \frac{1}{156}$ para $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

Páginas 724-726

1. *a*) $t \arctan - \frac{1}{2}\ln\ (1+t^2)$; *c*) $(2-t^2)\cos + 2t \operatorname{sen}$;
e) 0 (el integrando es una función impar); *g*) $t \arccos - \sqrt{1-t^2}$.

2. *a*) $-x\cos x + \operatorname{sen} x$; *c*) $\frac{2}{3}x^{3/2}\ln x - \frac{4}{9}x^{3/2}$; *e*) $\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}$;
g) $\frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$; *i*) $\operatorname{sen} x(\ln|\operatorname{sen} x| - 1)$;
k) $\frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\ln|\sec x + \tan x|$; *m*) $\frac{1}{2}$; *o*) $\frac{16}{3}$;
q) $x^{n+1}\left[\dfrac{\ln x}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right]$. **5.** $1-2e^{-1}$. **7.** $\dfrac{\pi}{2} - 1$. **9.** *a*) $\dfrac{2\pi}{9e^3}(4-e^3)$.

Páginas 738-739

3. *a*) $\dfrac{2}{x-4} + \dfrac{3}{2x+1}$; *c*) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x+1}$;

$e)\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{2x}{x^2+2} + \dfrac{2}{(x^2+2)^2}$; $g)\ x - \dfrac{8x}{x^2+4} + \dfrac{16x}{(x^2+4)^2}$.

4. $a)\ \dfrac{-1}{8(2x+1)^4}$; $c)\ \dfrac{-1}{4(x^2+1)^2}$; $e)$ $\arctan(x+1)$; $g)\ \dfrac{-1}{x+1}$;

$i)\ \dfrac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + \dfrac{1}{2}\arctan(x+1)$;

$k)\ \dfrac{17x-1}{7(2x^2+x+1)} + \dfrac{34}{7\sqrt{7}}\arctan\dfrac{4x+1}{\sqrt{7}}$

5. $a)\ \frac{1}{3}\ln|(x+1)(x-2)^5|$; $c)\ \ln\left|\dfrac{x(x-2)^{4/5}}{(2x+1)^{13/10}}\right|$;

$e)\ 2x + \ln\left|\dfrac{(x+1)^3(x+2)^4}{(x-1)^2}\right|$; $g)\ -\dfrac{2}{x+1} + \ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|$;

$i)\ 2\ln|x(x-1)^2| + \dfrac{1}{x}$; $k)\ \ln|x(x^2+1)^2| - 3\arctan x$;

$m)\ \frac{1}{9}\pi\sqrt{3} + \frac{1}{3}\ln 2$; $o)\ \frac{2}{3} + \frac{31}{54}\pi\sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln 12$.

Páginas 743-745

1. $a)\ \dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$; $c)\ \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}} - \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{4}$;

$e)\ 3\ln|2+\sqrt{3}| - \frac{3}{2}\sqrt{3}$; $g)\ \frac{25}{4}\pi$; $i)\ \dfrac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}$.

3. $a)\ \frac{2}{45}(9+x^2)^{5/4}(5x^2-36)$; $c)\ \frac{2}{15}(4+x)^{3/2}(3x-8)$.

5. $a)\ \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{2+\tan x/2}{2-\tan x/2}\right|$; $c)\ \ln|1+\tan x/2|$.

6. $a)\ x - \ln|1-e^x|$; $c)\ \arctan e^x$

Páginas 747-748

1. $a)\ \frac{1}{15}(3x^2-10)(x^2+5)^{3/2}$; $c)\ \frac{1}{18}x\sqrt{9x^2-4} + \frac{2}{27}\ln|3x+\sqrt{9x^2-4}|$;

$e)\ -\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}} - \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x^2$; $g)\ \dfrac{e^t}{4}\left[2\operatorname{sen}^2\dfrac{t}{2} - 2\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2} + 1\right]$;

$i)\ \arctan(x+1)$; $k)\ 2\arctan\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$; $m)\ -\dfrac{\sqrt{a^2-u^2}}{3a^4u^3}(a^2+2u^2)$;

$o)$ $\frac{1}{16}x^4 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{25}{128}\ln(5+4x^2)$; $q)$ $\frac{1}{4}\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{2}}{x+2+\sqrt{2}}\right|$;

$s)$ $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4y^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} 2y$; $u)$ $\left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right)\sqrt{a+bx^2}$;

$w)$ $\frac{1}{2}\sqrt{(2+x^2)(3+x^2)} + \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2+x^2} + \sqrt{3+x^2}|$.

Páginas 758-759

1. $a)$ 0.69315. **2.** $a)$ $\leqslant \frac{1}{24}$. **3.** $a)$ $\leqslant \frac{1}{1633}$.

5. $a)$ $s_4 = 0.88181$, $s_8 = 0.88290$.

7. $$a_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\dots(a_0-a_n)} + a_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_n)} + \dots + a^n \frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})}.$$

Páginas 764-766

1. $c)$ 0.4636.

3. $b)$ $1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!}$ con error menor que $\frac{1}{9\cdot 9!} = 0.9062\times 10^{-6}$.

5. $d)$ 2.1145. **7.** 2.75. **9.** 3.14.

Páginas 767-769

1. $a)$ $\frac{1}{16}I^4(4\ln - 1)$; $c)$ $I\operatorname{arcsen}^2 + 2\sqrt{1-I^2}\operatorname{arcsen} - 2I$; $e)$ $\pi/4$;

$g)$ $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$; $i)$ $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right|$; $k)$ $\frac{3}{28}(2+x^2)^{4/3}(2x^2-3)$;

$m)$ $\ln(x^2+4x+5) - 3\arctan(x+2)$; $o)$ $\frac{1}{4}\ln|(x+1)(x-3)^7|$;

$q)$ $\frac{1}{48}x\sqrt{1-x^2}(8x^4-26x^2+33) + \frac{5}{16}\operatorname{arcsen} x$.

3. $a)$ 0; $c)$ $\frac{1}{2}\pi a^2$.

5. $\frac{32}{5}\sqrt{39} - 20\ln\left(\frac{8+\sqrt{39}}{5}\right)$. **7.** $\frac{208}{5}\pi\sqrt{39}$. **9.** $\frac{8}{9}\pi(2e^3+1)$.

Índice analítico

Aceleración, 374 (prob. 2)
Aceleración, vector, 646 (prob. 6)
Adición
de funciones, 134
de números complejos, 487
de números reales, 25
de pares ordenados, 55
de vectores, 57, 61
Amplitud de un número complejo, 494
Análisis, 51
Ángulo
definición de, 286
de inclinación, 251
de una recta, 296
de un vector, 295 (prob. 2)
de intersección de rectas, 296
medida en radianes de un, 286
Ángulos interiores de un triángulo, 299
Ángulos y rotaciones, 286
Apolonio de Perga, 52, 334
Aproximación
de integrales definidas, 539, 547, 749
de raíces de ecuaciones, 431, 463
de transformaciones, 179
por la fórmula de Taylor, 760
por la regla de Simpson, 750, 757
por la regla del trapezoide, 750
Aproximaciones sucesivas, solución de ecuaciones por, 516
Arco de circunferencia, 266
Área, 526, 543, 585, 591
de la gráfica de una función, 532 (prob. 8e), 543 (prob. 10)
de un paralelogramo, 84
de un rectángulo, 526
de un sector circular, 531
de un segmento rectilíneo, 531 (prob. 8c)
de un triángulo, 84
de un triángulo rectángulo, 527
de un arco de circunferencia, 531 (prob. 8d)
Argumento de un número complejo, 494
Arquímedes, 52, 266, 269, 526
Asíntotas, 470, 472, 474,
de una hipérbola, 246
Axioma del supremo, 425

Bifolio, 311 (prob. 9)
Bisector ortogonal, 104
Bisector perpendicular, 104

Cálculo
los fundadores del, 526
teoremas fundamentales del, 558, 560
Cambio de coordenadas, 182, 203
Campo, 488
de los números complejos, 488
Cardioide, 310 (prob. 4b)
Cartesiano, producto, 56
Centro de masas, 121 (prob. 9), 571, 573 (prob. 15)
Cero de una función, 483
Circunferencia, 229
longitud del arco de, 266
ecuaciones polares de, 307
Cisoide de Diocles, 312 (prob. 9)
Complejo conjugado, 491
Componente radial de la velocidad, 646
Componentes, 82, 288
Componente transverso de la velocidad, 647 (prob. 7d)
Composición
de funciones, 141
Concavidad, 474
Congruencia, 198
Conjunto(s), 17
igualdad de, 18
intersección de, 18
nulo, 18
unión de, 18
vacío, 18
Conservación
de la energía, ley de 616
del momento, ley de, 617
Constante, función, 131
derivada de una, 378
Continuidad, 365
por pedazos, 558 (prob. 9)
uniforme, 438
Convergencia de integrales, 574, 575, 578 (probs. 2, 3)
Coordenadas
de un punto, 23
polares, 305
rectangulares (cartesianas), 52, 203
Cotas, 422
Creciente, función, 458, 655
Cuadros mínimos, método de los, 468 (prob. 18)
Cubierta, 436
Cuerda focal
de una elipse, 243 (prob. 4)
de una hipérbola, 249 (prob. 5)
de una parábola, 236 (prob. 8)
Cuerda, longitud de 279, (prob. 9), 291 (prob. 9)
Curva elástica, 480 (probs. 2, 3)
Curvas
longitud de, 636
rectificables, 637

Decreciente, función, 458, 655
Dedekind, Ricardo, 23, 24

Densidad, 600
Dependencia lineal de vectores, 107, 115 (prob. 12)
Derivadas, 375
de la composición, 388
fórmulas para, 391
notación para las, 375, 377, 394, 399
segundas, 394
teoremas sobre, 382
Descartes, René, 52
Desigualdad, 25, 34
cuadrática, 36
del triángulo, 42, 71, 86, 495
de Schwarz, 86
lineal, 36
Desplazamiento, 46
representado por un vector, 65
Determinante, 113, 121 (prob. 20)
Dibujo de gráficas, 468
Diferenciación (*véase* Derivada)
Diferenciación logarítmica, 699
Diferencial, 395
aproximación por una, 396, 705
Dirección
de una recta, 116
de vectores, 68
Directriz, 232, 260
Distancia
entre puntos, 90, 93 (prob. 2)
sobre una recta numérica, 49 (prob. 6, sección 3)
de un punto a una recta, 102
División
de números complejos, 490
de números reales, 29
de funciones, 138
Divergencia de integrales, 574, 575, 578 (probs. 2, 3)
División sintética, 508
Dominio de una función, 124-125, 668, 676, 708

Ecuación característica de una forma cuadrática, 252
Ecuación cuadrática, 32, 257, 484
de dos variables, 257
solución de, 32, 485
Ecuación polar
de una circunferencia, 307
de un conjunto (curva), 307, 311 (prob. 6)
de una sección cónica, 311 (prob. 7)
Ecuaciones
características, 252
cuadráticas, 32
implícitas, 220
lineal, 30, 102, 113
homogénea, 114-115 (prob. 7)
trigonométricas, 513
Ecuaciones diferenciales, 405, 538
Ecuaciones lineales, 30, 102, 113
simultáneas, solución de, 113
Ecuaciones paramétricas, 218
de una circunferencia, 282 (prob. 2)
de una elipse, 283 (probs. 3, 4)
de una parábola, 232
y área, 619 (probs. 7, 9)
Ecuaciones polares, 309
Ecuaciones vectoriales
de una elipse, 238
de una hipérbola, 244
de una parábola, 232
de una recta, 100
de un conjunto, 219
Elemento de un conjunto, 17
Elemento identidad (neutro), 25, 136, 146, 187, 488
Elipse, 236, 257, 259, 262
ecuaciones paramétricas de una, 283 (prob. 3)
ecuación polar de una, 311 (prob. 7)
ecuaciones paramétricas de una, 283 (prob. 3)
Eje conjugado de una hipérbola, 245
Eje mayor de una elipse, 239
Eje menor de una elipse, 239
Eje transverso de una hipérbola, 245
Energía
cinética, 403, 616
conservación de la, 616
potencial, 616
Error
en el uso de diferenciales, 633
en la aproximación de integrales por la fórmula de Taylor, 760
en la fórmula de Taylor, 705
en la regla del trapezoide, 750
en la regla Simpson 750, 757
de truncamiento, 706
Escalar, producto, 73, 83, 192
Excentricidad de una sección cónica, 259
Espacio vectorial, 141 (prob. 12)
bidimensional (V^2), 57
Espiral de Arquímedes, 310 (prob. 3b)
Espiral hiperbólica, 310 (prob. 5)
Estrofoide, 311 (prob. 9)
Euclides, 23, 52, 88, 283, 313 (prob. 8)
Eudoxio, 266
Exponencial compleja, 495
Extensión de una gráfica, 222

Factor, 505
Factorial, 327
Fermat, Pierre, 334
Foco
de una elipse, 237
de una hipérbola, 243
de una parábola, 232
Forma cuadrática, 249
Forma polar de un número complejo, 495
Fórmula de De Moivre, 497
Fracciones parciales, 726
Función(es), 124
álgebra de, 136, 145, 152
algebraicas, 154, 654, 661
circulares
gráficas de, 279
propiedades de 272, 276
composición de, 141
constantes, 131, 378
continuas, 365
en pedazos, 558 (prob. 9)
cosecante, 276
coseno, 270
cotangente, 276
creciente, 458, 655
decreciente, 458, 655
de variable real, 126
división de, 138
dominio de una, 124-125

elementales, 654
error, 760
exponencial, 670
de base a, 677
gráfica de una, 128
hiperbólicas, 701
identidad, 131
derivada de la, 379
impar, 224, 768
integrable, 537, 545, 557 (prob. 9)
integrables elípticas, 762, 765 (prob. 2)
inversa, 147, 654
trigonométrica, 689
logarítmica, 664
de base a, 678
máximo entero contenido, 132
monótona, 458
no creciente, 458
no decreciente, 458
periódica, 277
polinomial, 139, 368
potencial, 674
racional(es), 139, 368, 727
integración de, 732
límite en ∞ de una. 415, 416 (prob. 5)
raíz cuadrada, 132
rango de una, 124-125
regla de correspondencia de una, 126
secante, 276
seno, 270
seno integral, 765 (prob. 3)
sustracción de, 137
suma de, 134
tangente, 276
trascendente, 654
trigonométricas, 270, 276, 369
continuidad de las, 369
definición de, 270, 276
derivadas de las, 391
gráficas de las, 279
integrales de, 682
inversas, 689
propiedades de, 272-273
uso de las tablas de, 293
univalente, 146
valor absoluto, 131
valor de una, 125
valor medio de una, 570
valuada en los reales, 126

Gauss, Karl, 486
Geometría analítica, 51
Geometría euclidiana, 52, 198, 206
Geometría plana, 198
Gráfica
de una ecuación, 215
de ecuaciones paramétricas, 218
de una función real de variable real, 128
Gráfica polar
de una ecuación, 311 (prob. 6)
de una función, 307
Grassman, Herman, 486
Grupo(s), 186
conmutativo, 187
de transformaciones, 186
euclidiano, 190 (prob. 3), 195 (prob. 2)
ortogonal, 195 (prob. 1)

Hamilton, William Rowan, 486
Heine-Borel, teorema de, 437
Hipérbola, 243, 257, 259, 262
ecuación polar de la, 311 (prob. 7), 491

i, 491
Identidad, elemento, 25-26, 136, 146, 186, 488
Igualdad de conjuntos, 18
Impulso de una fuerza, 616
Incremento, 395
Independencia lineal de vectores, 107, 115 (prob. 12)
Ínfimo, 422, 443
Infinito, 39, 117, 409-410, 413
Integración numérica, 748
por la regla de Simpson (parabólica), 750
por la fórmula de Taylor, 760
por la regla trapezoidal, 750
de funciones racionales, 732
por fracciones parciales, 734
por partes, 611, 720
por sustitución, 613, 739
trigonométrica, 614, 742

por uso de tablas, 74
Integral definida, 532
propiedades básicas d la, 549, 556
como límite de una suma, 547, 625
aproximación numéric a la, 539, 547, 749, 751, 760
Integral de Riemann, 53
Integral elíptica, 645 (prob. 3), 762, 765 (prob. 2)
Integral inferior, 535
Integral superior, 535
Integral(es), 532
como límite de sumas 547, 625
impropia. 573, 578 (probs. 2, 3)
indefinida, 603
Intercepciones, 222
de una recta, 117
Interior, producto, 74, 83, 192
Intersección, ángulo de, 296
de conjuntos, 18
de rectas, 107
Intervalo abierto, 39
Intervalos, 39
abiertos, 40
caracterización de, 434
cerrados, 39
infinitos, 39
semiabiertos, 39
Invariantes, 191, 207
Invariantes euclidianos, 207
Isomorfismo, 490

Kronecker, Leopoldo, 48

Lado recto, 236 (prob. 8) 243 (prob. 4), 249 (prob. 5)
Lemniscata de Bernoulli, 311 (prob. 9)
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 334, 526
Leibniz, regla para la *n*-ésima derivada, 395
Ley
de los cosenos, 302
de los senos, 302
asociativa, 25, 57, 489
conmutativa, 25, 57, 62 489
Leyes de cancelación, 29 442 (probs. 13, 14)
Leyes de los exponentes, 50, 675

Ley distributiva, 25, 57, 488
Límite, 338
derecho, 351
de sumas e integrales, 547, 625
infinito, 409
izquierdo, 351
teoremas sobre el, 358
trigonométrico, 356
unicidad del, 348
Línea recta (*véase* Recta)
Logarítmica, diferenciación, 699
Logarítmica, función, 664
de base *a*, 678
de base 10, 679
Longitud
de arco, 636
de curvas, 636
de una cuerda, 279 (prob. 9), 291 (prob. 9)
de vectores, 70

Matrices, 212 (prob. 10)
Máximo, 445, 452
relativo, 450
pruebas de determinación, 460, 464, 710,
Media aritmética, 569
Medida de un ángulo en grados, 288
Medida de un ángulo en radianes, 286
Método de capas, 630
Método de los cuadrados mínimos, 468 (prob. 18)
Método de Newton, 517
Milésima de artillería, 313 (prob. 11)
de infantería, 313 (prob. 11)
Mínimo, 445, 452
Mínimo relativo, 450
pruebas de determinación del, 460, 463, 710,
Módulo de un número complejo, 494
Momento
conservación de, 617
de flexión, 480 (prob. 2,3)
de una barra, 573 (prob. 15)
lineal, 616
Multiplicación
de funciones, 134
de números complejos, 487
de números reales, 24, 25
de un par ordenado por un número real, 56
de un vector por un número real, 56, 62

Neutro, elemento, 25, 136, 146, 187, 488
Newton, método de, 517
Newton, segunda ley del movimiento de, 616
Newton, sir Isaac, 334, 526
Norma de una partición, 532
Normal a una recta, 100
Notación decimal, 23
Notación de integral indefinida, 604
Número(s)
complejos, 487
amplitud de un, 494
argumento de un, 494
conjugado de un, 491
forma polar de un, 495
parte imaginaria de un, 487
parte real de un, 487
potencias de, 497
raíces de, 497
valor absoluto de un, 494
racional, 15
real, 25
Números direccionales, 116

Operación binaria, 186
Origen de coordenadas, 52
Ortogonalidad
de rectas, 100
de vectores, 72, 75

Parábola, 232, 257, 259, 262
ecuación polar de una, 311 (prob. 7)
Parabólica, regla, 750
Paralaje estelar, 292 (prob. 13)
Paralelismo
de rectas, 96
de vectores, 68
Parámetro, 218
Pares ordenados, álgebra de, 56
Partición
de un intervalo, 532
norma de una, 532
refinamiento de una, 535
Pascal, triángulo de, 330 (prob. 5)
Pendiente, 116, 298, 336
Periodo, 277
Pi (π), 267, 269
Plano euclidiano, 90
Polares coordenadas, 305
Polinomial, función, 139, 368
sobre el campo complejo, 501
Postulado de las paralelas, 97
Potencial, función, 674
Potencial gravitacional, 650 (prob. 23)
Primo, 510, 511
Principio de Arquímedes, 649 (prob. 11)
Principio de inducción, 316
segundo, 331
Principio del buen orden, 316
Producto cartesiano, 55
Principio de Fermat, 465
Producto escalar, 73, 83, 192
Producto interior (escalar), 74, 83, 192
Proyección ortogonal, 82
Punto
crítico, 451
de acumulación, 339
de inflexión, 477

Racional, número, 15, 426
Radio vector, 63
Raíces características de una forma cuadrática, 252
Raíz
de una ecuación, 483
determinación aproximada de, 427, 516
racional, 510
de un número, 29, 432, 497
Rango de una función, 125
Razón de cambio, 401
Real(es), número(s), 24
axiomas de los, 25, 425
representación geométrica de los, 46
Recta(s)
ángulo de intersección de, 296
coordenada, 23
definición de una, 90
dirección de una, 116
dirigida, 296
ecuación de una, 100
ecuaciones paramétricas de, 98

intersección de, 107, 109
ortogonalidad de, 100
paralelismo de, 96, 116-117
pendiente de una, 117, 297
representación analítica de, 90, 98, 100
Recta numérica, 23
Recta secante, 335
Recta tangente, 334, 376
Refinamiento de una partición, 535
Rectangulares, coordenadas (cartesianas) 52, 203
Rectángulo, área del, 526
Reflexión, 166
Regla de correspondencia, 126
Regla de la cadena, 388
Relativa, velocidad, 67 (prob. 6), 305 (prob. 5)
Residuo *(véase también* Error)
en la fórmula de Taylor, 705
forma de Lagrange, 708
en la regla de Simpson, 750, 757
en la regla trapezoidal, 750, 758
teorema del, 505
Riemann, Georg Friedrich, 526
Riemann, integral de, 537
Rieman integrables, funciones, 537
Rolle, teorema de, 454
Rosa de cuatro hojas, 310 (prob. 4a)
Rosa de tres hojas, 310 (prob. 4c)
Rotación, 165, 170, 189
y ángulo, 286
de ejes, 182

Schwarz, desigualdad de, 86
Sección cónica *(véanse también* Elipse, hipérbola y parábola)
ecuación polar de una, 311 (prob. 7)
Segmentos rectilíneos, 104
Segunda ley del movimiento de Newton, 616
Semifactorial, 726 (prob. 4)
Seno, función, 270
Seno-integral, función, 765 (prob. 3)
Símbolos, lista de, 13
Simetría, 222
con respecto a los ejes, 225
con respecto al origen, 227
con respecto a una recta, 223
con respecto a un punto, 226
Simpson, regla de, 750
Sistemas de coordenadas, 203
Snell, ley de, 466
Sólidos de revolución, volumen de, 621, 630
Solución
de ecuaciones lineales simultáneas, 113
de una desigualdad cuadrática, 37
de una desigualdad lineal, 36
de una ecuación cuadrática, 32
de una ecuación diferencial, 598
de una ecuación lineal, 30
Subconjunto, 17
Suma inferior, 533
Suma superior, 533
Sumas, 320
aritméticas, 327 (prob. 6)
geométricas, 327 (prob. 5)
propiedades de las, 323
Supremo, 421, 443
axioma del, 425
Sustracción
de funciones, 137
de números complejos, 490
de números reales, 28
de vectores, 63

Tablas
de integrales, uso de, 745
de funciones trigonométricas, uso de, 293
Tangente, función, 276
Tangente, recta, 334, 376
Tangente, vector, 639
Taylor, teorema de, 704
en la integración numérica, 760
Teorema de Pitágoras, 62, 70, 75
Teorema de Rolle, 456
Teorema de Taylor, 704
en la integración numérica, 760
Teorema del binomio, 327
Teorema del factor, 505
Teorema del residuo, 504
Teorema del valor intermedio, 430
Teorema del valor medio, 456
para integrales, 569
Teorema fundamental
del álgebra, 502
del cálculo, 558, 560
Toro, 636 (prob. 14)
Trabajo, definición de, 594
Transformación(es)
composición de, 179
de coordenadas, 183, 203
de grupo, 190 (prob. 3)
definición de, 160
de semejanza, 161
inversa, 161
lineal, 178 (prob. 14), 195 (prob. 3)
no singular, 161, 187
ortogonal, 190
rígida, 164
singular, 161
de ejes, 182
Transverso, componente de la velocidad, 647 (prob. 7d)
Transverso, eje, de una hipérbola, 245
Trapezoidal, regla, 750
Trascendente, función, 654
Traslación(es), 165, 190 (prob. 2)
Trayectoria, 115 (prob. 10), 218
Trayectoria de fase de una partícula, 621 (prob. 10)
Triángulo de Pascal, 330 (prob. 5)
Triángulo, desigualdad del
para números complejos, 495
para números reales, 41
para vectores, 71, 86
Triángulos, solución de, 299
Trigonométricas,

funciones,
continuidad de, 369
definición de, 270, 276
derivadas de, 391
gráficas de, 279
integrales de, 683
propiedades de, 272
uso de las tablas de, 293
Truncamiento, error por (*véase* Error)

Unión de conjuntos, 17
Univalente, función, 146

Valor absoluto
de un número complejo, 495
de un número real, 40
función, 131, 380
Valor de una función, 124
Valores extremos, 450
Valor medio de una función, 570
Valor promedio de una función, 570
Variables, 401
Vecindad, 450
Vector(es), adición de, 56, 61
ángulo entre, 253
cero, 58
componentes de, 82, 290
dirección de un, 67
libres, 63, 209 (prob. 9, 10)
longitud de un, 70
multiplicación por un escalar de un, 56
ortogonalidad, 71, 75
paralelismo, 68
producto escalar de, 73, 83, 192
producto interior de, 74
producto punto de, 74
propiedades algebraicas fundamentales de los, 58
sustracción de, 59, 63
tangente, 639
Vectoriales, ecuaciones
de una elipse, 238
de una hipérbola, 244
de una parábola, 232-234
de una recta, 100
de un conjunto, 219
Vectorial, espacio, 141 (prob. 12)
bidimensional (V^2), 57
Velocidad, 372, 642
angular, 647
componente radial de, 646
componente transverso de, 647 (prob. 7d)
de escape, 650 (prob. 23)
lineal, 642
relativa, 67 (prob. 6), 305 (prob. 5)
Vértice
de una elipse, 236
de una hipérbola, 243
de una parábola, 232
Vigas, 479 (probs. 2, 3)
Volumen, 621, 630